# Dynamique des fluides

*Dr. Laïd MESSAOUDI*

*Département de Mécanique*
*Université MB Batna 2*

4

*L'essentiel du cours de MDF, 2019*

# Propriétés du fluide réel

4

- La viscosité qui est une caractéristique physique du fluide se manifestant par une résistance de celui-ci aux déformations et plus particulièrement aux vitesses de déformation. Elle est due à la combinaison des efforts de cohésion et d'agitation moléculaire s'opposant au déplacement relatif des couches liquides les unes par rapport aux autres.

- La viscosité dépend de la nature du fluide et varie considérablement d'un fluide à un autre. Pour un même fluide, elle dépend de la pression et de la température; pour les liquides incompressibles, elle est pratiquement invariante avec la pression. L'*expérience de Couette* est souvent utilisée pour mettre en évidence l'existence de la viscosité.

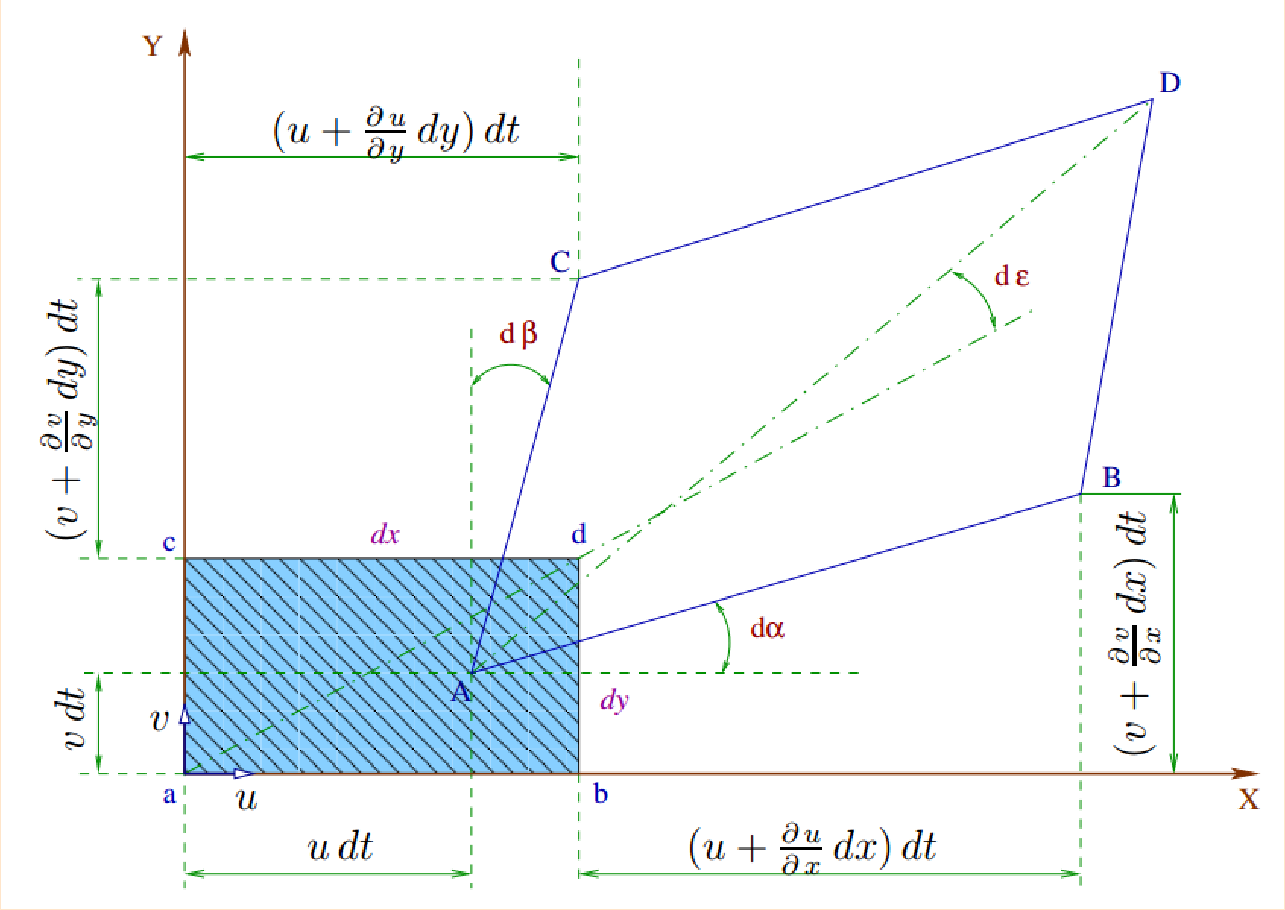
# 4 Propriétés du fluide réel

- L'adhérence du fluide aux parois solides: Contrairement au fluide parfait pour lequel la vitesse d'écoulement possède une valeur non nulle à la paroi (*glissement*), le fluide réel adhère parfaitement à celle-ci et sa vitesse est nulle à cet endroit. Dans cette zone de fort gradient désignée par *couche limite*, les effets de frottement interne sont importants. L'épaisseur de cette couche limite dépend à la fois de la viscosité du fluide et du régime d'écoulement. *A l'extérieur, la cinématique du fluide est pratiquement identique à celle décrite en fluide parfait*.

