Contrôle Outils numériques (Licence : Energétique)

N.B : *Aucun document n'est autorisé. Durée : 1 h 45 mn.*

Exercice N° 1: (7 points)

Résoudre le problème continu suivant par la méthode de séparation des variables : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ $0 < x < L$, $t > 0$

$T(0,t) = 0$, $T(L,t) = 0$, $T(x,0) = T_0$ (T_0 étant une constante).

Exercice N° 2: (3 points)

Classer les EDP suivantes (parabolique, hyperbolique ou elliptique) :

1. $\frac{\partial u}{\partial t} + 2\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
2. $(1 - M)\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$ (étudier en fonction de M).
3. $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

Exercice N° 3: (4 points)

La discrétisation de l'équation de la chaleur par la méthode *de Crank-Nicholson* donne :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{T_{i-1}^n - 2\,T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2\,T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right]$$

Etudier la stabilité de ce schéma.

Exercice N° 4: (2 points)

Parmi les schémas ci-dessous, dire lequel est explicite ou implicite :

1. $T_i^{n+1} - T_i^n + \lambda\,(T_i^n - T_{i-1}^n) = 0$
2. $T_i^{n+1} - T_i^n + \lambda\,(T_{i+1}^n - T_{i-1}^{n+1}) = 0$
3. $T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4\,T_{i,j} = 0$
4. $T_i^{n+1} - 2\,(1 - \lambda)\,T_i^n - \lambda\,(T_{i+1}^n - T_{i-1}^n) + T_i^{n-1} = 0$

Exercice N° 5: (4 points)

Dans l'équation de la chaleur de l'exercice 1, discrétiser :

1. le terme temporel par un schéma décentré avant d'ordre 2.
2. le terme temporel par un schéma décentré arrière d'ordre 1.
3. le terme temporel par un schéma centré d'ordre 2.
4. le terme spatial par un schéma décentré arrière d'ordre 2.

Bonne chance et bonnes vacances

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$h\,f'(x)$	-1	+1			
$h^2\,f''(x)$	+1	-2	+1		

Tab.1- Approximation décentrée en avant en $O(h)$.

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$h\,f'(x)$				-1	+1
$h^2\,f''(x)$			+1	-2	+1

Tab.2- Approximation décentrée en arrière en $O(h)$.

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$
$2h\,f'(x)$	-3	+4	-1			
$h^2\,f''(x)$	+2	-5	+4	-1		

Tab.3- Approximation décentrée en avant en $O(h^2)$.

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2h\,f'(x)$				+1	-4	+3
$h^2\,f''(x)$			-1	+4	-5	+2

Tab.4- Approximation décentrée en arrière en $O(h^2)$.

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2h\,f'(x)$		-1	0	+1	
$h^2\,f''(x)$		+1	-2	+1	

Tab.5- Approximation centrée en $O(h^2)$.