Cinématique des fluides

Dr. Laïd MESSAOUDI

Département de Mécanique
Université MB Batna 2

2

L'essentiel du cours de MDF, 2019

Définitions

2

- Un fluide *idéal* ou *parfait* si ses couches se déplacent les une par rapport aux autres sans aucun frottement, les forces visqueuses étant négligeables ($\mu = 0$).
- Description *Lagrangienne*: consiste à suivre la particule de fluide au cours de son mouvement.
- Description *Eulérienne*: consiste observer les particules de fluide à travers un volume de contrôle *(v.c)*.
- Si en chaque point le champ de vitesses ainsi que la pression sont indépendant du temps, l'écoulement est appelé *permanent* (ou *stationnaire*). S'ils varient avec le temps, l'écoulement est dit *non permanent* (ou *instationnaire*).

2

Ligne/tube de courant

- A l'instant *t*, on peut définir en chaque point de l'espace le vecteur vitesse ***q*** de la particule fluide. L'ensemble de ces vecteurs constitue un *champ de vitesses*.

- On appelle *ligne de courant*, une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse ***q****(u,v,w)* en ce point.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

- Toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe fermée constituent un *tube de courant.*

Fonction de courant

2

- *Filet de courant* → tube de courant de section très faible.

- Deux lignes de courant ne peuvent pas avoir un point d'intersection sauf au point d'arrêt (***q = 0***).

- La *fonction de courant* fournit une mesure du débit-masse dans l'écoulement. Elle représente les lignes de courant sous la forme: $\psi(x,y) = C^{te}$.

$$\Rightarrow \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad et \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

2

Dérivée particulaire

- Pour connaître le taux de variation de la quantité de mouvement d'une particule, on doit la suivre dans son mouvement pour tenir compte de toute variation spatiale et temporelle.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{q}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Taux de variation local

Taux de variation convectif

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{q}\cdot\vec{\nabla} f$$

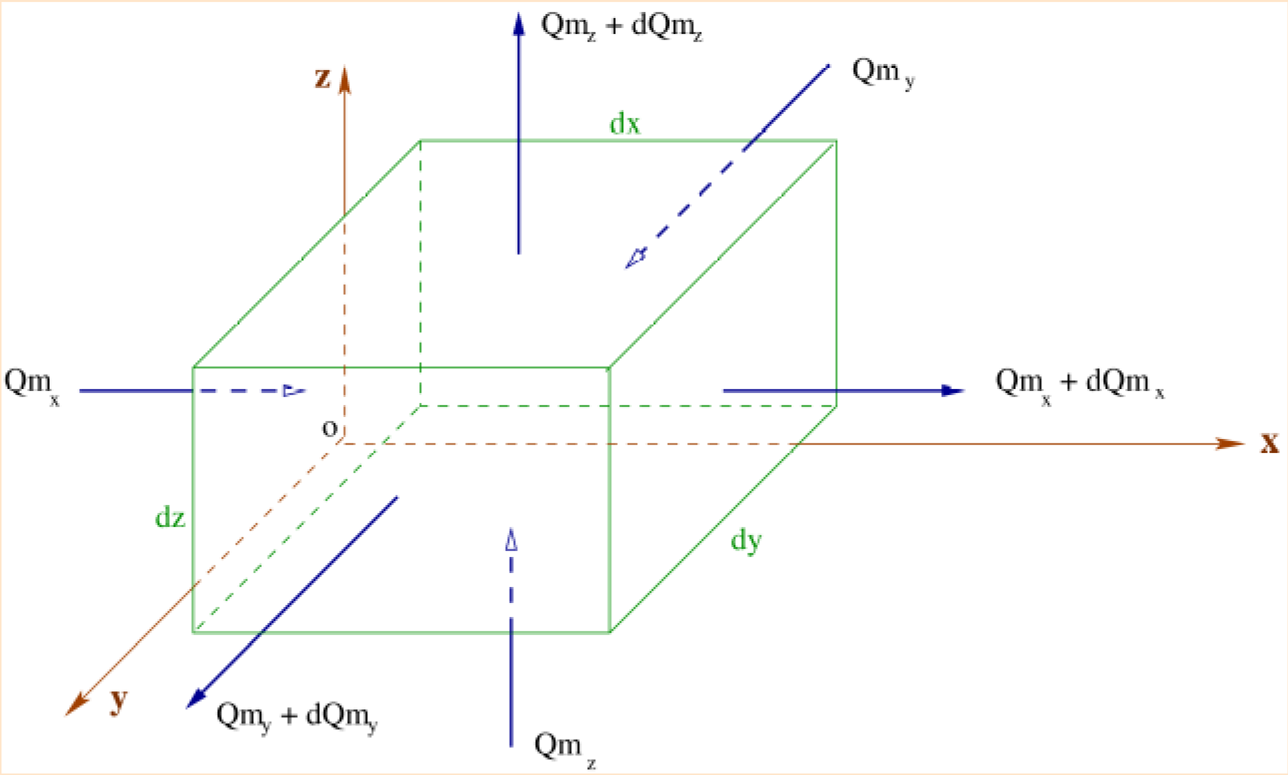
$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{q}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}$$

Equation de conservation de la masse

2

Forme différentielle :

Diminution de masse contenue dans dV = masse ayant traversée la surface extérieure de l'élément.



$$Q_m = \frac{dm}{dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz$$

$$\frac{dm}{dt} = \left(Q_m\big|_{x+dx} - Q_m\big|_{x} \right) + \left(Q_m\big|_{y+dy} - Q_m\big|_{y} \right) + \left(Q_m\big|_{z+dz} - Q_m\big|_{z} \right)$$

2 Equation de conservation de la masse

ox

$$Q_m\big|_x = \rho u \, dy \, dz$$

$$Q_m\big|_{x+dx} = Q_m\big|_x + \frac{\partial \, Q_m\big|_x}{\partial \, x} dx = Q_m\big|_x + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \, x} dx \, dy \, dz$$

oy

$$Q_m\big|_y = \rho v \, dx \, dz$$

$$Q_m\big|_{y+dy} = Q_m\big|_y + \frac{\partial \, Q_m\big|_y}{\partial \, y} dy = Q_m\big|_y + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \, y} dx \, dy \, dz$$

oz

$$Q_m\big|_z = \rho w \, dx \, dy$$

$$Q_m\big|_{z+dz} = Q_m\big|_z + \frac{\partial \, Q_m\big|_z}{\partial \, z} dz = Q_m\big|_z + \frac{\partial(\rho w)}{\partial \, z} dx \, dy \, dz$$

2

Equation de conservation de la masse

coordonnées cartésienne

$\vec{q}(u, v, w)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{q}) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = 0$$

coordonnées cylindriques

$\vec{q}(u_r, v_\theta, w_z)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0$$

2

Equation de conservation de la masse

Ecoulement permanent

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

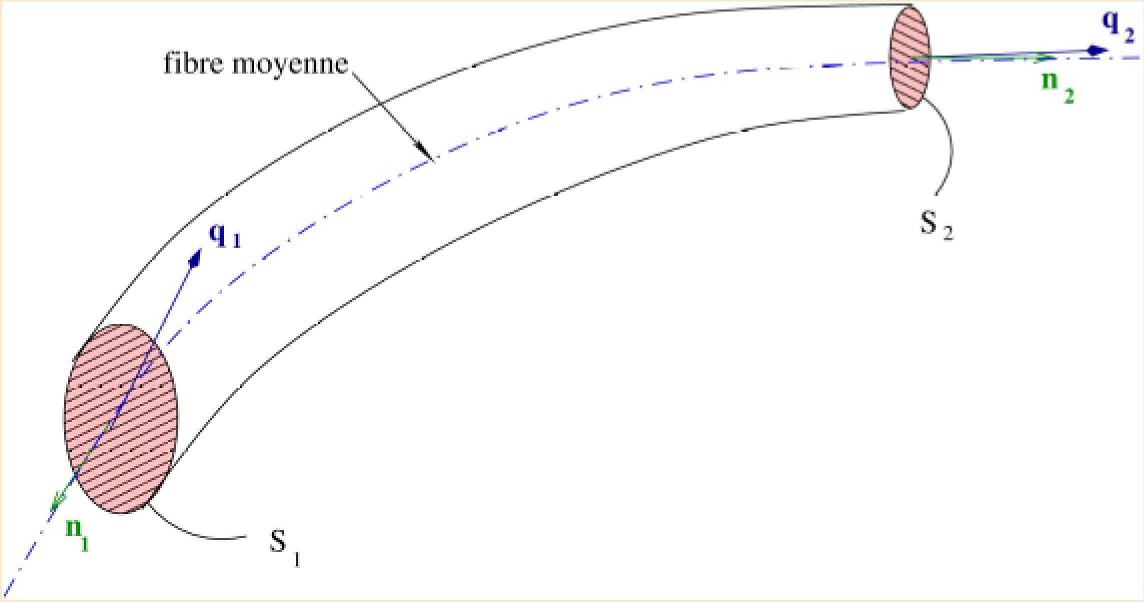
Ecoulement incompressible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

2 Equation de conservation de la masse

Forme intégrale:

Cas particulier :



écoulement stationnaire d'un fluide compressible dans une conduite de section *S* variable le long de sa fibre moyenne.

