Examen de Méthodes Numériques Approfondies – Master M1EN

N.B : *Aucun document n'est autorisé. Durée : 1 h 30 mn.*

Exercice N° 1: (3 points) Quelle est la nature de l' EDP suivante : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$

Cette EDP est discrétisée par les 3 schémas suivants :

1- $\frac{2\,T_{i,j} - 5\,T_{i+1,j} + 4\,T_{i+2,j} - T_{i+3,j}}{\Delta x^2} - \frac{4\,T_{i,j+1} - 3\,T_{i,j} - T_{i,j+2}}{2\,\Delta y} = \mathbf{0}$

2- $\frac{T_{i,j} - 2\,T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y} = \mathbf{0}$

3- $\frac{2\,T_{i,j} - T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\Delta y} = \mathbf{0}$

Donner, pour chaque schéma, le type d'approximation choisie pour chaque terme.

Exercice N° 2: (7 points) Soit le schéma de discrétisation suivant :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = (1-\theta)\left[\frac{T_{i-1}^n - 2\,T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right] + \theta\left[\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2\,T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right]$$

Où θ est une constante comprise entre 0 et 1.

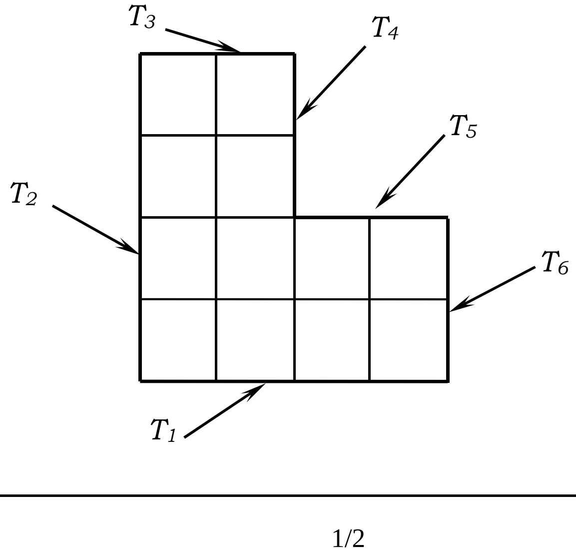
1- Déterminer son facteur d'amplification (prendre: $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).

2- Etudier sa stabilité pour les cas où $\theta = 0$, $\theta = 1/2$ et $\theta = 1$.

Exercice N° 3: (10 points) Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque ci-dessous en utilisant le schéma à 9 points (β=1).

On donne : $T_1 = 10°C$, $T_2 = 100°C$, $T_3 = 2.10^4\,x^2$, $T_4 = 20°C$, $T_5 = 10°C$, $T_6 = 10^4\,y^2$

$\Delta x = 2$ *cm.*



Bonne chance

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$h\,f'(x)$	-1	+1			
$h^2\,f''(x)$	+1	-2	+1		

<u>Tab</u>.1- Approximation décentrée en avant en $O(h)$.

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$h\,f'(x)$				-1	+1
$h^2\,f''(x)$			+1	-2	+1

<u>Tab</u>.2- Approximation décentrée en arrière en $O(h)$.

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$
$2h\,f'(x)$	-3	+4	-1			
$h^2\,f''(x)$	+2	-5	+4	-1		

<u>Tab</u>.3- Approximation décentrée en avant en $O(h^2)$.

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2h\,f'(x)$				+1	-4	+3
$h^2\,f''(x)$			-1	+4	-5	+2

<u>Tab</u>.4- Approximation décentrée en arrière en $O(h^2)$.

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2h\,f'(x)$		-1	0	+1	
$h^2\,f''(x)$		+1	-2	+1	

<u>Tab</u>.5- Approximation centrée en $O(h^2)$.