Cinématique des fluides

Dr. Laïd MESSAOUDI

Département de Mécanique
Université MB Batna 2

3

L'essentiel du cours de MDF, 2019

3 Ecoulements irrotationnels

- Malgré que nous avons négligé les effets visqueux dans l'écoulement idéal, les équations du mouvement (*Euler*) obtenues demeurent difficiles à résoudre à cause des termes non linéaires. Nous allons traiter certains types d'écoulements dans lesquels les particules de fluide ne subissent pas de rotation autour d'elles pendant leurs mouvements. Un tel écoulement est dit *irrotationnel* ou *potentiel*. Avec cette restriction, nous obtiendrons des équations linéaires qui sont faciles à résoudre. On peut avoir ce type d'écoulement dans les régions où l'effet de viscosité est négligeable c-à-d loin des couches limites adjacentes aux frontières des corps.

Ecoulements irrotationnels

- Nous considérons un fluide *barotrope :* $\rho = \rho(P)$.

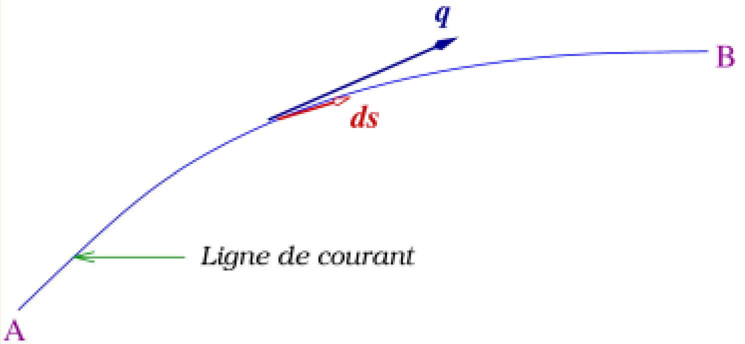
- Nous allons étudier les propriétés de l'écoulement *plan bidimensionnel* particulièrement intéressantes pour :

- *Problème direct*: Il consiste à définir le champ de vitesse correspondant à une géométrie donnée (**analyse**).
- *Problème inverse*: Il consiste à définir la géométrie des enveloppes correspondant à un champ de vitesse fixé à priori (**conception**).

3 Circulation du vecteur vitesse

- On appelle circulation Γ du vecteur vitesse $\vec{q}$ le long d'une courbe $\widetilde{AB}$, dont l'abscisse curviligne (ou élément d'arc) $\overrightarrow{ds}$, l'intégrale curviligne:

$$\Gamma = \int_{\widetilde{AB}} \vec{q} \cdot \overrightarrow{ds}$$



$$\vec{q} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + w\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{ds} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

- En général, Γ_{AB} dépend des points A et B et de la forme du trajet $\widetilde{AB}$.

3 Potentiel des vitesses

- Si le champ des vitesses est tel que Γ_{AB} ne dépend que de la position des points A et B et non du chemin suivi, on dit que le champ *dérive d'un potentiel*. On peut alors écrire :

$$\boxed{\Gamma_{AB} = \phi_B - \phi_A = \int_{\widetilde{AB}} d\phi}$$

$$\boxed{\vec{q} = \vec{\nabla}\phi = \overrightarrow{grad}\,\phi}$$

$$\vec{q} = \vec{\nabla}\phi \Leftrightarrow u\vec{i} + v\vec{j} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad et \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}}$$

$$\Gamma_{AB} = \int_{\widetilde{AB}} (u\,dx + v\,dy) = \int_{\widetilde{AB}} \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = \int_{\widetilde{AB}} d\phi$$

3

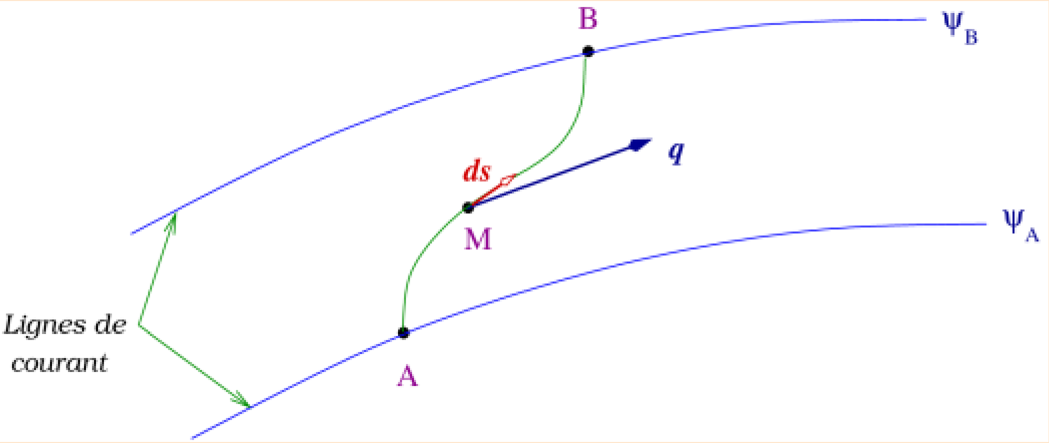
Potentiel des vitesses

- Dans un écoulement avec potentiel des vitesses et à un instant donné, le vecteur vitesse est en tout point perpendiculaire à la surface équipotentielle $\phi(x,y)=C^{te}$, qui passe par ce point.
- Les lignes de courant sont orthogonales aux surfaces équipotentielles. Le *sens des lignes de courant* est celui des ϕ croissants.
- En coordonnées cylindriques: $$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad et \quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$
- La circulation Γ_{AB} est constante de A à B si l'écoulement est irrotationnel (ou à potentiel de vitesses).

