Concours d'accès à la formation de 3ème cycle Doctorat (LMD) 2014/2015

Epreuve de Méthodes numériques. Sujet N°2.

Exercice N° 1: (13 points)

Soit l' EDP suivante : $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial T}{\partial x} + 2\,\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

1- Classer cette EDP en justifiant votre réponse.

2- Discrétiser tous les termes par des approximations centrées.

3- En posant $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ écrire l'équation discrétisée.

4- Dessiner les cellules correspondantes pour β et Δx quelconques ainsi que pour β = 2 et $\Delta x = \frac{1}{2}$.

5- Cette équation est appliquée à une plaque rectangulaire soumise à 100°C en bas, 20°C à gauche, 40°C à droite et 10°C en haut. En discrétisant cette plaque par 4 divisions selon X et 3 selon Y :

5.1- Ecrire les équations nécessaires à la résolution de ce problème pour β = 2 et $\Delta x = \frac{1}{2}$.

5.2- En déduire la forme matricielle du problème.

6- En suppose maintenant une condition de Neumann à gauche ($\alpha = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_g = 10$).

En discrétisant cette condition par une approximation centrée, déterminer la nouvelle forme matricielle du problème.

Exercice N° 2: (7 points)

Soit l'équation de la chaleur 1D définie par:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 \le x \le L \quad \text{et} \quad t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \alpha \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = \beta \qquad T(x,0) = \gamma$$

En posant $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ et en considérant le schéma implicite d'Euler (décentré avant d'ordre 1 en temps et centré en espace) discrétiser les (C.L) par des schémas décentrés d'ordre 2 et déterminer la forme matricielle de ce problème (préciser les bornes pour i et n).

Tableaux des approximations utilisées en différences finies

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$h\,f'(x)$	-1	+1			
$h^2\,f''(x)$	+1	-2	+1		

Tab.1- Approximation décentrée en avant en $O(h)$.

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$h\,f'(x)$				-1	+1
$h^2\,f''(x)$			+1	-2	+1

Tab.2- Approximation décentrée en arrière en $O(h)$.

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$2h\,f'(x)$	-3	+4	-1		
$h^2\,f''(x)$	+2	-5	+4	-1	

Tab.3- Approximation décentrée en avant en $O(h^2)$.

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2h\,f'(x)$			+1	-4	+3
$h^2\,f''(x)$		-1	+4	-5	+2

Tab.4- Approximation décentrée en arrière en $O(h^2)$.

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2h\,f'(x)$		-1	0	+1	
$h^2\,f''(x)$		+1	-2	+1	

Tab.5- Approximation centrée en $O(h^2)$.