Examen de Méthodes Numériques Approfondies – Master M1EN

N.B : *Aucun document n'est autorisé. Durée : 1 h 30 mn.*

Exercice N° 1: (*4 pnts*) Quelle est la nature de l' EDP suivante : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$

Cette EDP est discrétisée par les trois schémas suivants :

1- $\frac{2T_{i,j} - 5T_{i+1,j} + 4T_{i+2,j} - T_{i+3,j}}{\Delta x^2} - \frac{4T_{i,j+1} - 3T_{i,j} - T_{i,j+2}}{2\Delta y} = 0$

2- $\frac{T_{i,j} - 2T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y} = 0$

3- $\frac{2T_{i,j} - T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\Delta y} = 0$

Donner, pour chaque schéma, le type d'approximation choisie pour chaque terme.

Exercice N° 2: (*4 pnts*) Soit l' EDP suivante : $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial x}$.

1- Classer cette EDP.

2- Discrétiser le terme spatial par une approximation décentrée arrière d'ordre 2 et le terme temporel par une approximation décentrée avant d'ordre 1.

3- Discrétiser le terme spatial par une approximation centrée et le terme temporel par une approximation décentrée arrière d'ordre 2.

Exercice N° 3: (*6 pnts*) Considérons l'EDP suivante : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

1- Discrétiser cette équation par des approximations centrées puis écrire l'équation discrétisée en posant ($\lambda = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$).

2- Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.

3- Déterminer son facteur d'amplification en utilisant l'analyse de Von-Neumann.

Exercice N° 4: (*6 pnts*) Soit le schéma de discrétisation suivant :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = (1-\theta)\left[\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right] + \theta\left[\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right]$$

Où θ est une constante comprise entre 0 et 1.

1- Déterminer son facteur d'amplification (prendre: $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).

2- Etudier sa stabilité en fonction de θ pour les cas où $\theta = 0$, $\theta = 1/2$ et $\theta = 1$.