3 Fonction de courant

- Le débit volumétrique par unité de profondeur à l'intérieur du tube de courant est:

$$q_v = \psi_A - \psi_B$$ [m²/s]



$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad et \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

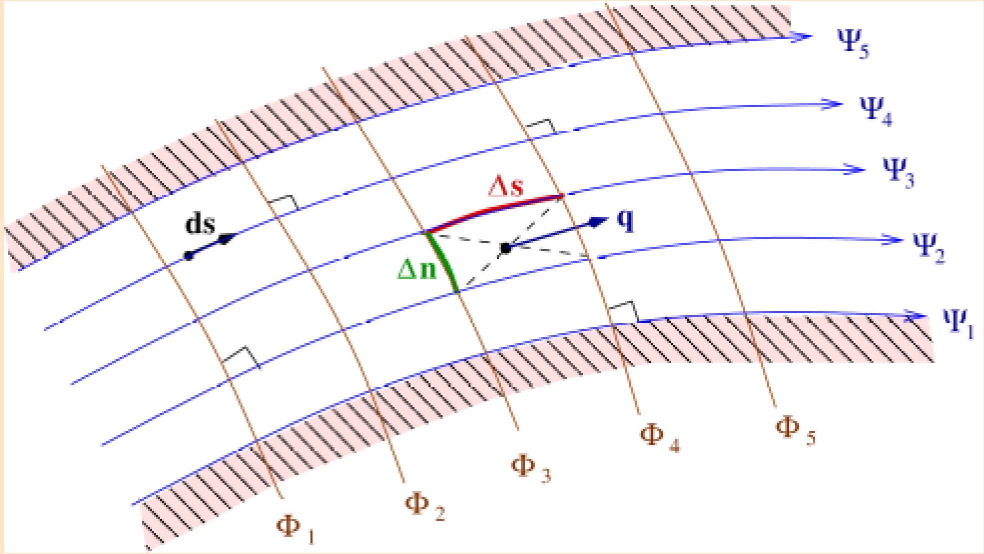
- En coordonnées cylindriques: $$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad et \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$
- Les fonctions ψ et ϕ sont harmoniques et en tout point orthogonales.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

3 Fonction de courant

- L'écoulement irrotationnel est décrit par la fonction ϕ et les lignes de courant par la fonction ψ .
- On démontre que :

$$q = \frac{\Delta \psi}{\Delta n} = \frac{\Delta \phi}{\Delta s}$$



- ψ_1 et ψ_5 forment la frontière de l'écoulement. Pour ces lignes de courant particulières d'équation S(x,y)=0; la condition de glissement sera observée lorsque le produit scalaire entre la vitesse et la normale à la paroi est nul:

$$u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

3 Vecteur tourbillon

- Pour un écoulement irrotationel, le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ du champ de vitesse (ou taux de rotation de la particule) doit être nul:

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{q} = \vec{0}}$$

Vorticité

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\eta\vec{i} + \frac{1}{2}\zeta\vec{j} + \frac{1}{2}\xi\vec{k}$$

- Condition suffisante pour que l'écoulement 2D soit irrotationel :

$$\boxed{\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0}$$

3

Ecoulement rectiligne plan

- Soit un écoulement rectiligne plan de vitesse ***q_0*** que nous supposerons uniforme et dirigée selon les x positifs : *q_0 ($u=q_0$, $v=0$)*.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = q_0 \Rightarrow \psi(x,y) = q_0 y + f(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = C^{te} = C_1$$

$$\Rightarrow \psi(x,y) = q_0 y + C_1$$

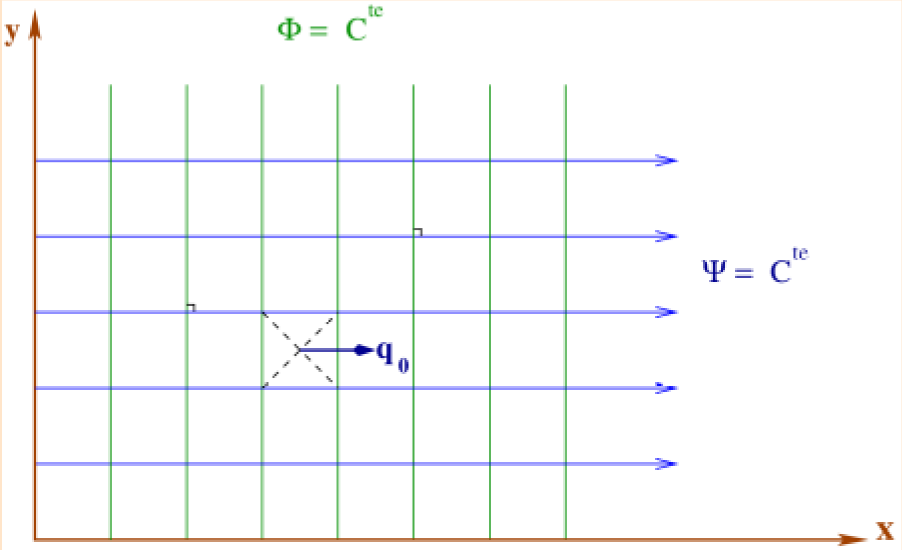
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = q_0 \Rightarrow \phi(x,y) = q_0 x + g(y)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C^{te} = C_2$$

$$\Rightarrow \phi(x,y) = q_0 x + C_2$$

3 Ecoulement rectiligne plan

- Le réseau des lignes équipotentielles et des lignes de courant forme donc un damier :