- Dans certains modèles d'écoulements, les conditions de glissement ne s'écrivent pas à la parois elle même, mais à la frontière de la couche limite.

# 4 Description du frottement visqueux

- Examinons dans le plan (x,y) la déformation d'un parallélépipède rectangle élémentaire ($dx \times dy$) représentant une particule fluide en mouvement.



# 4 Tenseur des taux de déformation

- *En 2D :*

$$\overline{\overline{T}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}$$

*Tenseur d'élongation symétrique*

*Tenseur de rotation antisymétrique*

$$\overline{\overline{D}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \boxed{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)} \\ \boxed{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

*Déformation par cisaillement*

*Taux d'élongation suivant x et y*

*allongement*

*rétrécissement*

$$\overline{\overline{\Omega}} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

# 4 Tenseur des taux de déformation

- *En 3D :*

$$\overline{\overline{T}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}$$

# 4 Tenseur des taux de déformation

- $$\overline{\overline{D}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

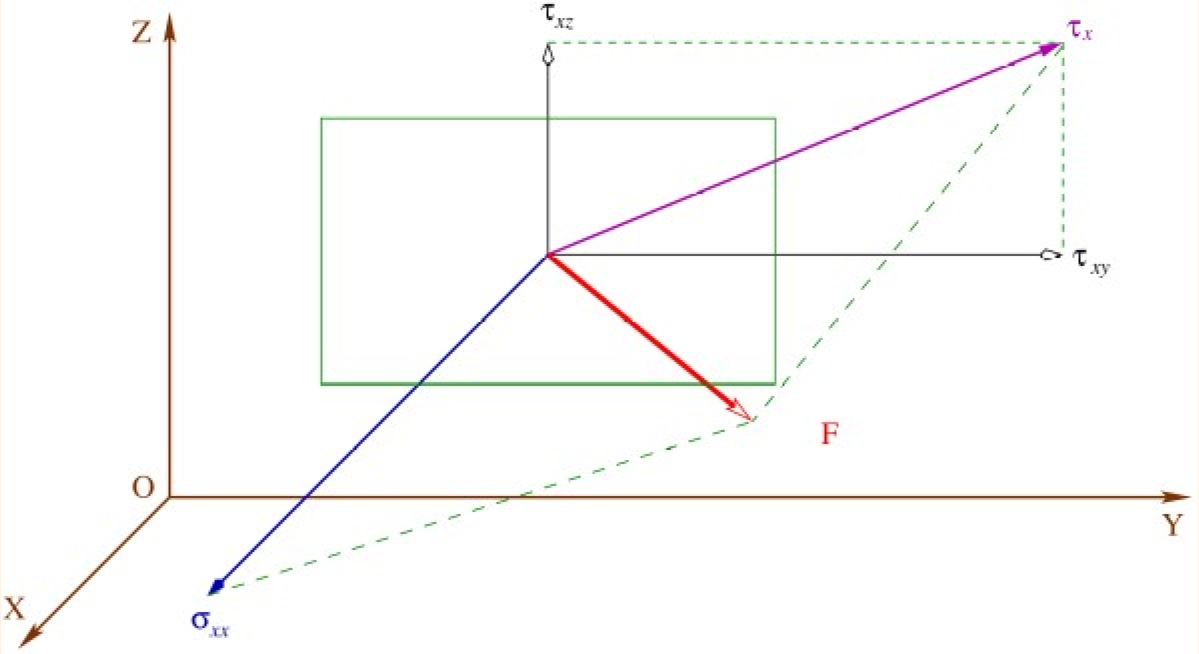
$$\overline{\overline{\Omega}} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