Si la vitesse et la densité sont *uniformes* dans les sections S_1 et S_2 :

$$Q_{m2} - Q_{m1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 q_1 S_1 = \rho_2 q_2 S_2$$

Fluide incompressible

$$q_1 S_1 = q_2 S_2 \quad \Leftrightarrow \quad Q_{v1} = Q_{v2}$$

Débit volumique

q_1 et q_2 → *vitesses moyennes*

2 Equation de conservation de la masse

<u>Exemple</u>: *Un piston de pompe à eau de diamètre D=60 cm se déplace à la vitesse q_1 = 1.5 m/s. Quelle est la vitesse de l'eau dans la conduite de refoulement de la pompe dont le diamètre est d =40 cm ?*

Débit déplacé par le piston = celui qui passe dans la conduite de refoulement :

$$Q_{v1} = Q_{v2} \Leftrightarrow q_1 S_1 = q_2 S_2 \Rightarrow q_2 = q_1 \frac{S_1}{S_2} = q_1 \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

$$q_2 = 1{,}5 \left(\frac{60}{40}\right)^2 = 3{,}375\, m/s$$

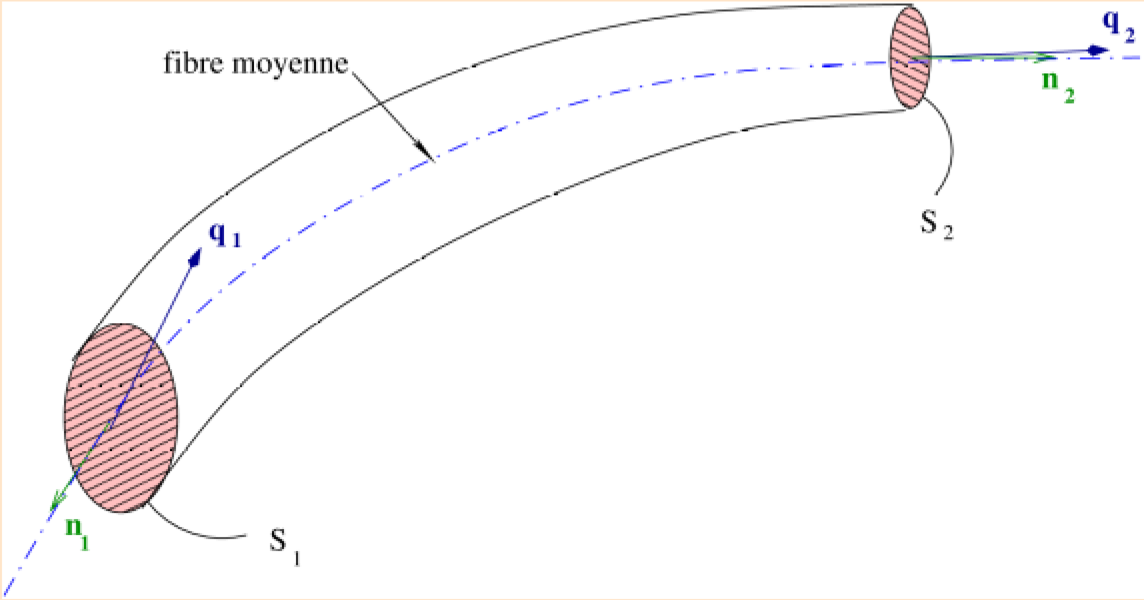
2 Equation de conservation de la masse

Forme intégrale:

Cas général:

Puisque le volume de contrôle ne dépend pas de *t* :

$$\int_v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho \vec{q})\right] dv = 0$$



Théorème de Gauss-Ostrogradski : $\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_s \rho(\vec{q}\cdot\vec{n})\, ds = 0$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\, dv}_{(1)} + \underbrace{\int_{sc} \rho\, (\vec{q}\cdot\vec{n})\, ds}_{(2)} = 0$$

(1) : Taux de variation local de masse à travers *(vc)*.

(2) : Débit masse (ou *flux*) à travers *(sc)*.

2 Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \, dv + \int_{sc} \rho \, (\vec{q}\cdot\vec{n})\, ds = 0$$

Ecoulement permanent

$$\int_{sc} \rho \, (\vec{q}\cdot\vec{n})\, ds = 0$$

Variables (ρ , q) uniformes

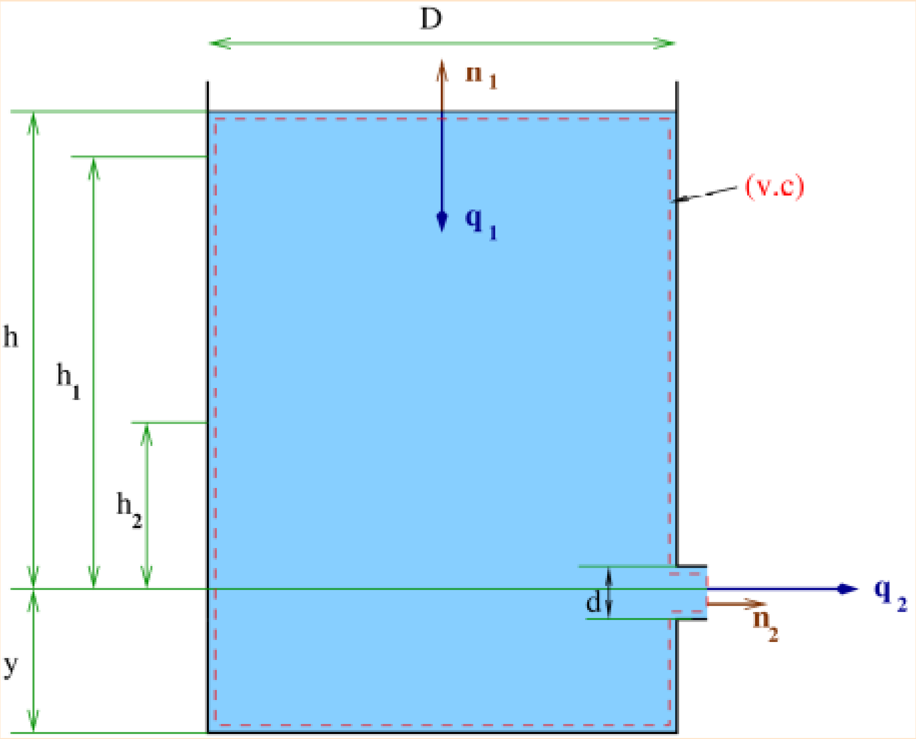
$$\frac{dv}{dt} + qS = 0$$

Débit Massique net

$$Q_m = \rho q S$$

2 Equation de conservation de la masse

Exemple: Un jet d'eau de diamètre d sort d'un grand réservoir de diamètre D. Si on suppose que la vitesse d'écoulement dans le jet est donnée par $q=(2gh)^{1/2}$. Trouver le temps nécessaire pour que la surface du réservoir s'abaisse de la hauteur h_1 à h_2. La masse volumique et la vitesse sont supposées uniformes à travers la section de sortie.