3

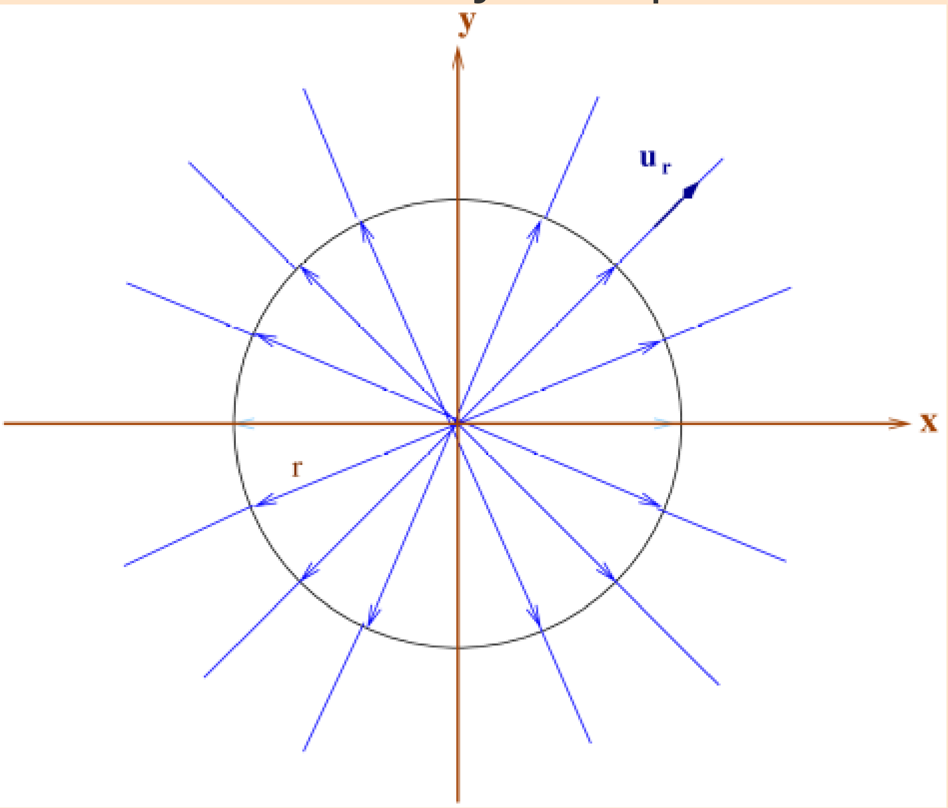
Ecoulement autour d'une source

- Une *ligne source* est une ligne droite infinie le long de laquelle on suppose qu'un fluide incompressible est envoyé radialement à l'extérieur.
- q_v est appelée intensité de la ligne source et l'écoulement est distribué uniformément à une distance r, sur une surface cylindrique dont la circonférence est 2π r.

$$q_v = 2\pi r h \cdot u_r$$

$$\Rightarrow u_r = \frac{q_v}{2\pi r} \qquad (h = 1)$$

$$v_\theta = 0$$



3 Ecoulement autour d'une source

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{q_v}{2\pi r} \Rightarrow \phi(r,\theta) = \frac{q_v}{2\pi}\ln r + f(\theta)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow f'(\theta) = 0 \Rightarrow f(\theta) = C^{te} = C_1$$

$$\Rightarrow \phi(r,\theta) = \frac{q_v}{2\pi}\ln r + C_1$$

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{q_v}{2\pi r} \Rightarrow \psi(r,\theta) = \frac{q_v}{2\pi}\theta + g(r)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \Rightarrow g'(r) = 0 \Rightarrow g(r) = C^{te} = C_2$$

$$\Rightarrow \psi(r,\theta) = \frac{q_v}{2\pi}\theta + C_2$$

3 Ecoulement autour d'une source

$$\phi(r,\theta) = \frac{q_v}{2\pi}\ln r + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x,y) = \frac{q_v}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2} + C_1$$

$$\psi(r,\theta) = \frac{q_v}{2\pi}\theta + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad \psi(x,y) = \frac{q_v}{2\pi}\arctan\frac{y}{x} + C_2$$

- Composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes:

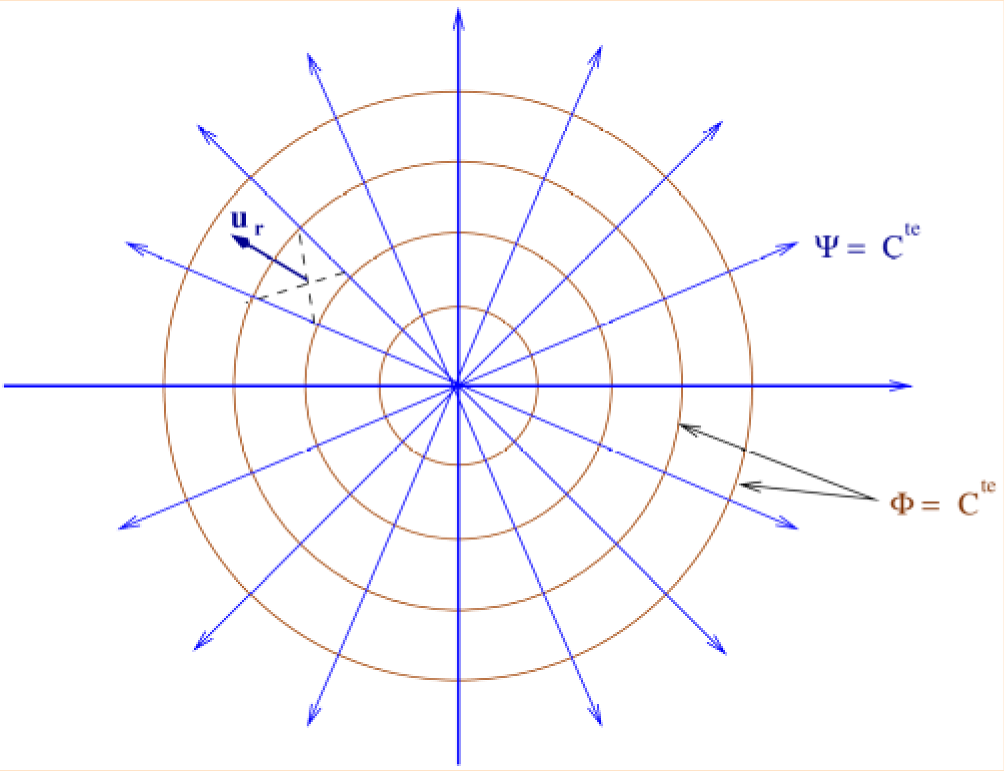
$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{q_v x}{2\pi(x^2+y^2)}$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{q_v y}{2\pi(x^2+y^2)}$$

