Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département de Mécanique

Post-Graduation

Contrôle des connaissances de Mécanique des Fluides

N.B : *Aucun document n'est autorisé. Durée : 3 heures.*

Les parties A et B sont indépendantes (4 feuilles).

Partie A :

On donne les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques :

- Suivant la direction radiale (r):

$$\frac{Du_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

- Suivant la direction tangentielle (θ):

$$\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{u_r v_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}\right)$$

- Suivant la direction axiale (z):

$$\frac{Dw_z}{Dt} = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w_z$$

Avec:

- Composantes du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques: $\vec{q} = \vec{q}(u_r, v_\theta, w_z)$
- Dérivée particulaire d'une fonction *f* quelconque:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + w_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

- Laplacien d'une fonction *f* quelconque:

$$\nabla^2 f \equiv \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Equation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0$$

On considère l'écoulement permanent d'un liquide incompressible homogène et visqueux dans une couronne comprise entre deux cylindres de révolution immobiles, infinis et coaxiaux de rayons respectifs R_1 pour le cylindre intérieur et R_2 pour le cylindre extérieur.
On supposant que l'écoulement est stationnaire et axi-symétrique :

1- Simplifier les équations ci-dessus dans ce cas d'écoulement en justifiant toutes vos réponses et écrire les conditions aux limites correspondantes:

2- La composante axiale du gradient de pression est maintenue constante et est notée P_z, trouver l'expression du profil des vitesses ainsi que le champ de pression (on prendra P_0 comme pression de référence).

3- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement et tracer le profil des vitesses.

4- Déterminer la vitesse débitante dans l'écoulement..

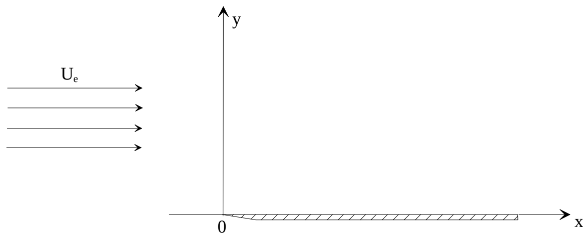
5- Déterminer la contrainte pariétale.

6- Déterminer la perte de charge linéaire sur une longueur *L* de la conduite.

7- Calculer le nombre de Reynolds.

Partie B :

Considérons l'écoulement autour d'une plaque plane très mince .



1. Ecrire les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes pour un écoulement incompressible et instationnaire. Identifier les différents termes présents.
2. Simplifier ces équations pour obtenir celles de la couche limite laminaire bi-dimensionnelle d'un écoulement stationnaire en négligeant les forces de pesanteur et en prenant comme variables de référence :

U_e : vitesse de référence suivant X;

L : longueur caractéristique dans la direction X;

δ : longueur caractéristique dans la direction Y ;

$U_e\, \delta/L$: vitesse de référence dans la direction Y;

$\rho\, U_e^2$: pression de référence;

L/U_e : temps de référence.

3. Montrer en expliquant que ces équations peuvent aussi se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = U_e \dfrac{d U_e}{d x} + \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

- Ecrire dans ce cas les conditions aux limites correspondantes.

4. On suppose maintenant que $U_e = C^{te}$ et que le gradient de pression axial est nul.

- Ecrire les nouvelles équations qui régissent cet écoulement avec les conditions aux limites associées.
- Montrer que la résolution de ce système revient à la résolution d'une seule équation aux dérivées partielles en ψ dont on écrira l'expression avec les conditions aux limites associées sur la fonction de courant ψ.

5- Recherche des solutions auto-semblables pour les profils de vitesse de la forme :

$$\frac{u}{U_e} = \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

en posant : $\eta = \frac{y}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{\nu\, x}{U_e}}$

- Trouver une relation de type :

$$\psi(x, y) = K\ f(\eta)$$

où K est une variable à déterminer et

$$f'(\eta) = \Phi(\eta)$$

- Montrer que le problème revient à la résolution d'une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$a\, f''' + b\, f.f'' = 0$$

avec les conditions aux limites : $f(0)=f'(0)=0$ et $f'(\infty)=1$

où a et b sont des constantes à déterminer.

- Donner l'expression du champ de vitesse $u(x,y)$ et $v(x,y)$ en fonction de $f(\eta)$.

5. En supposant que la plaque est percée de trous fins afin d'aspirer la couche limite. Quelles serons les nouvelles conditions aux limites sur f ?.
6. On reprend maintenant les équations de la couche limite définies à la 3ème question et on suppose un gradient de pression axial non nul.

♦ En intégrant directement ces équations (Von-Karman), montrer qu'on peut écrire l'expression :

$$\frac{d\,\delta_2}{d\,x} + (\delta_1 + 2\delta_2)\frac{1}{U_e}\frac{d\,U_e}{d\,x} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2}$$

où : δ_1 : épaisseur de déplacement définie par : $\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) d\,y$

δ_2 : épaisseur de quantité de mouvement définie par : $\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U_e}\left(1 - \frac{u}{U_e}\right) d\,y$

τ_p : contrainte à la paroi.

♦ Quel est l'intérêt de cette solution directe par rapport à la résolution numérique du problème ?

Bonne chance