Corrigé type de la série 1 du TD

du module Analyse-Complexe

Exercice 1

3) $\lim\limits_{z \to 2e^{i\frac{\pi}{3}}} \dfrac{z^3+8}{z^4+4z^2+16} = \dfrac{0}{0}$ FI

On $z^4+4z^2+16 = (z^2+4)^2 - 4z^2$

$= (z^2+4-2z)(z^2+4+2z)$

Donc :

$$\lim_{z \to 2e^{i\frac{\pi}{3}}} \frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16} = \lim_{z \to 2e^{i\frac{\pi}{3}}} \frac{(z+2)(z^2-2z+4)}{(z^2+4-2z)(z^2+4+2z)}$$

$$= \lim_{z \to 2e^{i\frac{\pi}{3}}} \frac{z+2}{z^2+4+2z}$$

$$= \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}+2}{4e^{i\frac{2\pi}{3}}+4+4e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$= \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)+2}{4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)+4+4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2}{4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+4+4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$