## ***Examen de Méthodes Numériques Approfondies –Master M1EN***

***N.B :*** *Aucun document n'est autorisé. Durée : 1 h 30 mn.*

**Exercice N° 1:** (3 points) Soit l' EDP suivante : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial y} = 0$. Elle est discrétisée par les 3 schémas suivants :

**1-** $$\frac{2T_{i,j} - 5T_{i+1,j} + 4T_{i+2,j} - T_{i+3,j}}{\Delta x^2} - \frac{4T_{i,j+1} - 3T_{i,j} - T_{i,j+2}}{2\Delta y} = 0$$

**2-** $$\frac{T_{i,j} - 2T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y} = 0$$

**3-** $$\frac{2T_{i,j} - T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\Delta y} = 0$$

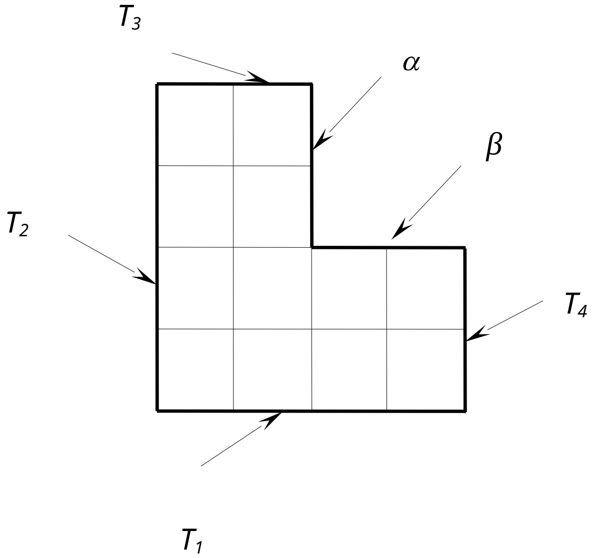
Donner, pour chaque schéma, le type d'approximation choisie pour chaque terme.

**Exercice N° 2:** (7 points) Considérer le schéma de Crank-Nicholson appliqué à l'équation de la chaleur. Déterminer son facteur d'amplification (prendre: $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ ) et étudier sa stabilité.

**Exercice N° 3:** (10 points) Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque ci-dessous en utilisant le schéma à 5 points et en discrétisant les conditions aux limites de Neumann par des approximations décentrées d'ordre 1.

On donne : $T_1 = 10°C$, $T_2 = 50°C$, $T_3 = 30°C$, $T_4 = 100°C$

$$\alpha = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_d = 5\,°C/cm \quad , \quad \beta = \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_h = 20\,°C/cm \quad , \quad \Delta x = 2\ cm \quad et \quad \Delta y = 1\ cm.$$



| | $f(x)$ | $f(x+h)$ | $f(x+2h)$ | $f(x+3h)$ | $f(x+4h)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $hf'(x)$ | -1 | +1 | | | |
| $h^2 f''(x)$ | +1 | -2 | +1 | | |

*Tab.1- Approximation décentrée en avant en* $O(h)$.

| | $f(x-4h)$ | $f(x-3h)$ | $f(x-2h)$ | $f(x-h)$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $hf'(x)$ | | | | -1 | +1 |
| $h^2 f''(x)$ | | | +1 | -2 | +1 |

*Tab.2- Approximation décentrée en arrière en* $O(h)$.

| | $f(x)$ | $f(x+h)$ | $f(x+2h)$ | $f(x+3h)$ | $f(x+4h)$ | $f(x+5h)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2hf'(x)$ | -3 | +4 | -1 | | | |
| $h^2 f''(x)$ | +2 | -5 | +4 | -1 | | |

*Tab.3- Approximation décentrée en avant en* $O(h^2)$.

| | $f(x-5h)$ | $f(x-4h)$ | $f(x-3h)$ | $f(x-2h)$ | $f(x-h)$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2hf'(x)$ | | | | +1 | -4 | +3 |
| $h^2 f''(x)$ | | | -1 | +4 | -5 | +2 |

*Tab.4- Approximation décentrée en arrière en* $O(h^2)$.

| | $f(x-2h)$ | $f(x-h)$ | $f(x)$ | $f(x+h)$ | $f(x+2h)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2hf'(x)$ | | -1 | 0 | +1 | |
| $h^2 f''(x)$ | | +1 | -2 | +1 | |

*Tab.5- Approximation centrée en* $O(h^2)$.