3

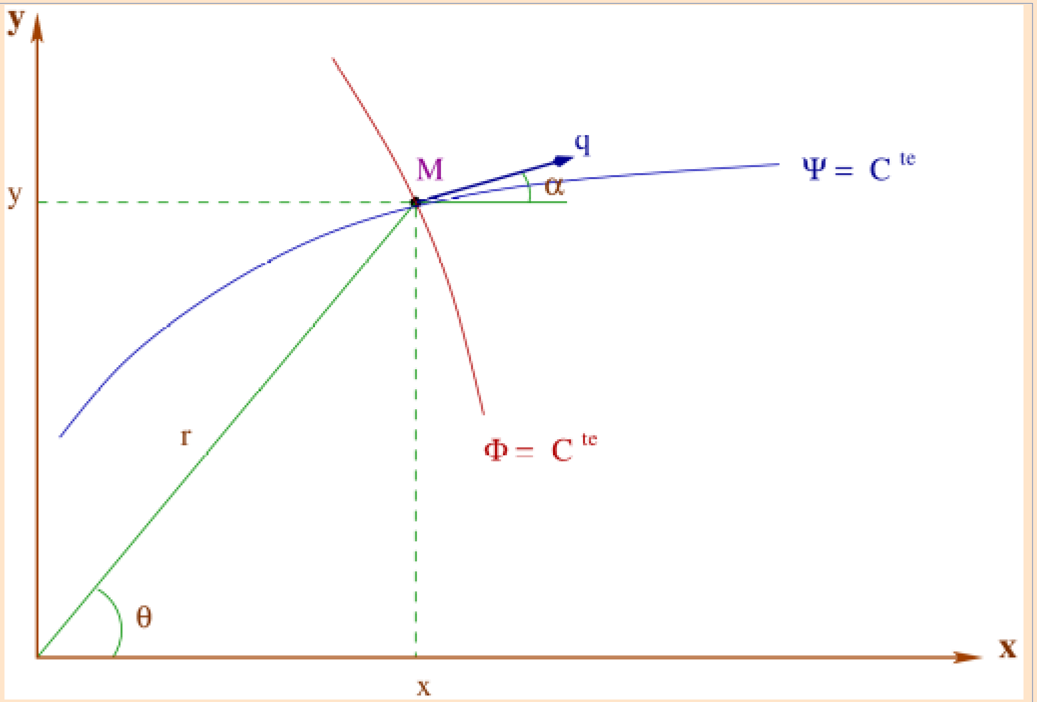
Ecoulement autour d'une source

- Les lignes de courant sont donc des rayons issus de la source et les équipotentielles des tubes concentriques.



3 Utilisation de la variable complexe

- L'étude des écoulements plans à potentiel des vitesses est facilité par l'introduction des fonctions complexes. A un point M(x,y) on fait correspondre un affixe complexe tel que:



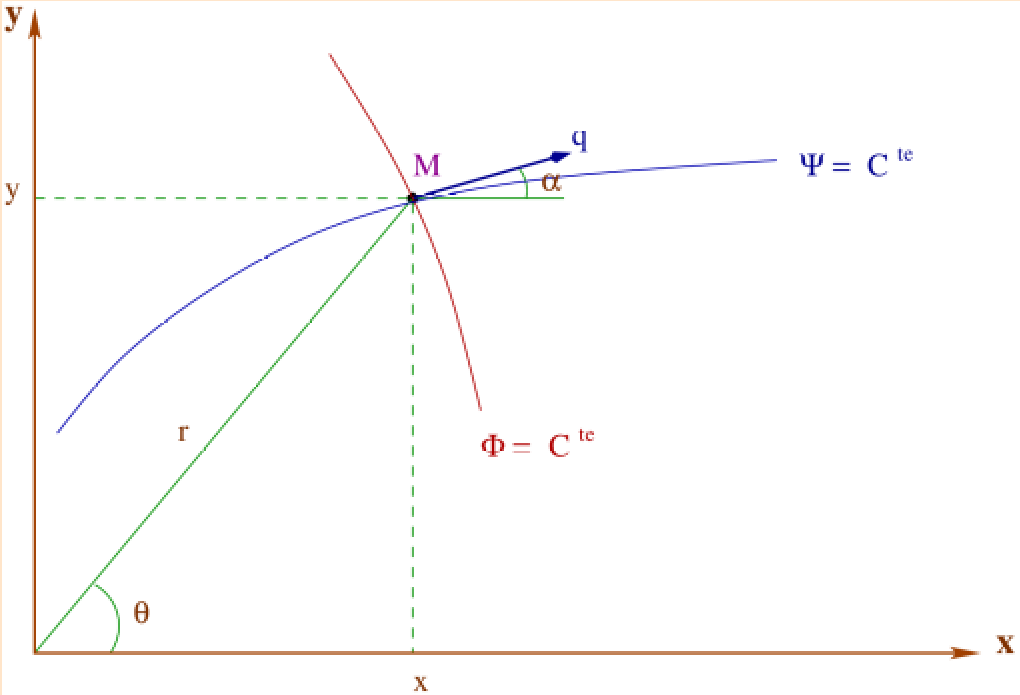
$$z = x + i\,y = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = r\,e^{i\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \left(\textit{module de } z\right)$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} \qquad \left(\textit{argument de } z\right)$$

3 Utilisation de la variable complexe

- De même, la vitesse **q** au point M de composantes (u,v) peut être écrite sous forme vectorielle complexe:



$$q = u + i\,v = q\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = q\,e^{i\,\alpha}$$

- Conditions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad et \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

3

Fonction analytique

- Dans le cadre de l'étude analytique, on introduit ψ et ϕ par l'intermédiaire de la fonction potentiel complexe ***F(z)***:

$$\boxed{F(z) = \phi + i\psi}$$

- La fonction *F(z)* pour laquelle ψ et ϕ satisfont aux relations de *Cauchy-Riemann* est une fonction analytique dont les parties réelle et imaginaire satisfont l'équation de *Laplace*.

