Université Mostafa BenBoulaïd- Batna 2-
Faculté de M I, Département de Mathématiques
2ème année, module Analyse complexe

Travaux Dirigés 4 (2020/2021)
Théorème des résidus et ses applications

Exercice 1.
Trouver les points singuliers et determiner leurs caractère pour les fonctions suivantes: **a)** $\frac{z}{\sin z}$, **b)** $\cos\frac{1}{z}$, **c)** $z\sin\frac{1}{z}$, **d)** $\frac{1}{z^4+1}$.

Exercice 2. Trouver les résidus des fonctions suivantes au point considéré:
1) $f(z)=\frac{z^2+1}{z}$ $(z_0=0)$, 2) $f(z)=\frac{z-1}{(z+1)(z^3-5)}$ $(z_0=-1,\ z_0=\sqrt[3]{5})$,
3) $f(z)=\frac{\cos z}{\sin z}$ $(z_0=0)$, 4) $f(z)=\frac{e^z}{z^4}$ $(z_0=0)$, 5) $f(z)=\frac{z+3}{(z^2-1)(z+2)}$ $(z_0=1)$.

Exercice 3. Déterminer les résidus des fonctions ci-dessous en leurs points singuliers:
a) $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z^2}$, **b)** $f(z)=z^5e^{\frac{1}{z}}$, **c)** $f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$,
d) $f(z)=(z-2)\,e^{\frac{1}{z-2}}$, **e)** $f(z)=\frac{\sin z^2}{z^2(z-\frac{\pi}{4})}$.

Exercice 4. .Calculer les intégrales suivantes, en appliquant le théorème des résidus:
$\int_{|z|=5}\frac{e^{iz}}{(z-\pi)}dz$, $\int_\gamma\frac{dz}{z^4+1}$ / $\gamma: x^2+y^2=4$, $\int_\gamma\frac{zdz}{(z-1)^2(z-3)}$ / $\gamma:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $\int_{|z|=2}\frac{e^z-1}{z(z+1)}$, $\int_{|z|=3}\frac{\sin z}{(z-i)^3}dz$.

Exercice 5. On pose, $f(t)=\frac{1}{\sqrt{5}+\cos t}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Soit γ le cercle unité parcouru une fois dans le sens positif:
- Montrer, en posant $z=e^{it}$, que $f(t)=\frac{2z}{z^2+2\sqrt{5}z+1}$.
- Déterminer les pôles de la fonction $g(z)=\frac{2}{z^2+2\sqrt{5}z+1}$.
- Calculer $\int_\gamma g(z)dz$. En déduire que $\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{5}+\cos t}dt=\pi$.

Exercice 6. Déterminer les pôles et les résidus de la fonction: $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$.
- Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ où 1) γ est le rectangle de sommets -1+2i, 1+2i, 1+$\frac{1}{2}i$, -1+$\frac{1}{2}i$, 2) γ est le triangle de sommets: $-2-3i$, $-2+3i$, 2.
-Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt$.

Exercice 7. Soit $\gamma:[0,\ 2\pi]\to\mathbb{C}$, $\quad t\to\gamma(t)=i\pi+e^{it}$ et soit la fonction $g: z\mapsto g(z)=\frac{1}{z^2+\pi^2}$.
1) définir l'ensemble $\{\gamma\}$, image du chemin γ dans le plan complexe et prouver que la fonction g est bien définie dans $\{\gamma\}$.
2) Pour $z\in\{\gamma\}$ décomposer la fraction $\frac{1}{z^2+\pi^2}$ en somme de deux éléments simples.
3) Calculer $\int_0^{2\pi}g(z)dz$ et prouver que $\int_0^{2\pi}g(z)dz=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\pi-ie^{it}}$, puis en déduire la valeur des deux intégrales réelles

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos t dt}{1+4\pi\sin t+4\pi^2}\ \text{et}\ \int_0^{2\pi}\frac{(\sin t+2\pi)\,dt}{1+4\pi\sin t+4\pi^2}.$$