Equation de Laplace 2D

===========================

Dr. Laïd MESSAOUDI

Département de Mécanique

Université de Batna

===========================

LMD : Génie Energétique

Matière : Outils Numériques

===========================

2009/2010

Détermination de la temperature $T(x, y)$ à travers la surface d'une plaque rectangulaire (a x b) dont les extrémités sont soumises à des (C.L.) de Dirichlet.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T(x, y) = 0$$

Conditions aux limites (C.L):

$$T(x, 0) = T_1,$$
$$T(x, b) = T_2,$$
$$T(0, y) = T_3,$$
$$T(a, y) = T_4.$$

Solution discrétisée (formulation en 5 points):

```
> Restart :
> a := 1; b := 1; ndx := 3; ndy := 3
```

$$a := 1$$
$$b := 1$$
$$ndx := 3$$
$$ndy := 3 \quad \textbf{(1.1)}$$

```
>
> i_max := ndx + 1; j_max := ndy + 1;
```

$$i_{max} := 4$$
$$j_{max} := 4 \quad \textbf{(1.2)}$$

Nombre d'équations:

$> N := (i_{max} - 2) \cdot (j_{max} - 2)$

$$N := 4 \qquad \textbf{(1.3)}$$

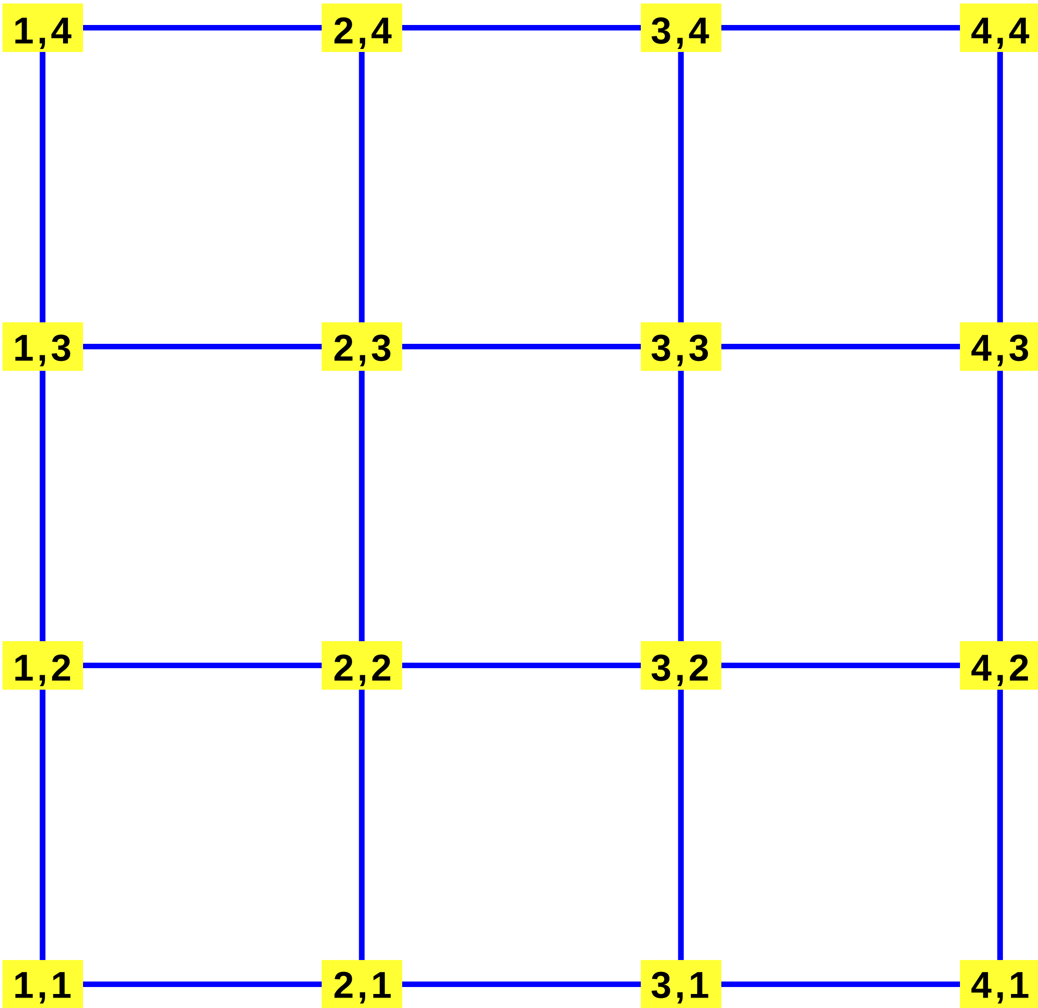
Maillage:

$>$ *with*(*GraphTheory*) : *with*(*SpecialGraphs*) :

$> G := GridGraph(i_{max}, j_{max})$

G := Graph 1: an undirected unweighted graph with 16 vertices and 24 edge(s) **(1.4)**

$>$ *DrawGraph*(*G*)



$> k := 1$

$$k := 1 \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Résolution pour les noeuds internes:

$>$ **for** j **from** 2 **to** $j_{max} - 1$ **do**

for i **from** 2 **to** $i_{max} - 1$ **do**

$Eq[k] := T[i+1, j] + T[i-1, j] + \beta^2 \cdot (T[i, j+1] + T[i, j-1]) - 2 \cdot (1 + \beta^2) \cdot T[i, j] = 0;$

$Temps[k] := T[i, j];$

$k := k + 1$

end do;

end do;

Ecriture du système d'équations:

```
> for k from 1 to N do Eq[k] end do;
```

$$T_{3,2}+T_{1,2}+\beta^2\left(T_{2,3}+T_{2,1}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,2}=0$$
$$T_{4,2}+T_{2,2}+\beta^2\left(T_{3,3}+T_{3,1}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,2}=0$$
$$T_{3,3}+T_{1,3}+\beta^2\left(T_{2,4}+T_{2,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,3}=0$$
$$T_{4,3}+T_{2,3}+\beta^2\left(T_{3,4}+T_{3,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,3}=0 \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

```
> Sys := [seq(Eq[i], i = 1 ..N)];
```

$$Sys := \left[T_{3,2}+T_{1,2}+\beta^2\left(T_{2,3}+T_{2,1}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,2}=0, T_{4,2}+T_{2,2}+\beta^2\left(T_{3,3}+T_{3,1}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,2}=0, T_{3,3}+T_{1,3}+\beta^2\left(T_{2,4}+T_{2,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,3}=0, T_{4,3}+T_{2,3}+\beta^2\left(T_{3,4}+T_{3,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,3}=0\right] \qquad \textbf{(1.1.3)}$$

```
> Var := [seq(Temps[i], i = 1 ..N)];
```

$$Var := \left[T_{2,2}, T_{3,2}, T_{2,3}, T_{3,3}\right] \qquad \textbf{(1.1.4)}$$

```
> with(LinearAlgebra) :
> A, b := GenerateMatrix(Sys, Var);
```

$$A, b := \begin{bmatrix} -2-2\beta^2 & 1 & \beta^2 & 0 \\ 1 & -2-2\beta^2 & 0 & \beta^2 \\ \beta^2 & 0 & -2-2\beta^2 & 1 \\ 0 & \beta^2 & 1 & -2-2\beta^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -T_{1,2}-\beta^2 T_{2,1} \\ -T_{4,2}-\beta^2 T_{3,1} \\ -T_{1,3}-\beta^2 T_{2,4} \\ -T_{4,3}-\beta^2 T_{3,4} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.5)}$$