- ***Propriété***:

$$\boxed{\frac{dF}{dz} = u - iv}$$

$$\boxed{q' = u - iv = q e^{-i\alpha}}$$

*(Vitesse conjuguée de **q**)*

3

Ecoulement uniforme

- Fonction potentielle complexe : $F(z) = q_0 z$

$$F(z) = q_0(x+iy) = \phi + i\psi \Rightarrow \begin{cases} \phi = q_0 x \\ \psi = q_0 y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{q} \left| \begin{array}{l} u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = q_0 \\ v = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

- ***Cas général***: → $F(z) = q_0 z e^{-i\alpha}$

L'opérateur *exp(-iα)* correspondant à une rotation d'angle α dans le sens trigonométrique (anti-horaire).

3

Ecoulement uniforme

$$F(z) = q_0 z e^{-i\alpha} = q_0 r e^{i\theta} e^{-i\alpha} = q_0 r e^{i(\theta-\alpha)}$$

$$F(z) = q_0 r[\cos(\theta-\alpha)+i\sin(\theta-\alpha)]$$

$$F(z) = q_0 r[\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha + i(\sin\theta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\theta)]$$

$$F(z) = q_0[x\cos\alpha+y\sin\alpha + i(y\cos\alpha-x\sin\alpha)] = \phi + i\psi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = q_0(x\cos\alpha + y\sin\alpha) \\ \psi = q_0(y\cos\alpha - x\sin\alpha) \end{cases} \rightarrow \quad \vec{q} \left| \begin{array}{l} u = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = q_0\cos\alpha \\ v = \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = q_0\sin\alpha \end{array} \right.$$

3 Ecoulement de type source ou puits

- Fonction potentielle complexe : $$\boxed{F(z) = \pm C_0 \ln z}$$

- ***Cas d'une source***:

$$F(z) = C_0 \ln z = C_0 \ln\left(r e^{i\theta}\right) = C_0 \ln r + i C_0 \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = C_0 \ln r = C_0 \ln \sqrt{x^2 + y^2} \\ \psi = C_0 \theta = C_0 \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Les équipotentielles sont donc
des cercles centrés sur la source (r = C^{te})
et les lignes de courant
des droites passant par l'origine (y/x = C^{te}).

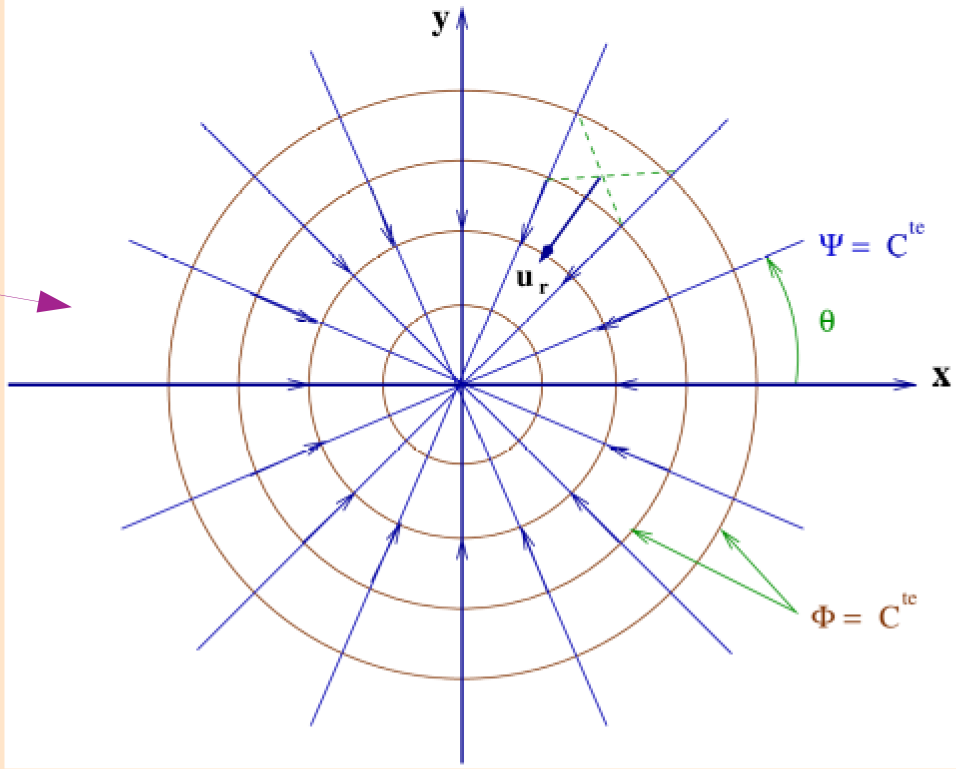
$$q_v = 2\pi r \cdot u_r = C_0 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_0 = \frac{q_v}{2\pi}}$$

3 Ecoulement de type source ou puits

$$\Rightarrow \vec{q} \left| \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{C_0}{r} = \boxed{\frac{q_v}{2\pi r}} \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \end{aligned} \right.$$

- ***Cas d'un puits***:

$$F(z) = -C_0 \ln z$$



- ***Cas général***:

$$\boxed{F(z) = \pm\frac{q_v}{2\pi}\ln(z - z_0)}$$

(source décentrée)

Ecoulement tourbillonnaire

- Fonction potentielle complexe : $\boxed{F(z) = \pm i C_0 \ln z}$

- ***Cas d'une source***:

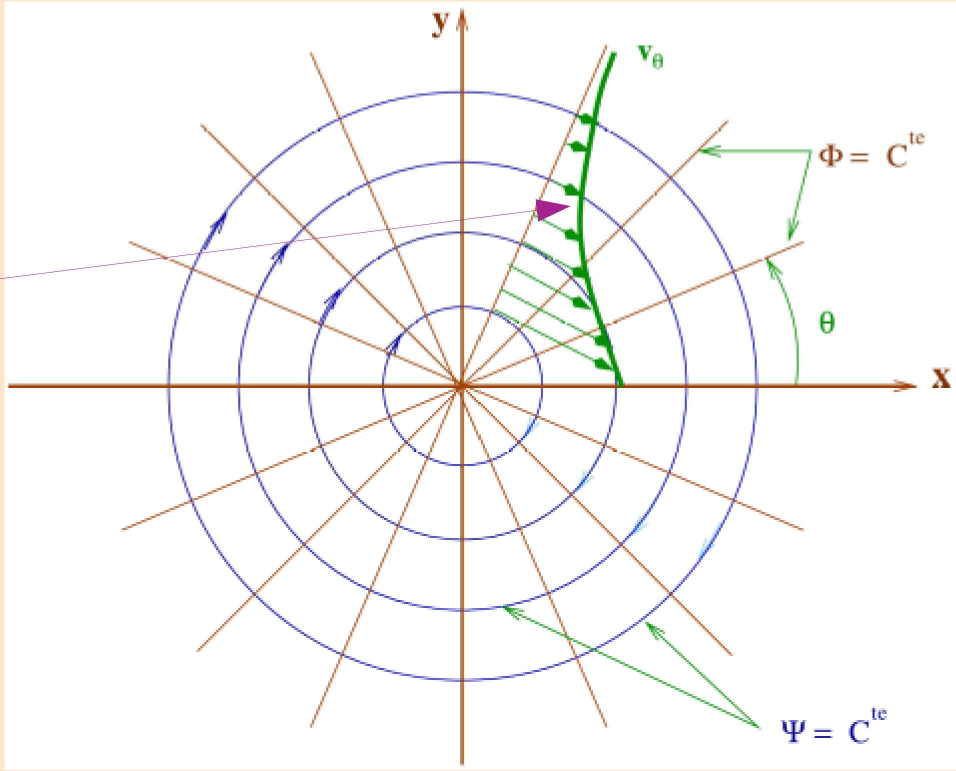
$$F(z) = i C_0 \ln z = i C_0 \ln\left(r e^{i\theta}\right) = -C_0 \theta + i C_0 \ln r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = -C_0 \theta = -C_0 \arctan \dfrac{y}{x} \\ \\ \psi = C_0 \ln r = C_0 \ln \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Les lignes de courant sont donc
des cercles centrés sur la source ($r = C^{te}$)
et les équipotentielles
des droites passant par l'origine ($y/x = C^{te}$).

3 Ecoulement tourbillonnaire

$$\Rightarrow \vec{q} \left| \begin{array}{l} u_r = \dfrac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ \\ v_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\dfrac{C_0}{r} \end{array} \right.$$



- ***Caractéristiques***:

$$\Gamma = \int_{(\psi)} \vec{q} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} -\frac{C_0}{r}(-r\, d\theta)$$

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} C_0 d\theta = 2\pi C_0$$

C^{te} quelque soit le cercle retenu

Vitesse induite par le tourbillon : $q = -\dfrac{\Gamma}{2\pi r}$

3 Ecoulement tourbillonnaire

- En choisissant comme sens positif le sens trigonométrique, l'écoulement tourbillonnaire sera caractérisé par les relations:

$$F(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi r}\ln z$$

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \qquad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \qquad q = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

- Dans le cas d'un tourbillon décentré, par rapport au centre du repère, de l'affixe z_0 :

$$F(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi r}\ln(z - z_0)$$

3 Superposition d'écoulements élémentaires

$$F_1(z) = \phi_1 + i\,\psi_1$$

$$F_2(z) = \phi_2 + i\,\psi_2$$

$$\Rightarrow \quad F(z) = F_1(z) + F_2(z) = \phi + i\,\psi$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \qquad \psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$\Rightarrow \vec{q} \left| \begin{array}{l} u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial x} = \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x} = u_1 + u_2 \\[2ex] v = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \dfrac{\partial(\psi_1 + \psi_2)}{\partial y} = \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y} = v_1 + v_2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$$

3 Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source

$$F_1(z) = q_0 z \quad \longrightarrow \quad \phi_1 = q_0 x \qquad \psi_1 = q_0 y$$

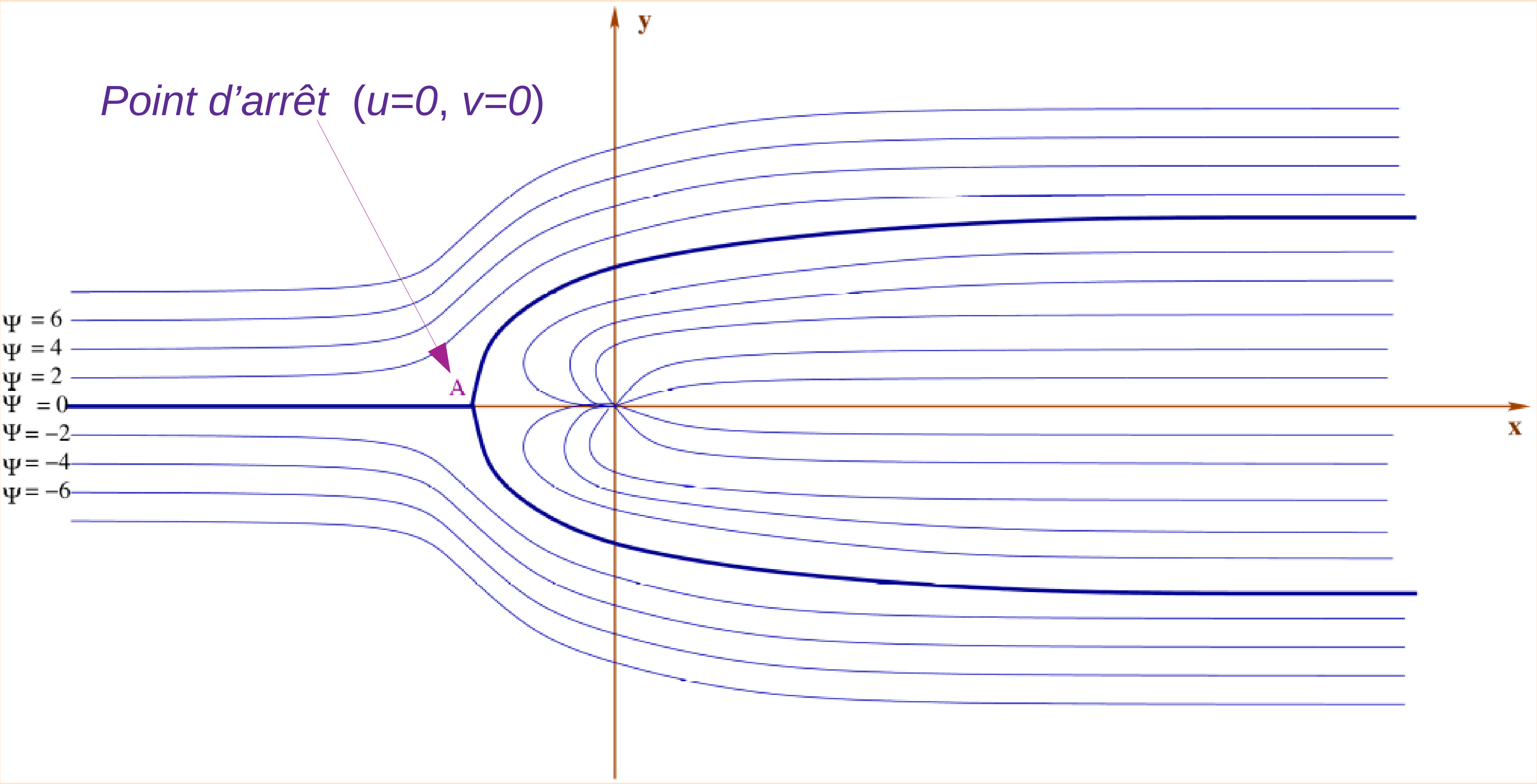
$$F_2(z) = \frac{q_v}{2\pi}\ln z \quad \longrightarrow \quad \phi_2 = \frac{q_v}{2\pi}\ln r \qquad \psi_2 = \frac{q_v}{2\pi}\theta$$