Débit masse net à travers *(sc)*:

$$Q_m = \int_{s_1} \rho\,(\vec{q}_{1r}\cdot\vec{n}_1)\,ds + \int_{s_2} \rho\,(\vec{q}_2\cdot\vec{n}_2)\,ds = \rho q_2 S_2 = \rho\sqrt{2gh}\,S_2$$

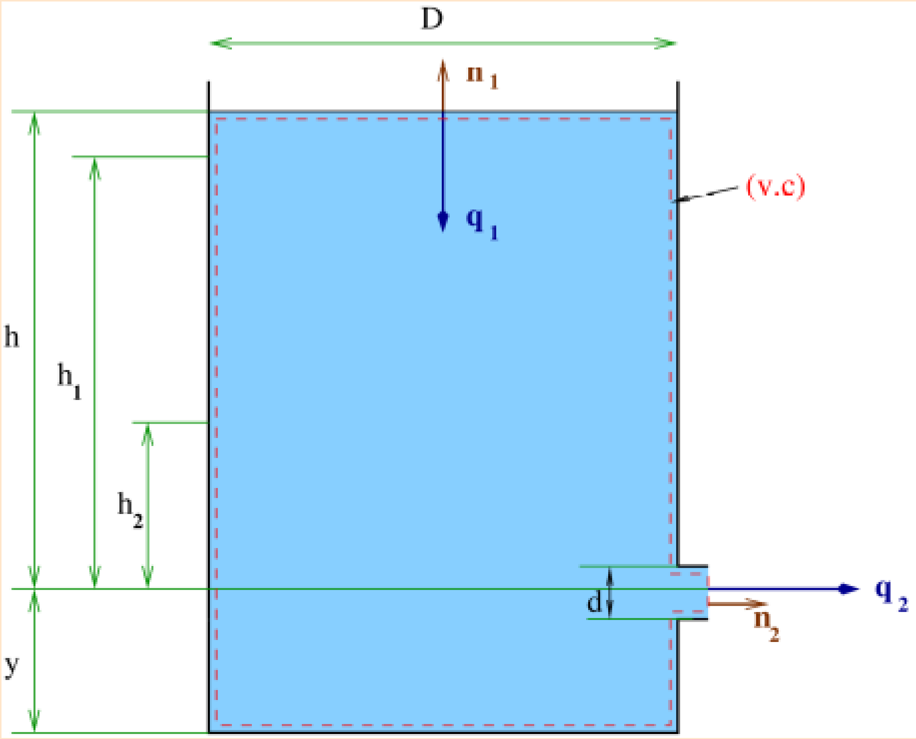
$$\frac{dv}{dt} + \sqrt{2gh}\,S_2 = 0 \Leftrightarrow S_1\frac{dh}{dt} + \sqrt{2gh}\,S_2 = 0$$

2 Equation de conservation de la masse

$$\Rightarrow \quad dt = -\frac{S_1}{\sqrt{2g}\,S_2}\,\frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^t dt = -\frac{S_1}{\sqrt{2g}\,S_2}\int_{h_1}^{h_2}\frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\frac{D}{d}\right)^2\left(\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2}\right)$$



Réservoir percé en bas : $h_1 = h$, $h_2 = 0$

$$t_{vidange} = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\frac{D}{d}\right)^2\sqrt{h}$$

2 Equation de quantité de mouvement

- Une *force massique* est une force dont la valeur est proportionnelle à la masse de l'élément de fluide sur lequel elle agit (force de gravité, magnétique, ...etc.).

- Une *force de surface* est une force qui agit sur la surface de l'élément de fluide et elle est exercée soit par les autres éléments adjacents soit par un solide en contact avec le fluide (force de pression, contrainte de cisaillement, ...etc.).

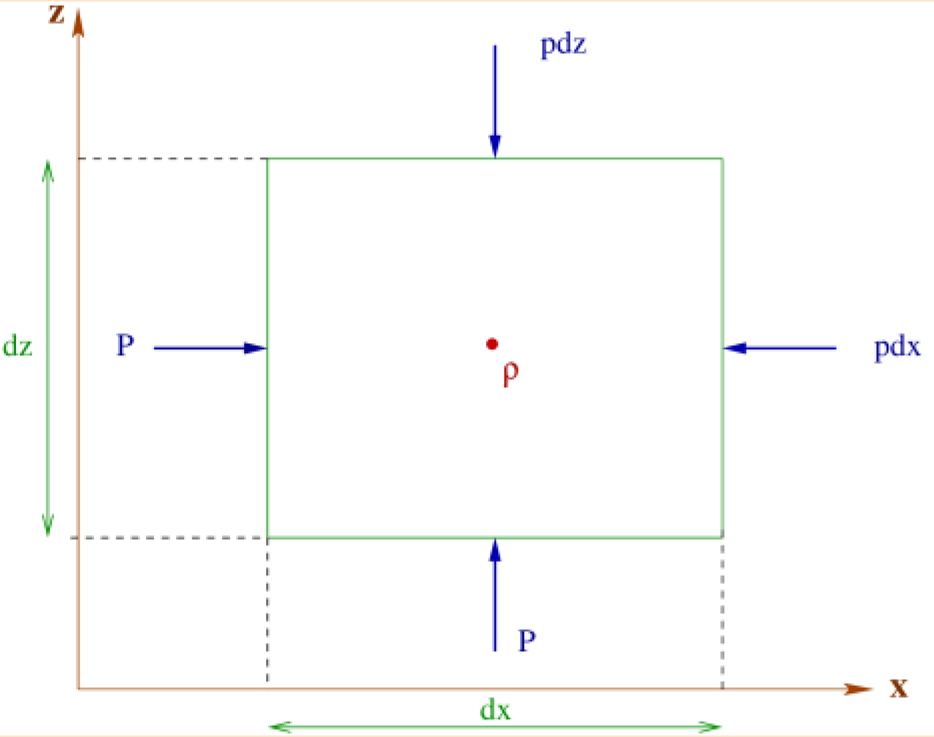
- *Seconde loi de Newton*: Le taux de variation de la quantité de mouvement par rapport au temps d'une particule de fluide est égale à la résultante de toutes les forces qui exercent une influence ou une action sur cette particule.

2 Equation de quantité de mouvement

Forme différentielle :

ox

$$\sum F_x = m\,\gamma_x = \rho\,dv\,\frac{Du}{Dt}$$



$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\sum F_x = P\,dy\,dz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}dx\right)dy\,dz + \rho\,dx\,dy\,dz\,f_x$$

Composante forces volumiques /kg

En égalisant et simplifiant :

2

Equation de quantité de mouvement

ox
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

oy
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}$$

oz
$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

Equations d'Euler

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P$$

Forces d'inertie

Forces de gravité

Forces de pression

2 Equation de quantité de mouvement

Forme intégrale :

Quantité de mouvement: $$I_v = \int_{vc} \rho \; \vec{q}\, dv$$

D'après la loi de Newton: $$\frac{D I_v}{Dt} = \sum F_x$$

Gauss-Ostrogradski

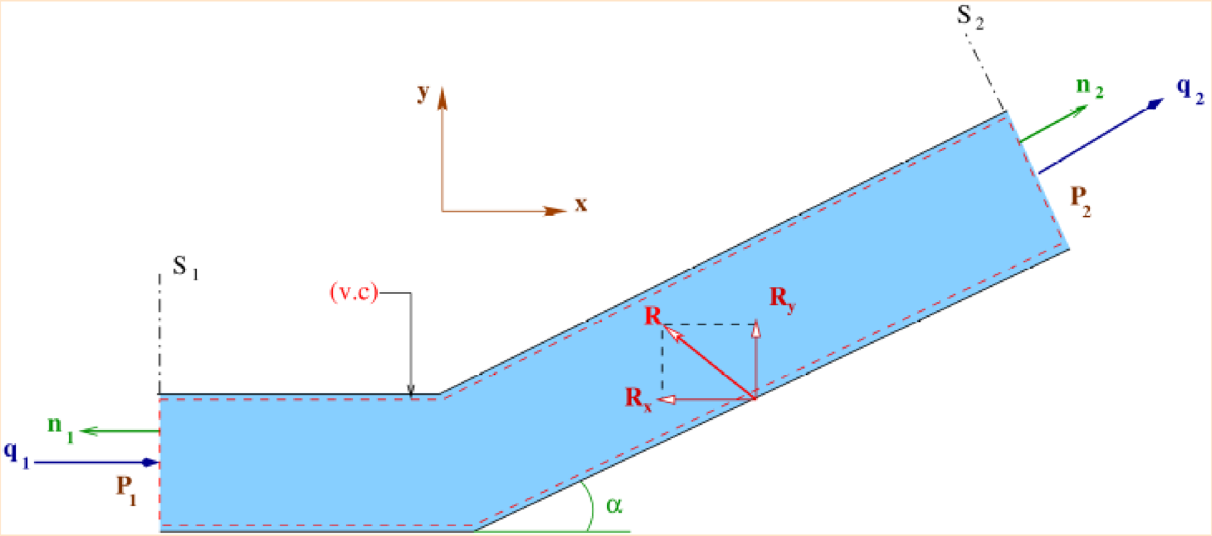
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \vec{q}\, dv + \int_{sc} \rho \vec{q}(\vec{q}\cdot\vec{n})\, ds = \int_{vc} \rho \vec{f}\, dv - \int_{sc} P\cdot\vec{n}\, ds + \vec{R}$$

force de réaction exercée par la paroi solide sur le fluide.