# 4 Tenseur des contraintes

- Le tenseur des contraintes appliquées à la surface d'une particule de forme parallélépipédique de dimensions élémentaires (*dx* $_x$ *dy* $_x$ *dz*) est composé des *contraintes normales* et des *contraintes tangentielles*.

L'effort ***F*** exercé par le fluide environnant donne lieu à deux contraintes:

- Contrainte normale : $\sigma_{xx}$
- Contrainte tangentielle: $\tau_x$



# 4 Tenseur des contraintes

- $$\overline{\overline{C}} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = -p\,\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}$$

$$\overline{\overline{I}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

*Tenseur unitaire*

$$\overline{\overline{\tau}} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx}+p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy}+p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}+p \end{vmatrix}$$

*Tenseur déviateur (nul pour un fluide idéal ou au repos)*

- $$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

# 4 Liaison contraintes/déformations

*Hypothèses fondamentales:*

- La rotation sans déformation de la particule fluide n'engendre aucune contrainte de cisaillement.
- Les contraintes sont proportionnelles aux taux de déformation.
- Le fluide est isotrope.

$$\overline{\overline{\tau}} = \underbrace{\epsilon}_{\text{Viscosité de dilatation}} \vec{\nabla}\vec{q}\,\overline{\overline{I}} + 2\underbrace{\mu}_{\text{Viscosité dynamique}}\overline{\overline{D}}$$

4

# Liaison contraintes/déformations

- **Contraintes normales:**

$$\sigma_{xx} = \epsilon \vec{\nabla} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p$$

$$\sigma_{yy} = \epsilon \vec{\nabla} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p$$

$$\sigma_{zz} = \epsilon \vec{\nabla} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - p$$

- **Contraintes tangentielles:**

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

4

# Liaison contraintes/déformations

- ***Pression hydraustatique locale:***

$$p = -\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right) + \left(\epsilon+\frac{2}{3}\mu\right)\vec{\nabla}\vec{q}$$

- ***Fluide incompressible:*** →

$$p = -\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right) \quad \left(\vec{\nabla}\vec{q} = 0\right)$$