$$\longrightarrow \quad F(z) = F_1(z) + F_2(z) = \phi + i\,\psi$$

$$\phi = q_0 x + \frac{q_v}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\psi = q_0 y + \frac{q_v}{2\pi}\arctan\frac{y}{x}$$

Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source



$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = q_0 + \frac{q_v}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{q_v}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

3 Superposition d’un écoulement uniforme et d’une source

- Ce principe de superposition permet donc de représenter l'écoulement potentiel autour d'un obstacle (correspondant notamment à $\psi = 0$) en matérialisant la courbe d'équation $y = (q_v/2\pi)(\pi - \arctan y/x)$ par une paroi solide infinie. En effet, rien ne change dans la répartition de vitesse et des lignes de courant autour de ce solide et tout le débit de la source reste à l'intérieur de cette paroi.

- On peut, en principe, obtenir n'importe quelle forme d'obstacle (*problème inverse*) en disposant dans le plan un nombre suffisant de sources et de puits.

3 Superposition d'une source et d'un puits de même débits

$$F_1(z) = \frac{q_v}{2\pi}\ln(z - z_s)$$ → Source centrée à l'affixe $z_s(0, a)$

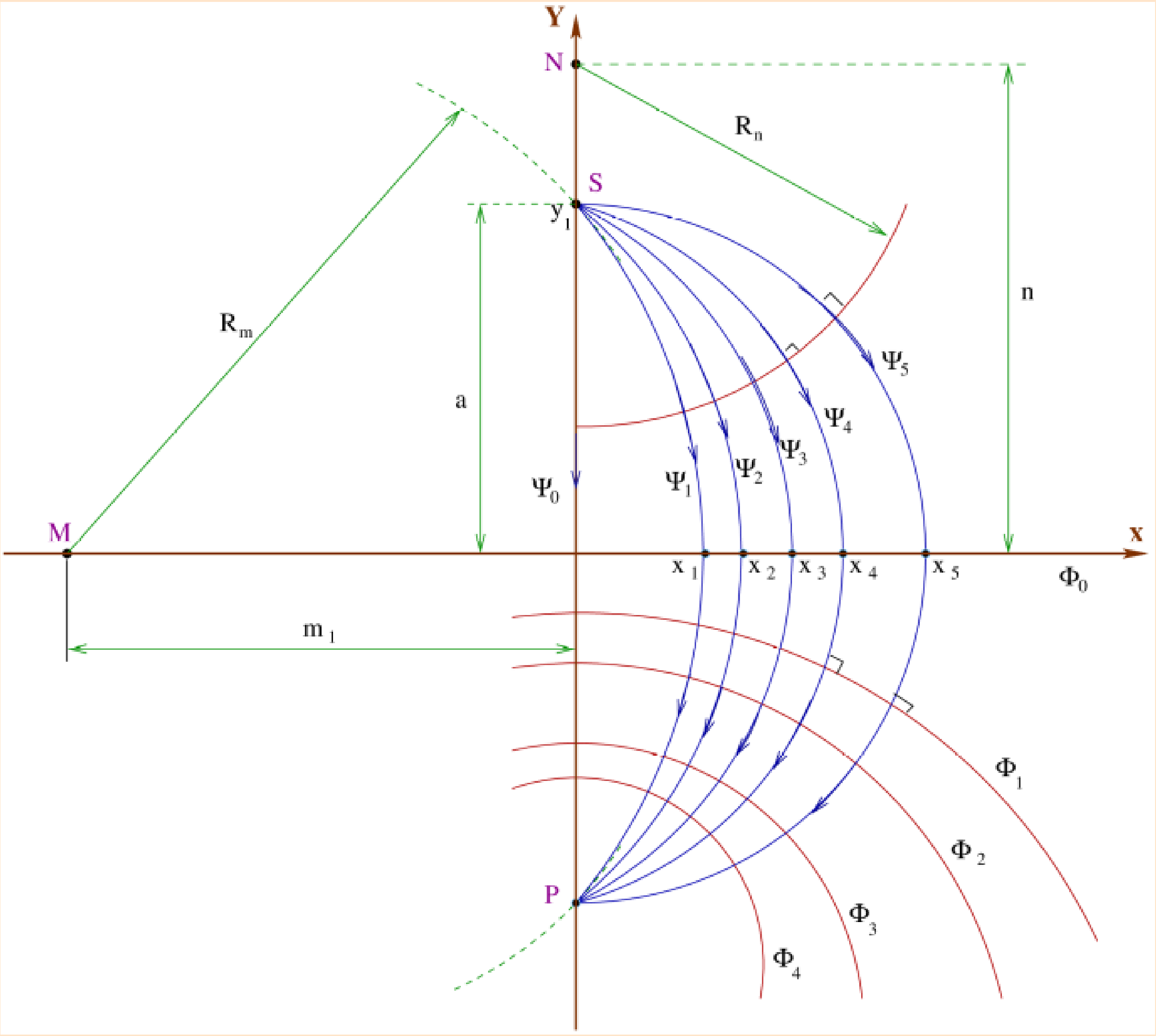
$$F_2(z) = -\frac{q_v}{2\pi}\ln(z - z_p)$$ → Puits centré à l'affixe $z_p(0, -a)$