2 Equation de quantité de mouvement

Exemple: Considérons l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique ρ dans une conduite coudée d'un angle α . On cherche la force exercée par le fluide sur la conduite entre les sections S_1 et S_2. On suppose que les variables d'écoulement sont uniformes dans les deux sections et on peut négliger l'effet de la pesanteur.

$$\boxed{\vec{F} = \vec{R}}$$



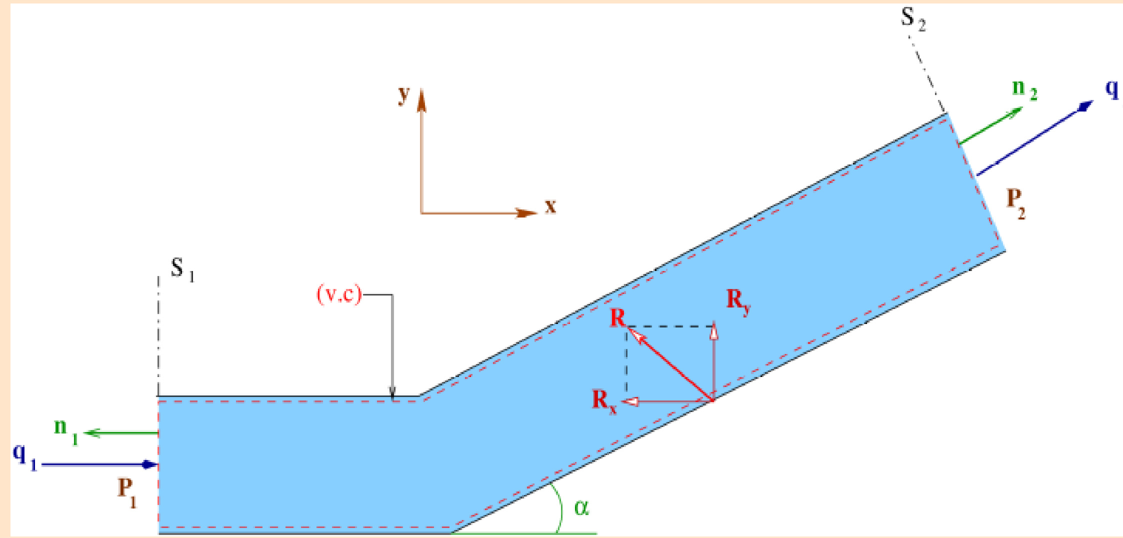
$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\vec{q}\,dv} + \int_{sc} \rho\vec{q}(\vec{q}\cdot\vec{n})\,ds = \cancel{\int_{vc} \rho\vec{f}\,dv} - \int_{sc} P\cdot\vec{n}\,ds + \vec{R}$$

2

Equation de quantité de mouvement

$\vec{q}_1\begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{n}_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{q}_2\begin{pmatrix} q_2 \cos\alpha \\ q_2 \sin\alpha \end{pmatrix}$ $\vec{n}_2\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$



Décomposition suivant x:

$$\int_{s_1} \rho \overrightarrow{q_{1x}} (\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1) ds + \int_{s_2} \rho \overrightarrow{q_{2x}} (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) ds = -\int_{s_1} P_1 \cdot \overrightarrow{n_{1x}} ds - \int_{s_2} P_2 \cdot \overrightarrow{n_{2x}} ds + \vec{R}_x$$

Projection suivant x:

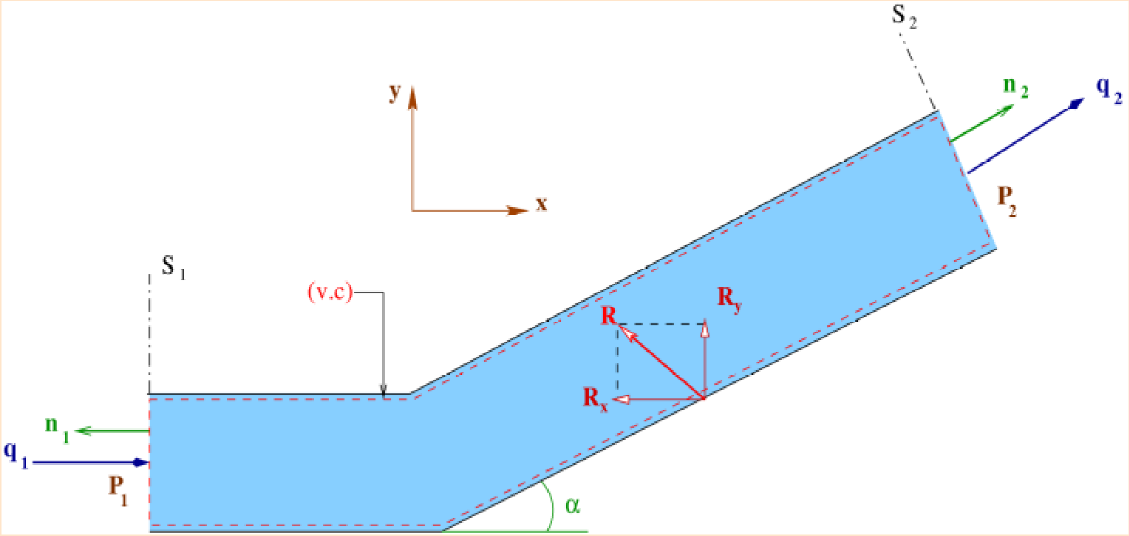
$$\int_{s_1} \rho q_1 (\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1) ds + \int_{s_2} \rho q_2 \cos\alpha (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) ds = \int_{s_1} P_1 ds - \int_{s_2} P_2 \cos\alpha ds - R_x$$

Calcul : $-\rho q_1^2 S_1 + \rho q_2^2 \cos\alpha S_2 = P_1 S_1 - P_2 \cos\alpha S_2 + F_x$

2 Equation de quantité de mouvement

$\vec{q}_1\begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{n}_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{q}_2\begin{pmatrix} q_2\cos\alpha \\ q_2\sin\alpha \end{pmatrix}$ $\vec{n}_2\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$



Décomposition suivant y:

$$\int_{S_1} \rho \overrightarrow{q_{1y}} (\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1) ds + \int_{S_2} \rho \overrightarrow{q_{2y}} (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) ds = -\int_{S_1} P_1 \cdot \overrightarrow{n_{1y}} ds - \int_{S_2} P_2 \cdot \overrightarrow{n_{2y}} ds + \vec{R}_y$$

Projection suivant y:

$$\int_{S_2} \rho q_2 \sin\alpha (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) ds = -\int_{S_2} P_2 \sin\alpha \, ds + R_y$$

