Concours d'accès à la formation de 3ème cycle Doctorat (LMD) 2014/2015

Epreuve de Méthodes numériques. Sujet N°1.

Exercice N° 1: (12 points)

Soit une barre, de longueur L et de très faible section, soumise aux conditions α et β respectivement à ses extrémités gauche et droite. Ce phénomène est régit par l'équation suivante : $\frac{\partial T}{\partial t} - 3\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

1- Classer cette EDP en justifiant votre réponse.
2- Discrétiser le terme temporel par une approximation décentrée avant d'ordre 1 et le terme spatial par une approximation centrée au temps n.
3- En posant $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, écrire l'équation discrétisée et justifier si le schéma obtenu est explicite ou implicite.
4- Etudier la stabilité de ce schéma en utilisant le critère de Von-Neumann.
5- En supposant que α et β sont des conditions de Dirichlet, déterminer la forme matricielle du problème (préciser les bornes pour i et n).
6- En suppose maintenant que α est une condition de Neumann ($\alpha = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}$). En discrétisant cette condition par une approximation décentrée avant d'ordre 1, déterminer la nouvelle forme matricielle du problème (préciser les bornes pour i et n).

Exercice N° 2: (08 points)

Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque schématisée ci-dessous en utilisant le schéma à 5 points et en discrétisant la condition limite de Neumann par un schéma centré.

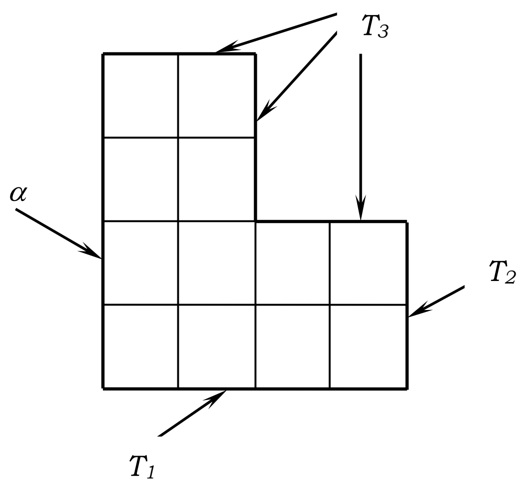
On donne :

$T_1 = 40°C$, $T_2 = 20°C$, $T_3 = 100°C$,

$\alpha = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_g = 10\ ℃/cm$,

$\Delta x = 0.2\ cm$.

N.B : *La numérotation des nœuds se fait obligatoirement de gauche à droite et de bas en haut.*



Tableaux des approximations utilisées en différences finies

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$h\,f'(x)$	-1	+1			
$h^2\,f''(x)$	+1	-2	+1		

***Tab*.1- Approximation décentrée en avant en $\boldsymbol{O(h)}$.**

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$h\,f'(x)$				-1	+1
$h^2\,f''(x)$			+1	-2	+1

***Tab*.2- Approximation décentrée en arrière en $\boldsymbol{O(h)}$.**

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$2h\,f'(x)$	-3	+4	-1		
$h^2\,f''(x)$	+2	-5	+4	-1	

***Tab*.3- Approximation décentrée en avant en $\boldsymbol{O(h^2)}$.**

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2h\,f'(x)$			+1	-4	+3
$h^2\,f''(x)$		-1	+4	-5	+2

***Tab*.4- Approximation décentrée en arrière en $\boldsymbol{O(h^2)}$.**

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2h\,f'(x)$		-1	0	+1	
$h^2\,f''(x)$		+1	-2	+1	

***Tab*.5- Approximation centrée en $\boldsymbol{O(h^2)}$.**