b) montrons que : $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

on sait d'après a) que :

$$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$
$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2|$$

comme $|z_1\bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$

Donc :

$$|z_1+z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2$$

d'où : $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

On a : $|z_1-z_2| = |z_1+(-z_2)|$

$$\leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Exercice 4

1) la fonction $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

est continue en tout point $z \neq \pm i$