Calcul : $\rho q_2^2 \sin\alpha S_2 = -P_2 \sin\alpha S_2 - F_y$

2

Equation de quantité de mouvement

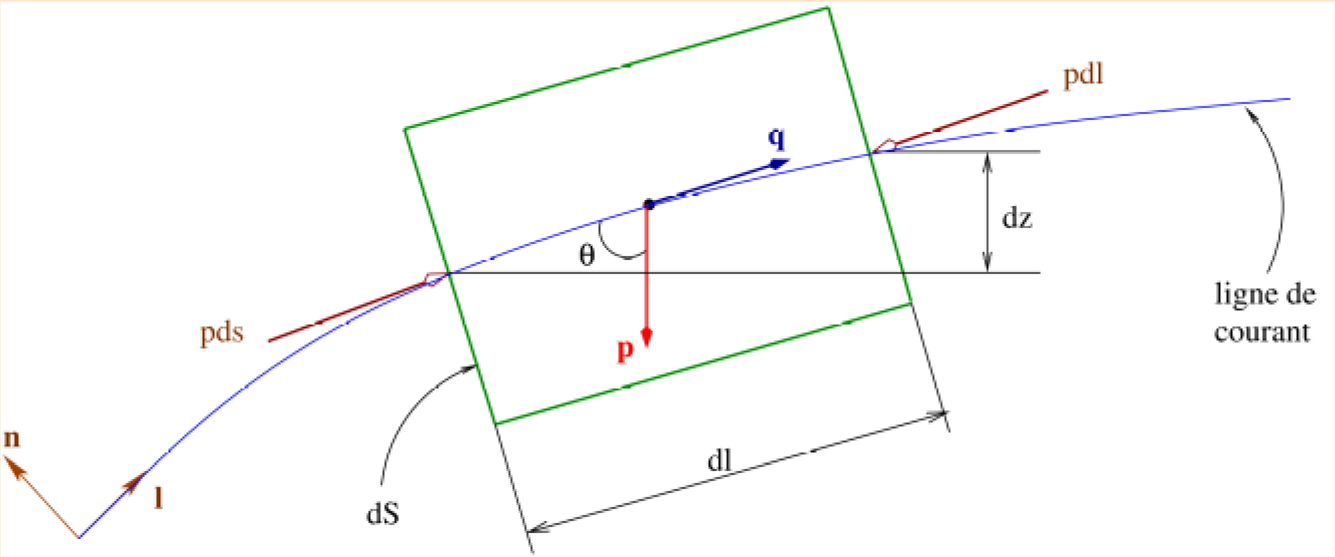
$$F_x = S_2 \cos\alpha \left(P_2 + \rho q_2^2\right) - S_1 \left(P_1 + \rho q_1^2\right)$$

$$F_y = S_2 \sin\alpha \left(P_2 + \rho q_2^2\right)$$

Résultante des forces appliquée sur le coude: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

Equation de Bernoulli

Soit une particule de fluide qui occupe un volume infinitésimal et fixe à l'instant *t* dans un écoulement stationnaire et idéal. Cette particule suit une ligne de courant durant son mouvement.



Appliquons la 2ème loi de Newton dans la direction de la ligne de courant :

$$\sum F = m\gamma = \rho\, dv \frac{Dq}{Dt} = \rho\, dl\, ds \frac{Dq}{Dt}$$

$$\sum F = P\, ds - \left(P + \frac{\partial P}{\partial l} dl\right) ds - m\, g \cos\theta = -\frac{\partial P}{\partial l} dl\, ds - \rho g\, dl\, ds \cos\theta$$

2

Equation de Bernoulli

$$dz = dl\cos\theta = \frac{\partial z}{\partial l}dl + \cancel{\frac{\partial z}{\partial n}dn} \longrightarrow \cos\theta = \frac{\partial z}{\partial l}$$

$$\rho\frac{Dq}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial l} - \rho g\cos\theta = -\frac{\partial P}{\partial l} - \rho g\frac{\partial z}{\partial l}$$

$$\frac{Dq}{Dt} = \cancel{\frac{\partial q}{\partial t}} + \vec{q}\cdot\overrightarrow{\nabla} q = q\vec{l}\cdot\left(\frac{\partial q}{\partial l}\vec{l} + \frac{\partial q}{\partial n}\vec{n}\right) = q\frac{\partial q}{\partial l}$$

$$\Rightarrow \rho q\frac{\partial q}{\partial l} = -\frac{\partial P}{\partial l} - \rho g\frac{\partial z}{\partial l} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}\rho q^2 + P + \rho g z\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P + \frac{1}{2}\rho q^2 + \rho g z = C^{te}}$$

2

Equation de Bernoulli

Conditions d'application:

- Fluide idéal.
- Ecoulement permanent.
- Fluide incompressible.
- Suivant la même ligne de courant.

Interprétation:

$$\underbrace{(P_2 - P_1)}_{\text{Variation de l'énergie potentielle due à la variation de pression}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho(q_2^2 - q_1^2)}_{\text{Variation de l'énergie cinétique due à la variation de vitesse}} + \underbrace{\rho g(z_2 - z_1)}_{\text{Variation de l'énergie potentielle due à la variation d'altitude}} = 0$$

Variation de l'énergie **potentielle** due à la variation de **pression**

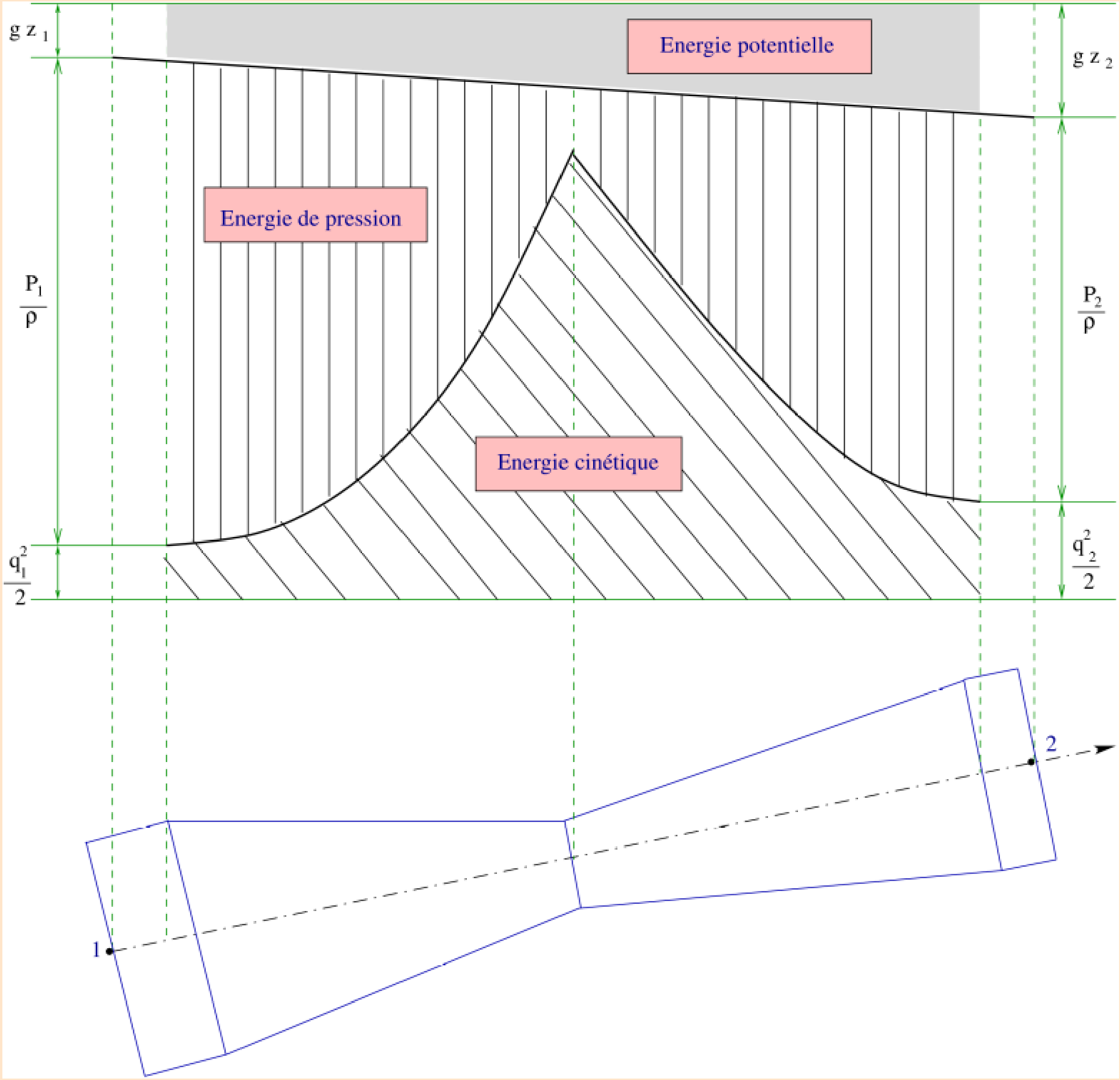
Variation de l'énergie **cinétique** due à la variation de **vitesse**

Variation de l'énergie **potentielle** due à la variation d'**altitude**

Equation de Bernoulli

Interprétation:

Conservation de l'énergie mécanique totale le long d'une ligne de courant



2

Equation de Bernoulli

Formes:

$$\left(P_2 - P_1\right) + \frac{1}{2}\rho\left(q_2^2 - q_1^2\right) + \rho g\left(z_2 - z_1\right) = 0$$

[*N/m²*]

Pression

$$\frac{\left(P_2 - P_1\right)}{\rho g} + \frac{1}{2g}\left(q_2^2 - q_1^2\right) + \left(z_2 - z_1\right) = 0$$

[*m*]

Hauteur

$$\frac{\left(P_2 - P_1\right)}{\rho} + \frac{1}{2}\left(q_2^2 - q_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right) = 0$$

[J/*kg*]

Travail

2

Equation de Bernoulli

Exemple: Soit à transporter de l'eau dans une conduite d'un point (1) à un point (2) avec les données suivantes: ρ = 1000 Kg/m³ , g = 10 m/s² , P_1 = 15 N/cm² , q_1 = 8 m/s , z_1 = 12 m , P_2 = 10 N/cm² , z_2 = 2 m.

