car $|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z} = r^2$

Donc :

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{x - iy}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + i\frac{1}{2}y\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)$$

$$= X + iY \quad , \text{ où}$$

$$X = \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \text{ et } Y = \frac{1}{2}y\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2r^2 X}{r^2 + 1} \\[2ex] y = \dfrac{2r^2 Y}{r^2 - 1} \end{cases}$$

mais $x^2 + y^2 = r^2$

Donc : $\left(\dfrac{2r^2}{r^2+1}\right)^2 X^2 + \left(\dfrac{2r^2}{r^2-1}\right)^2 Y^2 = r^2$

ce qui donne : $\dfrac{4r^2}{(r^2+1)^2} X^2 + \dfrac{4r^2}{(r^2-1)^2} Y^2 = 1$