$$\Rightarrow F(z) = F_1(z) + F_2(z) = \phi + i\psi = \frac{q_v}{2\pi}\ln\left(\frac{z - z_s}{z - z_p}\right)$$

$$\phi = \frac{q_v}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2}}$$

$$\psi = \frac{q_v}{2\pi}\arctan\frac{-2ax}{x^2 + (y-a)^2}$$

3 Superposition d'une source et d'un puits de même débits



3 Superposition d'une source et d'un vortex centrés à l'origine

$$F_1(z) = \frac{q_v}{2\pi}\ln z \longrightarrow \phi_1 = \frac{q_v}{2\pi}\ln r \qquad \psi_1 = \frac{q_v}{2\pi}\theta$$

$$F_2(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi r}\ln z \longrightarrow \phi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \qquad \psi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

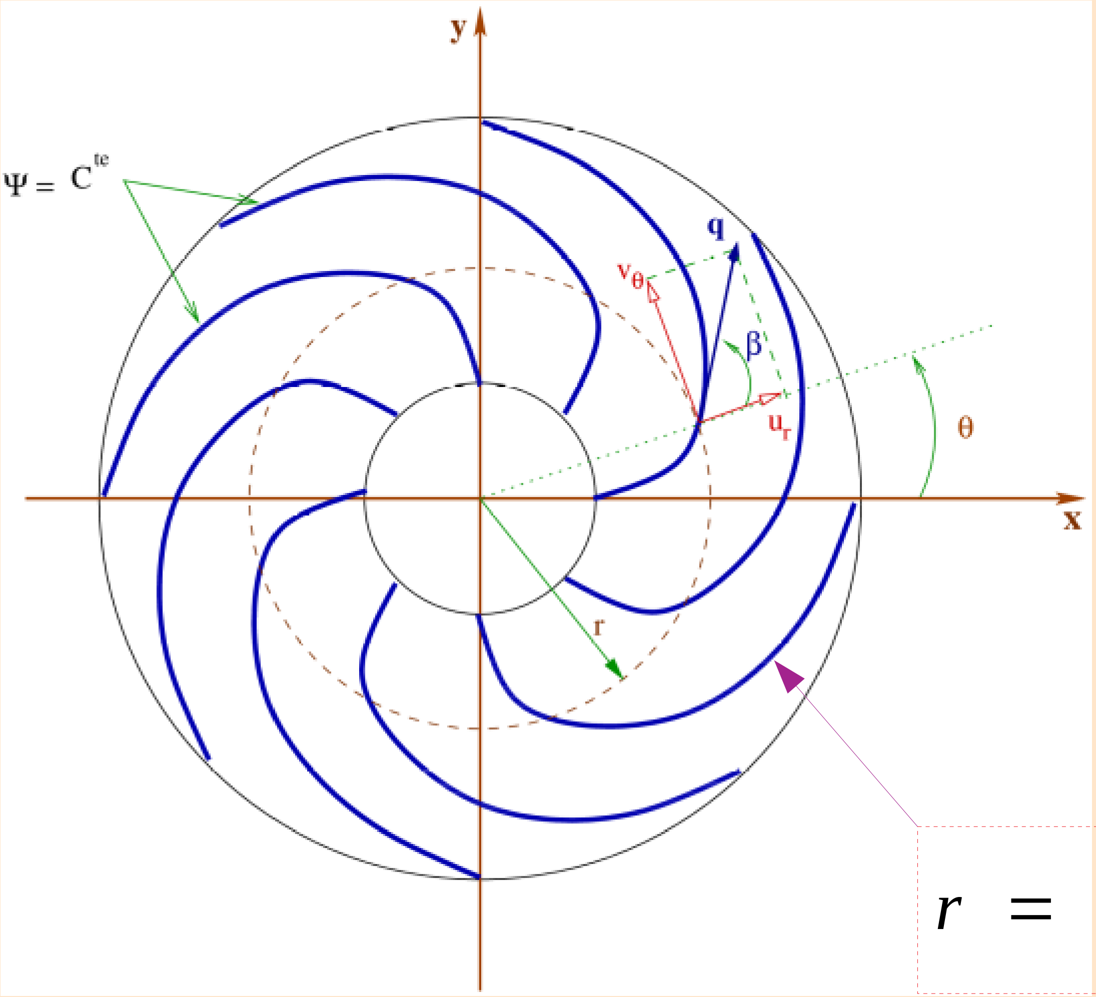
$$\Rightarrow \quad F(z) = F_1(z) + F_2(z) = \phi + i\psi$$

$$\phi = \frac{q_v}{2\pi}\ln r + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\psi = \frac{q_v}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

3

Superposition d'une source et d'un vortex centrés à l'origine



$$\vec{q} \left| \begin{array}{l} u_r = \dfrac{\partial \phi}{\partial r} = \dfrac{q_v}{2\pi r} \\[2ex] v_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} = \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \end{array} \right.$$

$$r = \exp\left(\frac{-2\pi\psi}{\Gamma}\right)\cdot\exp\left(\frac{\theta}{tg\,\beta}\right)$$