- *Quelle est la vitesse au point (2) ?*
- *Si le débit transporté est de 6 dm³/s; calculer les diamètres de la conduite aux points (1) et (2).*

$$\frac{(P_2 - P_1)}{\rho} + \frac{1}{2}(q_2^2 - q_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0$$

$$-50 + \frac{1}{2}(q_2^2 - 64) - 10 = 0 \longrightarrow \boxed{q_2 = 19\, m/s}$$

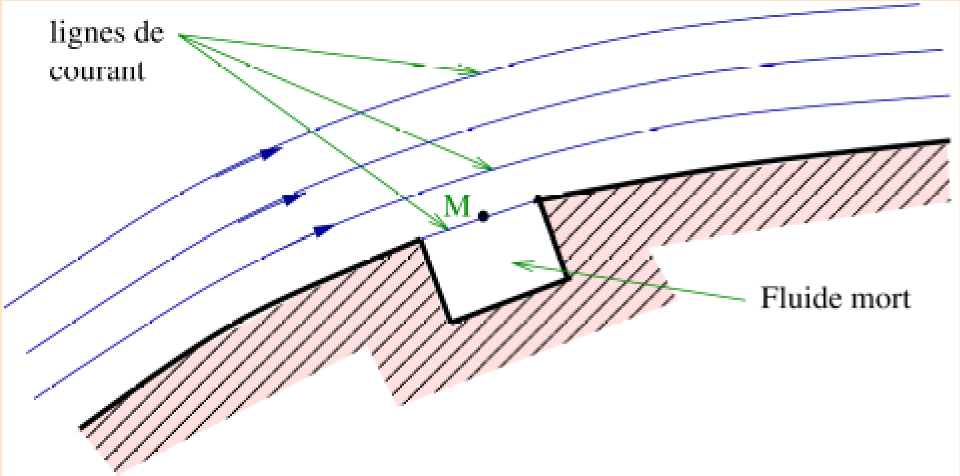
$$Q_v = q_1 S_1 = q_2 S_2$$

$$\longrightarrow D_1 = \sqrt{\frac{4\,Q_v}{\pi q_1}} = \boxed{31\, mm} \quad D_2 = \sqrt{\frac{4\,Q_v}{\pi q_2}} = \boxed{20\, mm}$$

2

Applications pratiques de l'équation de Bernoulli

Mesure de la pression statique:



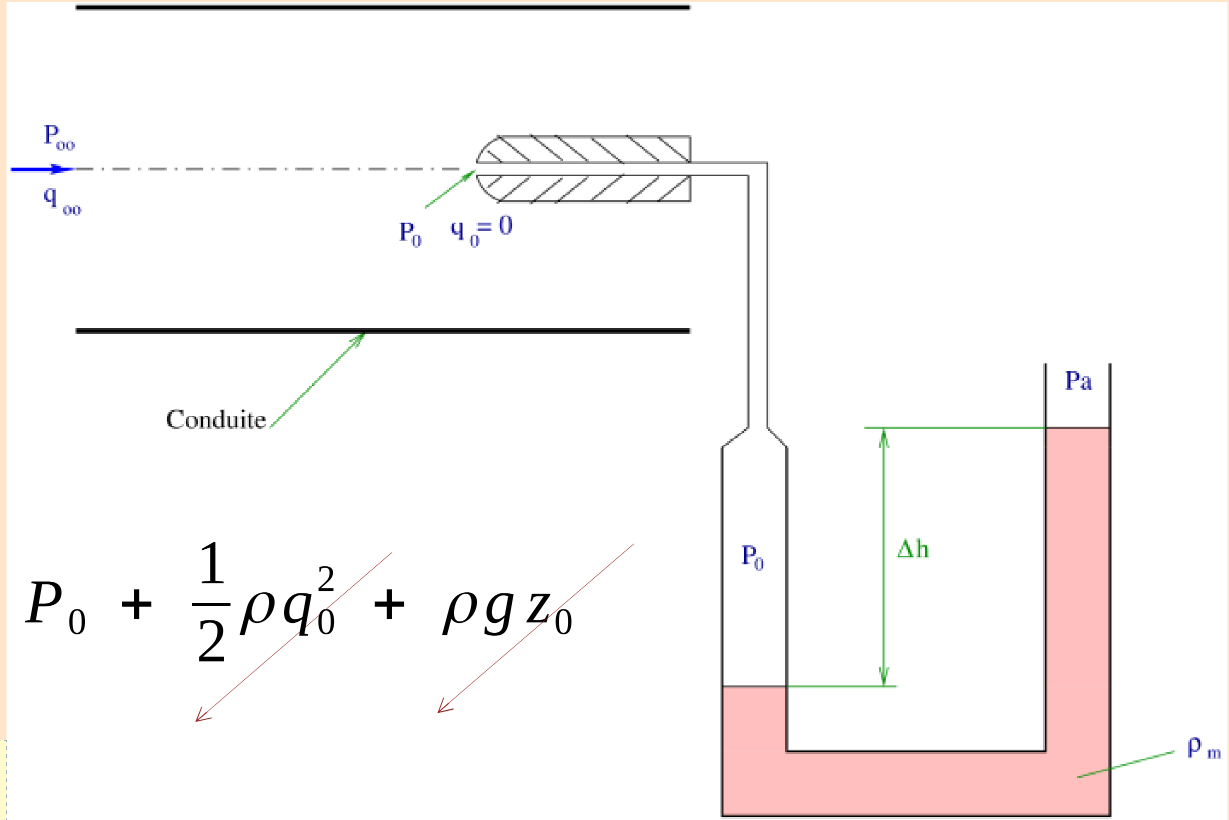
$$\frac{P_M}{\rho} + \cancel{\frac{1}{2}q_M^2} + \cancel{g\,z_M} = C^{te}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_M = C^{te}}$$

- pression du fluide mort = celle du fluide en mouvement qui est mesurée avec un *manomètre*.

Applications pratiques de l'équation de Bernoulli

Mesure de la pression totale:



$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho q_\infty^2 + \cancel{\rho g z_\infty} = P_0 + \cancel{\frac{1}{2}\rho q_0^2} + \cancel{\rho g z_0}$$

