

5) \bar{f} est analytique $\Rightarrow f$ est constante.

Supposons que \bar{f} est analytique, alors les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées, c.à.d.:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y} \dots \textcircled{1}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \dots \textcircled{2}$$

mais f est analytique, alors:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \dots \textcircled{3}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y} \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{3} \text{ donne: } 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ceci implique $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots \textcircled{5}$