**Université Mostafa BenBoulaïd- Batna 2-**
**Faculté de M I, Département de Mathématiques**
**2ème année, module Analyse complexe**

**Travaux Dirigés 3 (2020/2021)**
**Formule intégrale de Cauchy, séries de Laurent.**

**Exercice 1.**

En utilisant la formule de Cauchy calculer les intégrales suivantes:

$\int_{|z-6|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$, $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z^2-1}dz$, $\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{e^{z^2}}{z^2(z+1)}dz$, $\int_{|z|=2} \frac{chz}{(z+1)^3(z-1)}dz$, $\int_{|z-1|=1} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}dz$, $\int_{|z-1|=2} \frac{e^{2iz}}{(z-2)^2(z-4)}dz$, $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2(z+1)^2}dz$, $\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{z(z+1)}dz$, $\int_{|z|<2} \frac{chz}{(z+1)^3(z-1)}dz$, $\int_{|z-2|=5} \frac{z^2e^z}{(z+1)(z-1)(z-2)}dz$

**Exercice 2.**

Soit le cercle $C(0,\ 1) = \{z \in \mathbb{C} : \quad |z| = 1\}$ et $\gamma$ le chemin fermé qui pour image $\{\gamma\} = C\,(0,\ 1)$.

(1) Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{e^z + z}{z - \frac{1}{2}}dz$$

(2) Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{e^{iz} + z}{z - \frac{3\pi}{2}}dz$$

**Exercice 3.**

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer les intégrales suivantes:
(1) $\int_{B(i,\ 3)} \frac{\sin z}{z-i}dz$, (2) $\int_{B(0,\ 4)} \frac{\cos z}{z^2-i^2}dz$, (3) $\int_{B(0,\ 2)} \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

**Exercice 4.** .

Soient $a$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que: $0 < a < b$.

1- Trouver un chemin $\gamma : [0,\ 2\pi] \to \mathbb{C}$ tel que: $\{\gamma\} = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$.

2- Déterminer deux fonctions $I : [0,\ 2\pi] \to \mathbb{C}$ et $J : [0,\ 2\pi]$ telles que:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} I(t)dt + i\int_0^{2\pi} J(t)dt$$

3- En utilisant le théorème de Cauchy, prouver que: $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi$

4- En déduire que: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$ et $\int_0^{2\pi} \frac{\cos t \sin t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}dt = 0$.

**Exercice 5.**

Développer en série de laurent:

(1) Dans la couronne $0 < |z-1| < 2$ la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$.

(2) Au voisinage du point $z = 0$ les fonctions $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, $g(z) = z^3e^{\frac{1}{z}}$, $h(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$.