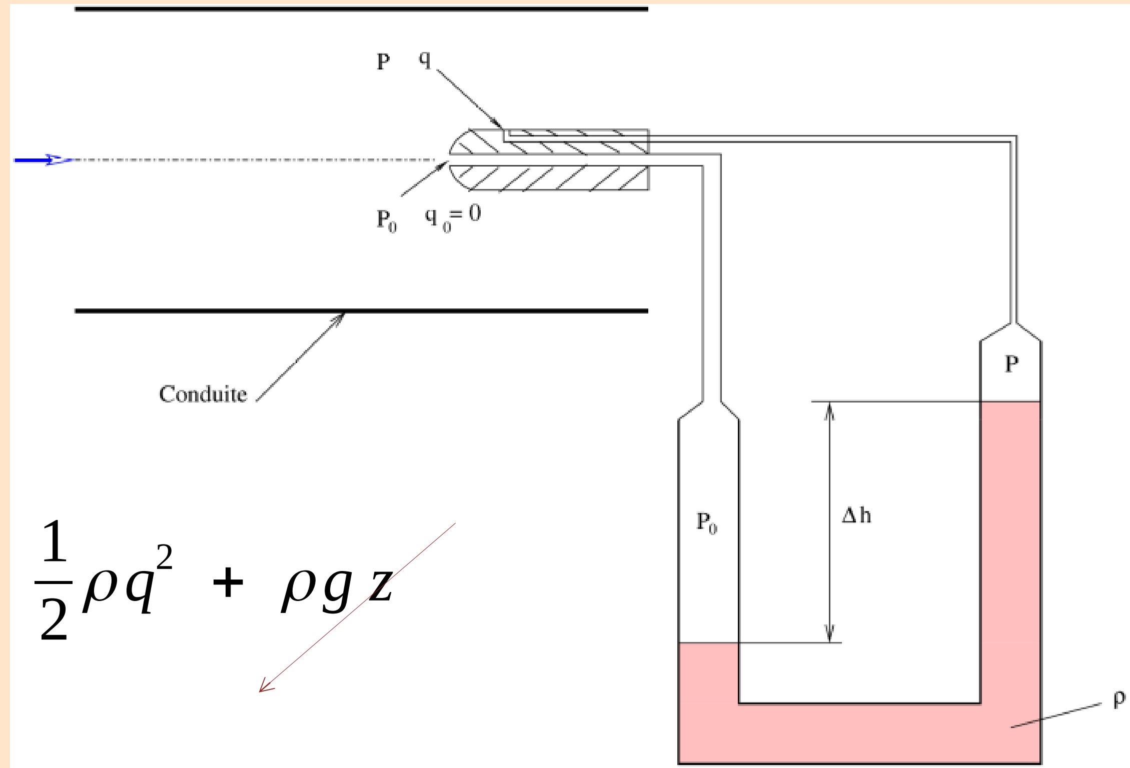
$$\Rightarrow \boxed{P_0 = P_\infty + \frac{1}{2}\rho q_\infty^2}$$

- pression statique + dynamique. Elle est mesurée avec un manomètre connecté au *tube de Pitot :* $\boxed{P_0 = P_a + \rho_m g \Delta h}$

Applications pratiques de l'équation de Bernoulli

Mesure de la vitesse:

Tube assez mince ($z = z_0$)



$$P_0 + \frac{1}{2}\rho \cancel{q_0^2} + \cancel{\rho g z_0} = P + \frac{1}{2}\rho q^2 + \cancel{\rho g z}$$

$$\boxed{q = \sqrt{2\frac{(P_0 - P)}{\rho}}}$$

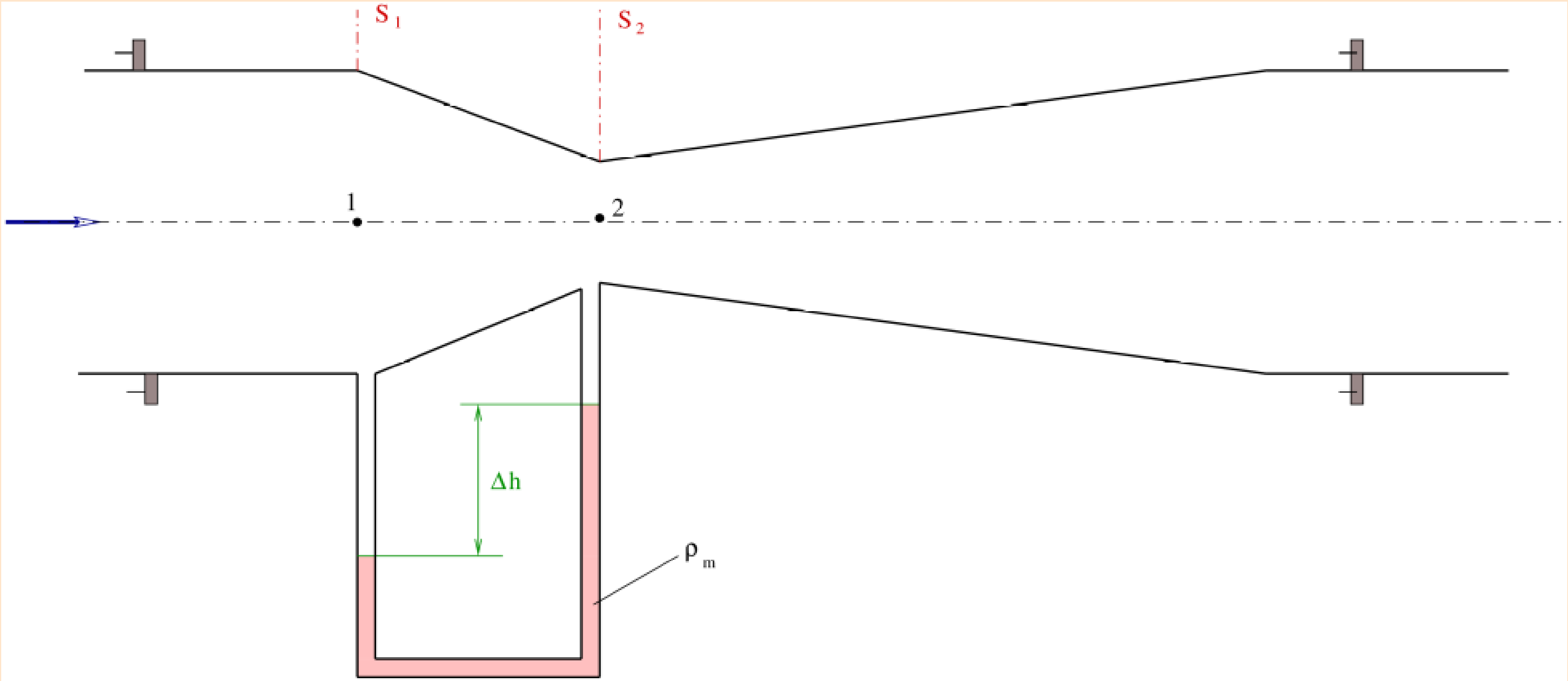
- La vitesse est mesurée avec un manomètre connecté au *tube de Prandtl :*

$$\boxed{P_0 = P_a + \rho_m g \Delta h}$$

2

Applications pratiques de l'équation de Bernoulli

Mesure du débit masse:



- Le débit masse est mesurée avec un *tube de Venturi.*

2 Applications pratiques de l'équation de Bernoulli

Mesure du débit masse:

$$Q_m = \rho q_1 S_1 = \rho q_2 S_2 \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho q_1^2 + \cancel{\rho g z_1} = P_2 + \frac{1}{2}\rho q_2^2 + \cancel{\rho g z_2}$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho q_2^2 [1 - (\frac{q_1}{q_2})^2] = \frac{1}{2}\rho q_2^2 [1 - (\frac{S_2}{S_1})^2]$$

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2\rho}(\frac{Q_m}{S_2})^2 [1 - (\frac{S_2}{S_1})^2]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q_m = S_2 \sqrt{\frac{2\rho(P_{g1} - P_{g2})}{[1 - (\frac{S_2}{S_1})^2]}}}$$

P_g : pression *globale* ou *motrice*.

2

Applications pratiques de l’équation de Bernoulli

Exemple: Un circuit hydraulique horizontal comporte un venturi, une prise de pression statique et une prise de pression double. Ces divers appareils sont reliés à des manomètres à mercure. Les tubes de liaison aux manomètres sont remplis d'eau. On donne:

- Masse volumique du mercure: $\rho_m = 13600 \ Kg/m^3$.