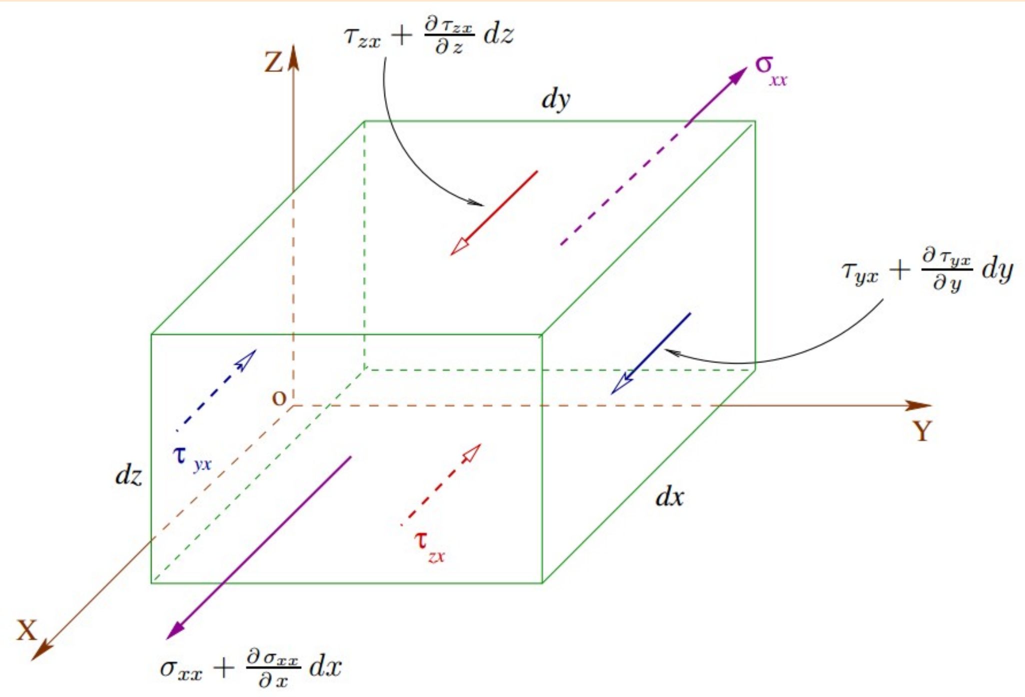
- ***Fluide compressible:*** →

$$\epsilon + \frac{2}{3}\mu = 0$$ *(hypothèse de Stokes)*

# 4 Equations de Navier-Stokes

- *2ème loi de newton :*

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ex} = m\,\vec{\gamma}}$$




- ox : $\sum \vec{F}_x = m\,\vec{\gamma}_x$

$$m\,\gamma_x = \rho\,dx\,dy\,dz\,\frac{Du}{Dt}$$

$$m\,\gamma_x = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dy\,dz - \sigma_{xx}\,dy\,dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx\,dz - \tau_{yx}\,dx\,dz$$

$$+\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx\,dy - \tau_{zx}\,dx\,dy + \rho\,dx\,dy\,dz\,f_x$$

(Force volumique / kg)

4

# Equations de Navier-Stokes

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon \vec{\nabla} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \rho f_x$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\epsilon + \mu) \vec{\nabla} \vec{q}\right] + \mu \Delta u$$

Fluide incompressible: $\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{Du}{Dt} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u}$$

4

# Equations de Navier-Stokes

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \vec{f}_x - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu\nabla^2\vec{q}$$

*Projection:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

4

# Equations de Navier-Stokes

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \vec{f}_x - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{q}$$

*Forces d'inertie* | *Forces de gravité* | *Forces de pression* | *Forces visqueuses*

*Forces par unité de masse (N/kg)*

*Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques*

*Equations de Navier-Stokes en coordonnées sphériques*

*Références*

4

# Cas limites de la viscosité

- *Viscosité nulle:*

  *Equations d'Euler* → *Ecoulements à grand nombre de Reynolds*

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \vec{f}_x - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$$

- *Viscosité très élevée:*

  *Ecoulements à faible nombre de Reynolds ou écoulements de Stokes*

  *ou encore écoulements rampants*

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p = \vec{f}_x + \nu \nabla^2 \vec{q}$$

# Caractéristiques de l’écoulement visqueux

4

- *L'observation de l'écoulement des fluides est aujourd'hui facilité par des moyens de mesures de plus en plus performants. La connaissance de la structure fine des écoulements et en particulier, des phénomènes turbulents, des couches limites, des sillages a permis de mettre en place des modélisations de plus en plus performantes.*
  *Sur la base des expériences de Reynolds, un pas important a été franchi à la fin du dernier siècle concernant la structuration des régimes d'écoulement.*

