Equation de diffusion (chaleur) 1D instationnaire

Dr. Laïd MESSAOUDI

Département de Mécanique

Université de Batna

===========================

LMD : Energétique

Matière : Outils Numériques

===========================

2011/2012

Détermination de la temperature $T(x, t)$ à travers l'épaisseur d'une plaque dont les extrémités sont maintenues à des températures constantes.

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t)$$

Conditions aux limites et initiale:

$$\frac{\partial}{\partial t} T(0, t) = \alpha,$$
$$T(1, t) = \beta,$$
$$T(x, 0) = \sigma$$

Forme matricielle - Conditions de Neumann à gauche (discrétisée par un schéma centré) - Schéma explicite:

```
> Restart : with(LinearAlgebra) :
>
> i_max := 9; n_max := 15;
```

$$i_{max} := 9$$
$$n_{max} := 15 \qquad \textbf{(1.1)}$$

```
> N := i_max - 1;
```

$$N := 8 \qquad \textbf{(1.2)}$$

```
> for i from 2 to i_max - 1 do T[i, 0] := σ end do;
```

$$T_{2, 0} := \sigma$$
$$T_{3, 0} := \sigma$$
$$T_{4, 0} := \sigma$$
$$T_{5, 0} := \sigma$$

$$T_{6,\,0} := \sigma$$
$$T_{7,\,0} := \sigma$$
$$T_{8,\,0} := \sigma \tag{1.3}$$

```
> for n from 0 to  n_max do T[i_max, n] := β  end do;
```

$$T_{9,\,0} := \beta$$
$$T_{9,\,1} := \beta$$
$$T_{9,\,2} := \beta$$
$$T_{9,\,3} := \beta$$
$$T_{9,\,4} := \beta$$
$$T_{9,\,5} := \beta$$
$$T_{9,\,6} := \beta$$
$$T_{9,\,7} := \beta$$
$$T_{9,\,8} := \beta$$
$$T_{9,\,9} := \beta$$
$$T_{9,\,10} := \beta$$
$$T_{9,\,11} := \beta$$
$$T_{9,\,12} := \beta$$
$$T_{9,\,13} := \beta$$
$$T_{9,\,14} := \beta$$
$$T_{9,\,15} := \beta \tag{1.4}$$

Boucle principale

```
> n := n_max :  k := 1 :
> T[0, n] := T[2, n] − 2·α·Δx :
   for i from 1 to i_max − 1 do
        Eq[k] :=  λ·T[i − 1, n] + (1 − 2·λ)·T[i, n] + λ·T[i + 1, n]
     = T[i, n + 1];
        k := k + 1 :
   end do:
> Eqs := [seq(Eq[k], k = 1 ..N)] :
> Tmps := [seq(T[i, n], i = 1 ..i_max − 1)] :
> A, b := GenerateMatrix( Eqs, Tmps);
```

(1.1.1)

$$A, b := \begin{bmatrix} 1-2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\lambda\alpha\Delta x + T_{1,16} \\ T_{2,16} \\ T_{3,16} \\ T_{4,16} \\ T_{5,16} \\ T_{6,16} \\ T_{7,16} \\ -\lambda\beta + T_{8,16} \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$