Equation de Laplace 2D

==========

Dr. Laïd MESSAOUDI

Département de Mécanique

Université de Batna

==========

LMD : Génie Energétique

Matière : Outils Numériques

==========

2009/2010

Détermination de la temperature $T(x, y)$ à travers la surface d'une plaque rectangulaire (a x b) dont les extrémités sont soumises à des (C.L.) de Dirichlet.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T(x, y) = 0$$

Conditions aux limites (C.L):

$$T(x, 0) = T_1,$$
$$T(x, b) = T_2,$$
$$T(0, y) = T_3,$$
$$T(a, y) = T_4.$$

Solution discrétisée (formulation en 5 points):

```
> Restart:
> ndx := 3; ndy := 6
```

$$ndx := 3$$
$$ndy := 6 \quad \textbf{(1.1)}$$

```
>
> i_max := ndx + 1; j_max := ndy + 1;
```

$$i_{max} := 4$$
$$j_{max} := 7 \quad \textbf{(1.2)}$$

Nombre d'équations:

```
> N := (i_max - 2)·(j_max - 2)
```

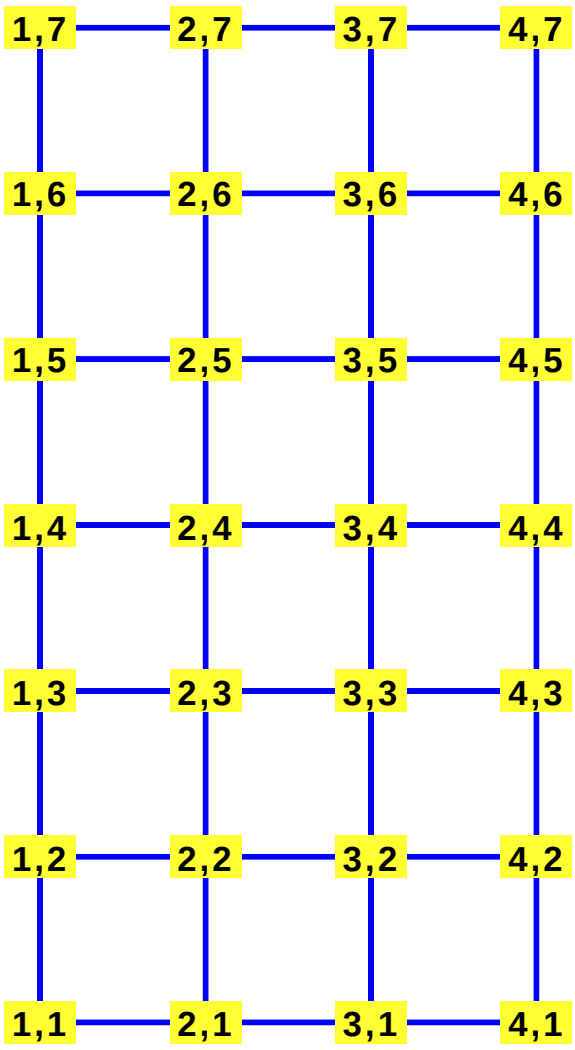
$$N := 10 \quad \textbf{(1.3)}$$

Maillage:

```
> with(GraphTheory) : with(SpecialGraphs) :
> G := GridGraph( i_max, j_max )
```

$$G := \text{Graph 1: an undirected unweighted graph with 28 vertices and 45 edge(s)} \qquad \textbf{(1.4)}$$

```
> DrawGraph(G)
```




```
> k := 1
```

$$k := 1 \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Résolution pour les noeuds internes:

```
> for j from 2 to j_max - 1 do
    for i from 2 to i_max - 1 do
      Eq[k] := T[i+1,j] + T[i-1,j] + β^2·(T[i,j+1] + T[i,j-1]) - 2·(1
    + β^2)·T[i,j] = 0;
      Temps[k] := T[i,j];
    k := k + 1
    end do;
  end do;
```

