Exercice 7

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique dans Ω.

montrons que :

1) f est constante $\Rightarrow U = \mathcal{R}e f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est constante.

Supposons que f est une fonction constante, alors : $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ et $\exists\, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \Omega$

$$f(x,y) = U(x,y) + i\,V(x,y) = \alpha + i\,\beta$$

Donc :

$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \Omega \;/\; U(x,y) = \alpha$

et

$\exists\, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \Omega \;/\; V(x,y) = \beta$

Ceci implique que U et V sont aussi des fonctions constantes.

2) $U = \mathcal{R}e f$ est constante $\Longrightarrow V = \mathcal{I}m f$ est constante.

Supposons que $U = \mathcal{R}e f$ est constante.