

Faculté des Sciences de l'Ingénieur**Département de Mécanique****Post-Graduation****Contrôle des connaissances de Mécanique des Fluides**

N.B : *Aucun document n'est autorisé. Durée : 3 heures.*

Les parties A et B sont indépendantes (4 feuilles).

Partie A :

On donne les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques :

- Suivant la direction radiale (r):

$$\frac{Du_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)$$

- Suivant la direction tangentielle (θ):

$$\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{u_r v_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right)$$

- Suivant la direction axiale (z):

$$\frac{Dw_z}{Dt} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_z$$

Avec:

- Composantes du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques: $\vec{q} = \vec{q}(u_r, v_\theta, w_z)$

- Dérivée particulaire d'une fonction f quelconque:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

- Laplacien d'une fonction f quelconque:

$$\nabla^2 f \equiv \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Equation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho w_z)}{\partial z} = 0$$

Soit une conduite cylindrique horizontale siège d'un écoulement permanent, incompressible, laminaire et symétrique par rapport à l'axe de la conduite.

- 1- Simplifier les équations ci-dessus dans ce cas d'écoulement en justifiant toutes vos réponses et montrer que la solution se ramène à la résolution d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_z}{dr} \right)$$

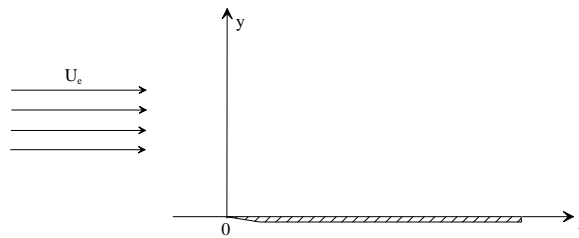
- 2- Résoudre cette équation en utilisant les conditions aux limites adéquates et déterminer l'expression du profil des vitesses.
- 3- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement ainsi que la vitesse débitante.
- 4- Déterminer la contrainte pariétale.
- 5- Déterminer la perte de charge linéaire sur une longueur L de la conduite.
- 6- Pour calculer le coefficient de pertes de charge linéaire λ on utilise souvent la loi générale de Colebrook-White définie par :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.71 D} \right]$$

- ◆ Que représente le rapport ε/D .
 - ◆ Expliquer comment peut-on résoudre une telle équation pour calculer λ .
- 7- On suppose maintenant que la conduite est à moitié pleine.
- Localiser la vitesse maximale dans l'écoulement et déterminer son expression.
 - Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement.

Partie B :

Considérons l'écoulement autour d'une plaque plane très mince .



1. Ecrire les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes pour un écoulement incompressible et instationnaire. Identifier les différents termes présents.
2. Simplifier ces équations pour obtenir celles de la couche limite laminaire bi-dimensionnelle d'un écoulement stationnaire en négligeant les forces de pesanteur et en prenant comme variables de référence :

U_e : vitesse de référence suivant X;

L : longueur caractéristique dans la direction X;

δ : longueur caractéristique dans la direction Y ;

$U_e \delta L$: vitesse de référence dans la direction Y;

ρU_e^2 : pression de référence;

L/U_e : temps de référence.

3. Montrer en expliquant que ces équations peuvent aussi se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

- ◆ Ecrire dans ce cas les conditions aux limites correspondantes.
4. On suppose maintenant que $U_e = C^{te}$ et que le gradient de pression axial est nul.
 - ◆ Ecrire les nouvelles équations qui régissent cet écoulement avec les conditions aux limites associées.
 - ◆ Montrer que la résolution de ce système revient à la résolution d'une seule équation aux dérivées partielles en ψ dont on écrira l'expression avec les conditions aux limites associées sur la fonction de courant ψ .
 - 5- Recherche des solutions auto-semblables pour les profils de vitesse de la forme :

$$\frac{u}{U_e} = \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

en posant : $\eta = \frac{y}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$

- Trouver une relation de type :

$$\psi(x, y) = K f(\eta)$$

où K est une variable à déterminer et

$$f'(\eta) = \Phi(\eta)$$

- Montrer que le problème revient à la résolution d'une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$a f''' + b f f'' = 0$$

avec les conditions aux limites : $f(0) = f'(0) = 0$ et $f'(\infty) = 1$

où a et b sont des constantes à déterminer.

- Donner l'expression du champ de vitesse $u(x, y)$ et $v(x, y)$ en fonction de $f(\eta)$.
5. En supposant que la plaque est percée de trous fins afin d'aspirer la couche limite. Quelles seront les nouvelles conditions aux limites sur f ?.
 6. On reprend maintenant les équations de la couche limite définies à la 3^{ème} question et on suppose un gradient de pression axial non nul.
- ◆ En intégrant directement ces équations (Von-Karman), montrer qu'on peut écrire l'expression :

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (\delta_1 + 2\delta_2) \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2}$$

où : δ_1 : épaisseur de déplacement définie par : $\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$

δ_2 : épaisseur de quantité de mouvement définie par : $\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$

τ_p : contrainte à la paroi.

- ◆ Quel est l'intérêt de cette solution directe par rapport à la résolution numérique du problème ?

Bonne chance