- Pression absolue au point 0: $P_0 = 1{,}5$ *bar.*

- Pression atmosphérique: $P_a = 1$ *bar.*

- Hauteur: $z = 1$ *m.*

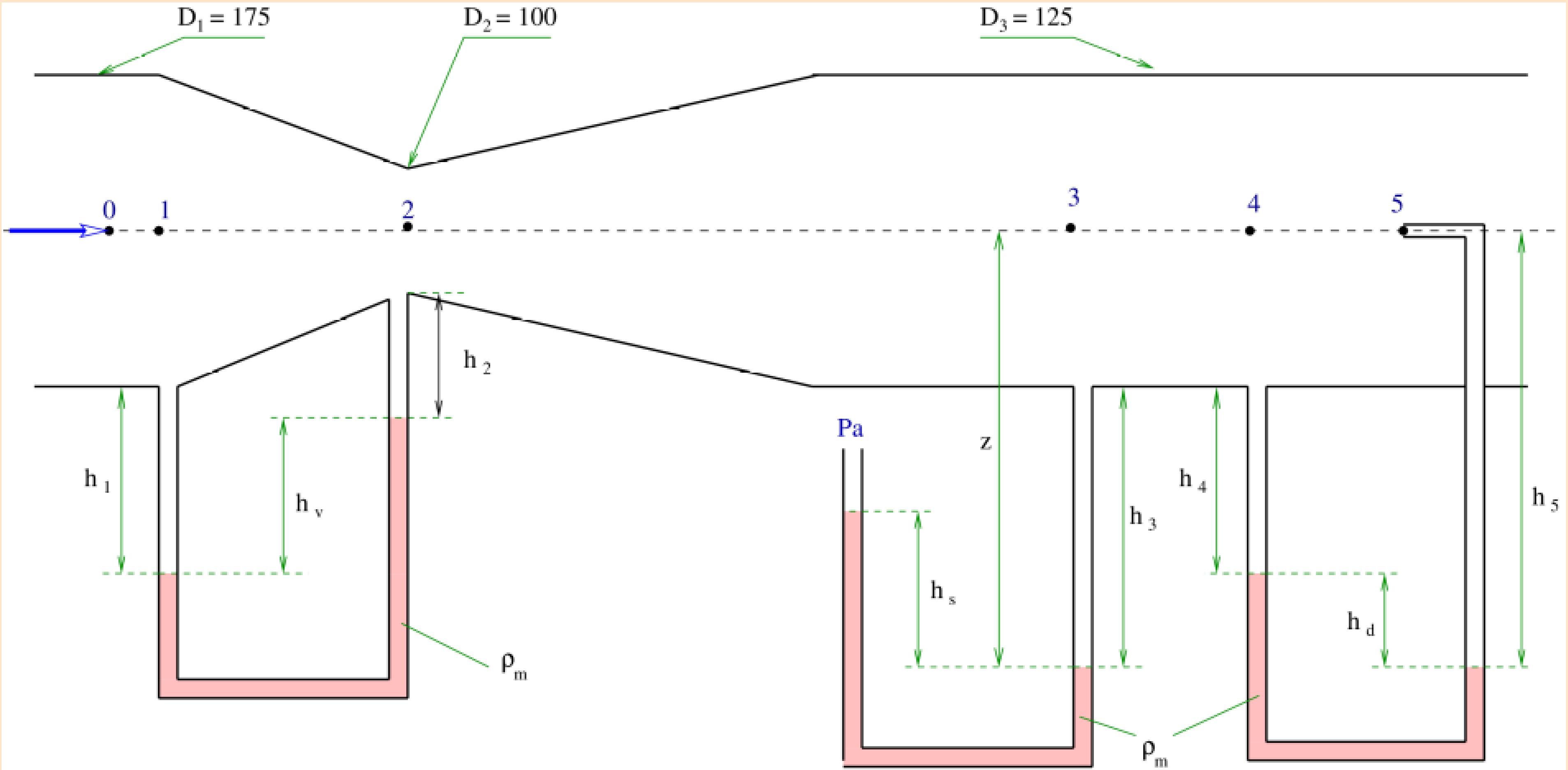
1. Sachant que la dénivellation $h_v = 40$ *mm, calculer le débit volumique dans la conduite.*

2. Calculer la dénivellation h_s .

3. Calculer la dénivellation h_d *dans la prise de pression double.*

2

Applications pratiques de l'équation de Bernoulli



$$Q_v = q_1 S_1 = q_2 S_2 \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

Applications pratiques de l’équation de Bernoulli

$$(P_2 - P_1) + \frac{1}{2}\rho(q_2^2 - q_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) = 0$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho q_1^2[(\frac{q_2}{q_1})^2 - 1] = \frac{1}{2}\rho q_1^2[(\frac{D_1}{D_2})^2 - 1]$$

$$\longrightarrow \quad q_1 = \sqrt{\frac{2\rho(P_1 - P_2)}{\rho[(\frac{D_1}{D_2})^4 - 1]}}$$

$$P_{g1} = P_1 + \rho g\frac{D_1}{2}$$

$$P_{g2} = P_2 + \rho g\frac{D_2}{2}$$

Venturi

$$\longrightarrow \quad P_{g1} + \rho g h_1 = P_{g2} + \rho g h_2 + \rho_m g h_v$$

$$\longrightarrow \quad P_1 - P_2 = g h_v(\rho_m - \rho)$$

2 Applications pratiques de l'équation de Bernoulli

$$\Rightarrow \quad Q_m = \frac{\pi D_1^2}{4}\sqrt{\frac{2\,g\,h_v(\rho_m - \rho)}{\rho[(\frac{D_1}{D_2})^4 - 1]}}$$

$$Q_m = \frac{\pi 0{,}75^2}{4}\sqrt{\frac{2\,.\,9{,}81\,.\,0{,}04\,(13{,}6 - 1)}{[1{,}75^4 - 1]}} = \boxed{0{,}02613\,m^3/s}$$

$$(P_3 - P_2) + \frac{1}{2}\rho(q_3^2 - q_2^2) = 0 \Rightarrow P_3 = P_2 + \frac{1}{2}\rho(q_2^2 - q_3^2)$$

Manomètre $\longrightarrow$ $$P_a + \rho g\,h_s = P_{g3} + \rho g\,h_3 = P_3 + \rho g\frac{D_3}{2} + \rho\,g(z - \frac{D_3}{2}) = P_3 + \rho g\,z$$

$$\longrightarrow \quad h_s = \frac{P_3 - P_a + \rho g\,z}{\rho_m g} \qquad P_3 = ?$$

2

Applications pratiques de l'équation de Bernoulli

$$q_1 = \frac{4Q_v}{\pi D_1^2} = \frac{4.0{,}02613}{\pi.0{,}175^2} = \boxed{1{,}086\,m/s}$$

$$q_2 = \frac{4Q_v}{\pi D_2^2} = \frac{4.0{,}02613}{\pi.0{,}1^2} = \boxed{3{,}327\,m/s}$$

$$q_3 = \frac{4Q_v}{\pi D_3^2} = \frac{4.0{,}02613}{\pi.0{,}125^2} = \boxed{2{,}129\,m/s}$$

$$P_1 - P_0 + \frac{1}{2}\rho(q_1^2 - q_0^2) = 0 \quad et \quad Q_v = q_0 S_0 = q_1 S_1 \Rightarrow \frac{q_0}{q_1} \Rightarrow P_0 = P_1$$

$$P_2 - P_0 + \frac{1}{2}\rho(q_2^2 - q_0^2) = 0 \Rightarrow P_2 = P_0 - \frac{1}{2}\rho(q_2^2 - q_0^2)$$

$$P_2 = 1{,}5.10^5 - \frac{10^3}{2}(3{,}327^2 - 1{,}086^2) = \boxed{1{,}450 \text{ bar}}$$

$$P_3 = P_2 - \frac{1}{2}\rho(q_3^2 - q_2^2) = 1{,}45.10^5 - \frac{10^3}{2}(2{,}129^2 - 3{,}327^2) = \boxed{1{,}482 \text{ bar}}$$

2 Applications pratiques de l'équation de Bernoulli

$$h_s = \frac{1{,}482.10^5 - 10^5 + 10^3.9{,}81.1}{13600.9{,}81} = \boxed{0{,}4348\,m}$$

$$P_4 - P_3 + \frac{1}{2}\rho(q_4^2 - q_3^2) = 0 \quad et \quad Q_v = q_4 S_4 = q_3 S_3 \Rightarrow q_4 = q_3$$

$$\Rightarrow P_4 = P_3$$

Prise double

$$P_{g4} + \rho g h_4 + \rho_m g h_d = P_5 + \rho g h_5$$

$$\left(P_4 + \rho g \frac{D_3}{2}\right) + \rho g h_4 + \rho_m g h_d = P_5 + \rho g \left(h_d + h_4 + \frac{D_3}{2}\right) \Rightarrow P_3 + \rho_m g h_d = P_5 + \rho g h_d$$

$$P_5 - P_4 + \frac{1}{2}\rho(q_5^2 - q_4^2) = 0 \quad \text{or} \quad q_5 = 0 \quad \textit{(point d'arrêt)}$$

$$\Rightarrow P_5 = P_4 + \frac{1}{2}\rho q_4^2 = P_3 + \frac{1}{2}\rho q_3^2 \quad \Rightarrow P_3 + \rho_m g h_d = \rho g h_d + P_3 + \frac{1}{2}\rho q_3^2$$

$$h_d = \frac{\rho q_3^2}{2g(\rho_m - \rho)} = \frac{10^3.2{,}129^2}{2.9{,}81(13600 - 1000)} = \boxed{18{,}3\,mm}$$