Equation de Laplace 2D

============================

Dr. Laïd MESSAOUDI

Département de Mécanique

Université de Batna

============================

LMD : Génie Energétique

Matière : Outils Numériques

============================

2009/2010

Détermination de la temperature $T(x, y)$ à travers la surface d'une plaque rectangulaire (a x b) dont les extrémités sont soumises à des (C.L.) de Dirichlet.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T(x, y) = 0$$

Conditions aux limites (C.L):

$$T(x, 0) = T_1,$$
$$T(x, b) = T_2,$$
$$T(0, y) = T_3,$$
$$T(a, y) = T_4.$$

Solution discrétisée (formulation en 5 points):

```
> Restart :
> ndx := 4; ndy := 3
```

$$ndx := 4$$
$$ndy := 3 \qquad \textbf{(1.1)}$$

```
>
> i_max := ndx + 1; j_max := ndy + 1;
```

$$i_{max} := 5$$
$$j_{max} := 4 \qquad \textbf{(1.2)}$$

Nombre d'équations:

```
> N := (i_max - 2)·(j_max - 2)
```

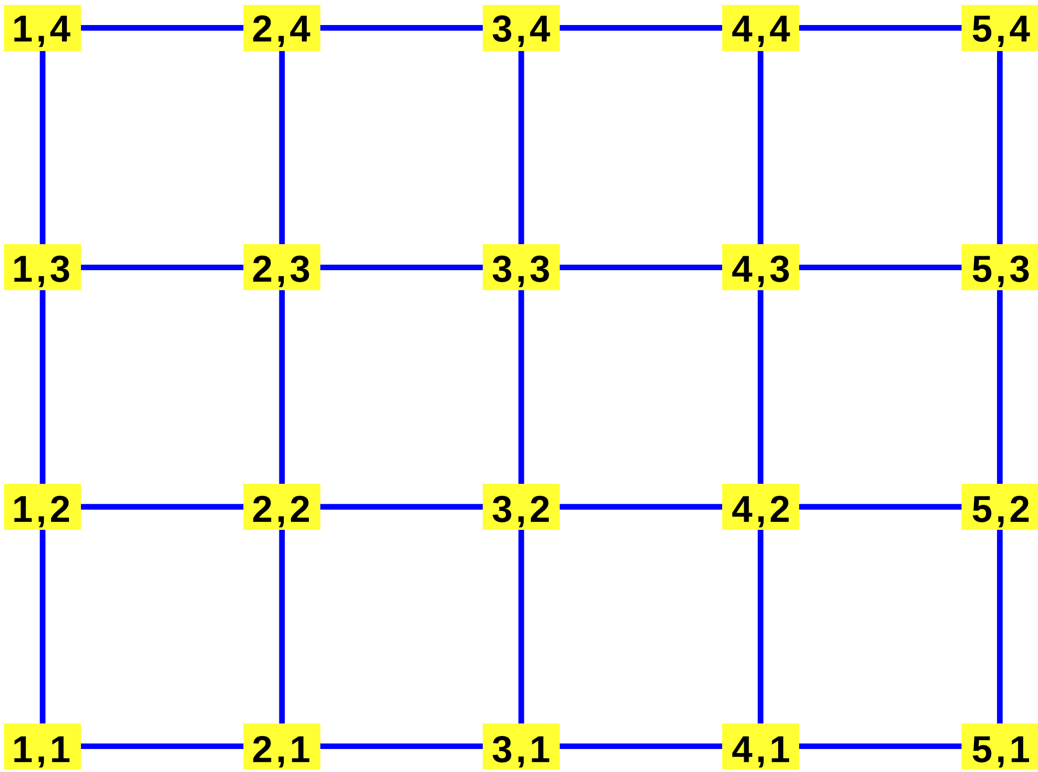
$$N := 6 \qquad \textbf{(1.3)}$$

Maillage:

```
> with(GraphTheory) : with(SpecialGraphs) :
> G := GridGraph( i_max, j_max )
```

G := Graph 1: an undirected unweighted graph with 20 vertices and 31 edge(s) **(1.4)**

```
> DrawGraph(G)
```




```
> k := 1
```

$k := 1$ **(1.1.1)**

Résolution pour les noeuds internes:

```
> for j from 2 to j_max − 1 do
    for i from 2 to i_max − 1 do
        Eq[k] := T[i + 1, j] + T[i − 1, j] + β^2·(T[i, j + 1] + T[i, j-1]) − 2·(1
      + β^2)·T[i, j] = 0;
        Temps[k] := T[i, j];
    k := k + 1
   end do;
  end do;
```

Ecriture du système d'équations:

```
> for k from 1 to N do Eq[k] end do;
```

$$T_{3,2} + T_{1,2} + \beta^2 \left(T_{2,3} + T_{2,1}\right) - 2\left(1 + \beta^2\right) T_{2,2} = 0$$

$$T_{4,2}+T_{2,2}+\beta^2\left(T_{3,3}+T_{3,1}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,2}=0$$
$$T_{5,2}+T_{3,2}+\beta^2\left(T_{4,3}+T_{4,1}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{4,2}=0$$
$$T_{3,3}+T_{1,3}+\beta^2\left(T_{2,4}+T_{2,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,3}=0$$
$$T_{4,3}+T_{2,3}+\beta^2\left(T_{3,4}+T_{3,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,3}=0$$
$$T_{5,3}+T_{3,3}+\beta^2\left(T_{4,4}+T_{4,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{4,3}=0 \quad \textbf{(1.1.2)}$$

```
> Sys := [seq(Eq[i], i = 1 ..N)];
```

$$Sys := \left[T_{3,2}+T_{1,2}+\beta^2\left(T_{2,3}+T_{2,1}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,2}=0, T_{4,2}+T_{2,2}+\beta^2\left(T_{3,3}+T_{3,1}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,2}=0, T_{5,2}+T_{3,2}+\beta^2\left(T_{4,3}+T_{4,1}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{4,2}=0, T_{3,3}+T_{1,3}+\beta^2\left(T_{2,4}+T_{2,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,3}=0, T_{4,3}+T_{2,3}+\beta^2\left(T_{3,4}+T_{3,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,3}=0, T_{5,3}+T_{3,3}+\beta^2\left(T_{4,4}+T_{4,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{4,3}=0\right] \quad \textbf{(1.1.3)}$$

```
> Var := [seq(Temps[i], i = 1 ..N)];
```

$$Var := \left[T_{2,2}, T_{3,2}, T_{4,2}, T_{2,3}, T_{3,3}, T_{4,3}\right] \quad \textbf{(1.1.4)}$$

```
> with(LinearAlgebra) :
> A, b := GenerateMatrix(Sys, Var);
```

$$A, b := \begin{bmatrix} -2-2\beta^2 & 1 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 \\ 1 & -2-2\beta^2 & 1 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 1 & -2-2\beta^2 & 0 & 0 & \beta^2 \\ \beta^2 & 0 & 0 & -2-2\beta^2 & 1 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 & 1 & -2-2\beta^2 & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 1 & -2-2\beta^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -T_{1,2}-\beta^2 T_{2,1} \\ -\beta^2 T_{3,1} \\ -T_{5,2}-\beta^2 T_{4,1} \\ -T_{1,3}-\beta^2 T_{2,4} \\ -\beta^2 T_{3,4} \\ -T_{5,3}-\beta^2 T_{4,4} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.5)}$$