Ecriture du système d'équations:

```
> for k from 1 to N do Eq[k] end do;
```

$$T_{3,2} + T_{1,2} + \beta^2 \left(T_{2,3} + T_{2,1}\right) - 2\left(1 + \beta^2\right) T_{2,2} = 0$$

$$T_{4,2}+T_{2,2}+\beta^2\left(T_{3,3}+T_{3,1}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,2}=0$$
$$T_{3,3}+T_{1,3}+\beta^2\left(T_{2,4}+T_{2,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,3}=0$$
$$T_{4,3}+T_{2,3}+\beta^2\left(T_{3,4}+T_{3,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,3}=0$$
$$T_{3,4}+T_{1,4}+\beta^2\left(T_{2,5}+T_{2,3}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,4}=0$$
$$T_{4,4}+T_{2,4}+\beta^2\left(T_{3,5}+T_{3,3}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,4}=0$$
$$T_{3,5}+T_{1,5}+\beta^2\left(T_{2,6}+T_{2,4}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,5}=0$$
$$T_{4,5}+T_{2,5}+\beta^2\left(T_{3,6}+T_{3,4}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,5}=0$$
$$T_{3,6}+T_{1,6}+\beta^2\left(T_{2,7}+T_{2,5}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,6}=0$$
$$T_{4,6}+T_{2,6}+\beta^2\left(T_{3,7}+T_{3,5}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,6}=0 \quad \textbf{(1.1.2)}$$

```
> Sys := [seq(Eq[i], i = 1 ..N)];
```

$$Sys := \left[T_{3,2}+T_{1,2}+\beta^2\left(T_{2,3}+T_{2,1}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,2}=0,\ T_{4,2}+T_{2,2}+\beta^2\left(T_{3,3}+T_{3,1}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,2}=0,\ T_{3,3}+T_{1,3}+\beta^2\left(T_{2,4}+T_{2,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,3}=0,\ T_{4,3}+T_{2,3}+\beta^2\left(T_{3,4}+T_{3,2}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,3}=0,\ T_{3,4}+T_{1,4}+\beta^2\left(T_{2,5}+T_{2,3}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,4}=0,\ T_{4,4}+T_{2,4}+\beta^2\left(T_{3,5}+T_{3,3}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,4}=0,\ T_{3,5}+T_{1,5}+\beta^2\left(T_{2,6}+T_{2,4}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,5}=0,\ T_{4,5}+T_{2,5}+\beta^2\left(T_{3,6}+T_{3,4}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,5}=0,\ T_{3,6}+T_{1,6}+\beta^2\left(T_{2,7}+T_{2,5}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{2,6}=0,\ T_{4,6}+T_{2,6}+\beta^2\left(T_{3,7}+T_{3,5}\right)-2\left(1+\beta^2\right)T_{3,6}=0\right] \quad \textbf{(1.1.3)}$$

```
> Var := [seq(Temps[i], i = 1 ..N)];
```

$$Var := \left[T_{2,2}, T_{3,2}, T_{2,3}, T_{3,3}, T_{2,4}, T_{3,4}, T_{2,5}, T_{3,5}, T_{2,6}, T_{3,6}\right] \quad \textbf{(1.1.4)}$$

```
> with(LinearAlgebra) :
> A, b := GenerateMatrix(Sys, Var);
```

$$A, b := \left[\left[-2-2\beta^2, 1, \beta^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],\right.$$
$$\left[1, -2-2\beta^2, 0, \beta^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$
$$\left[\beta^2, 0, -2-2\beta^2, 1, \beta^2, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$
$$\left[0, \beta^2, 1, -2-2\beta^2, 0, \beta^2, 0, 0, 0, 0\right],$$
$$\left[0, 0, \beta^2, 0, -2-2\beta^2, 1, \beta^2, 0, 0, 0\right],$$
$$\left[0, 0, 0, \beta^2, 1, -2-2\beta^2, 0, \beta^2, 0, 0\right],$$
$$\left[0, 0, 0, 0, \beta^2, 0, -2-2\beta^2, 1, \beta^2, 0\right],$$
$$\left[0, 0, 0, 0, 0, \beta^2, 1, -2-2\beta^2, 0, \beta^2\right],$$
$$\left.\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, \beta^2, 0, -2-2\beta^2, 1\right], \right. \quad \textbf{(1.1.5)}$$

$$\left[\left[\left[\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \beta^2, 1, -2-2\beta^2\right]\right], \begin{bmatrix} -T_{1,2}-\beta^2 T_{2,1} \\ -T_{4,2}-\beta^2 T_{3,1} \\ -T_{1,3} \\ -T_{4,3} \\ -T_{1,4} \\ -T_{4,4} \\ -T_{1,5} \\ -T_{4,5} \\ -T_{1,6}-\beta^2 T_{2,7} \\ -T_{4,6}-\beta^2 T_{3,7} \end{bmatrix}\right]\right]$$