



Examen¹ d'Outils Numériques (L3GEN)

N.B : *Aucun document n'est autorisé. Durée : 01 h 30 mn.*

Exercice N°1 : (6 Pnts)

Considérons l'équation de Laplace en deux dimensions.

En discrétisant le terme en x par un schéma décentré arrière d'ordre 1, le terme en y par un schéma décentré avant d'ordre 2 et en posant $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, donner le schéma de discrétisation (équation) et dessiner les cellules correspondantes pour β quelconque et pour $\beta = 2$.

Exercice N°2 : (6 Pnts)

Considérons l'équation de la chaleur unidimensionnelle.

1. Classer cette EDP en justifiant votre réponse.

Cette équation est discrétisée par le schéma de Crank-Nicholson.

1. Ecrire l'équation discrétisée et dire si ce schéma est explicite ou implicite.
2. Déterminer son facteur d'amplification (on posera : $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).

Exercice N°3 : (8 Pnts)

Considérons l'équation de Laplace appliquée à une plaque rectangulaire.

- 1- En posant $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, retrouver le schéma à 5 points.

Cette plaque est soumise à $100^\circ C$ en bas, $20^\circ C$ à gauche, $40^\circ C$ à droite et $10^\circ C$ en haut. Elle est discrétisée par 4 divisions selon X et 5 selon Y .

- 2- Dessiner les cellules correspondantes à ce schéma pour $\beta = 2$.
- 3- Ecrire les équations nécessaires à la résolution de ce problème.
- 4- Déterminer la forme matricielle du problème $A.T = B$.

Bonne Chance

1. Examen du 25/01/2014 par : Dr. L. MESSAOUDI.

Tableaux des différentes approximations

| | $f(x - 2h)$ | $f(x - h)$ | $f(x)$ | $f(x + h)$ | $f(x + 2h)$ |
|------------------|-------------|------------|--------|------------|-------------|
| $2h f'(x)$ | | -1 | 0 | +1 | |
| $h^2 f''(x)$ | | +1 | -2 | +1 | |
| $2h^3 f'''(x)$ | -1 | 2 | 0 | -2 | +1 |
| $h^4 f^{(4)}(x)$ | +1 | -4 | +6 | -4 | +1 |

Tab. 1: *Approximation centrée en $O(h^2)$.*

| | $f(x)$ | $f(x + h)$ | $f(x + 2h)$ | $f(x + 3h)$ | $f(x + 4h)$ |
|------------------|--------|------------|-------------|-------------|-------------|
| $h f'(x)$ | -1 | +1 | | | |
| $h^2 f''(x)$ | +1 | -2 | +1 | | |
| $h^3 f'''(x)$ | -1 | +3 | -3 | +1 | |
| $h^4 f^{(4)}(x)$ | +1 | -4 | +6 | -4 | +1 |

Tab. 2: *Approximation décentrée avant du 1^{er} ordre $O(h)$.*

| | $f(x - 4h)$ | $f(x - 3h)$ | $f(x - 2h)$ | $f(x - h)$ | $f(x)$ |
|------------------|-------------|-------------|-------------|------------|--------|
| $h f'(x)$ | | | | -1 | +1 |
| $h^2 f''(x)$ | | | +1 | -2 | +1 |
| $h^3 f'''(x)$ | | -1 | +3 | -3 | +1 |
| $h^4 f^{(4)}(x)$ | +1 | -4 | +6 | -4 | +1 |

Tab. 3: *Approximation décentrée arrière du 1^{er} ordre $O(h)$.*

| | $f(x)$ | $f(x + h)$ | $f(x + 2h)$ | $f(x + 3h)$ | $f(x + 4h)$ | $f(x + 5h)$ |
|------------------|--------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $2h f'(x)$ | -3 | +4 | -1 | | | |
| $h^2 f''(x)$ | +2 | -5 | +4 | -1 | | |
| $2h^3 f'''(x)$ | -5 | +18 | -24 | +14 | -3 | |
| $h^4 f^{(4)}(x)$ | +3 | -14 | +26 | -24 | +11 | -2 |

Tab. 4: *Approximation décentrée avant du 2nd ordre $O(h^2)$.*

| | $f(x - 5h)$ | $f(x - 4h)$ | $f(x - 3h)$ | $f(x - 2h)$ | $f(x - h)$ | $f(x)$ |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|--------|
| $2h f'(x)$ | | | | +1 | -4 | +3 |
| $h^2 f''(x)$ | | | -1 | +4 | -5 | +2 |
| $2h^3 f'''(x)$ | | +3 | -14 | +24 | -18 | +5 |
| $h^4 f^{(4)}(x)$ | -2 | +11 | -24 | +26 | -14 | +3 |

Tab. 5: *Approximation décentrée arrière du 2nd ordre $O(h^2)$.*