Donc $|f| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

Ceci implique que :

$\exists\ c = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall (x,y) \in \Omega :$

$$|f(x,y)| = c$$

D'où la fonction $|f|$ est constante.

4) $|f|$ est constante $\Longrightarrow \bar{f}$ est analytique.

supposons que $|f|$ est constante,

On sait que : $|f|^2 = f \cdot \bar{f}$

Donc : $$\bar{f} = \frac{f}{|f|^2} = \frac{f}{c^2} \ , \ c \neq 0$$

remarquons que $\bar{f}$ est quotient de deux fonctions analytiques,

d'où $\bar{f}$ est analytique.