les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées, plus la première condition (1), on déduit que f est analytique en tout point de $\mathbb{C}$.

b) soit $P(x,y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$.

vérifions que P est harmonique.

P est harmonique, veut dire que:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

c'est l'équation de Laplace.

Calculons $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$.

On a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -2y e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) + 2x e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2)$$

$$= 2 e^{-2xy} \left(-y \sin(x^2 - y^2) + x \cos(x^2 - y^2)\right)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -4y e^{-2xy} \left[(-y \sin(x^2 - y^2)) + x \cos(x^2 - y^2)\right]$$
$$+ 2 e^{-2xy} \left[2xy \cos(x^2 - y^2) + \cos(x^2 - y^2) - 2x^2 \sin(x^2 - y^2)\right]$$