c.à.d :

$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \,/\, \forall (x,y) \in \Omega : U(x,y) = \alpha$

Comme f est analytique, alors les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites,

c.à.d : $\forall (x,y) \in \Omega$:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Donc : $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

D'où v est une fonction constante.

3) $v = \mathrm{Im}\, f$ est constante $\Rightarrow |f|$ est constante.

Supposons que v est une fonction constante.

on sait que : $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$

comme v est constante, u est aussi constante