- *L'expérience de Reynolds consiste à observer l'écoulement de l'eau dans un tube transparent, écoulement au centre duquel est introduit un fin filet de liquide coloré. On observe principalement deux régimes distincts:*

  *• un **régime laminaire** montrant un filet coloré parfaitement rectiligne ne se mélangeant pas à l'écoulement principal. Ce régime est observé aux faibles vitesses, il est parfaitement stable et pratiquement imperturbable.*

  *• un **régime turbulent** se manifestant à partir d'une certaine distance de l'entrée par une oscillation du filet coloré puis à un mélange intime avec le fluide principal.*

# 4 Caractéristiques de l’écoulement visqueux

- *Nombre de Reynolds* → $\Re_e = \dfrac{q.D}{\nu}$

  - *Si* $\Re_e \leqslant 2300$ → ***Ecoulement laminaire***

  - *Si* $\Re_e > 2300$ → ***Ecoulement turbulent***

*Le nombre de Reynolds quantifie l'ensemble des caractéristiques de l'écoulement: la vitesse moyenne du fluide, le diamètre de la conduite, la viscosité cinématique du fluide.*

# Propriétés des écoulements laminaires

4

- *Glissement des diverses couches de fluide les unes sur les autres sans échange de particules entre les différentes couches.*

- *C'est l'organisation et la stabilité qui dominent parmi les propriétés principales.*

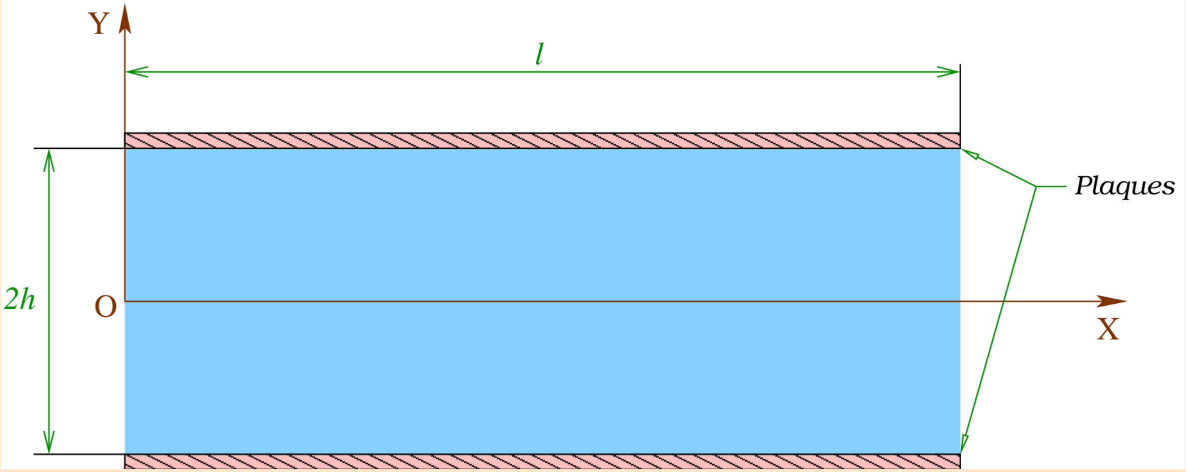
***Applications industrielles les plus importantes***

- *Paliers et patins hydrodynamiques et à tous les domaines de la lubrification.*

- *Ecoulements en milieu poreux, filtrations, applications pétrolières, etc.*

# 4 Applications des équations de N-S
# Ecoulement de Poiseuille

- *Soit un écoulement d'un fluide incompressible entre deux plaques planes parallèles de largeur **L** très importante par rapport à leur longueur **l**. L'écoulement s'effectue sous l'action du gradient de pression.*




*Hypothèses simplificatrices:*

- *L'écoulement est permanent.*
- *Les composantes v et w du vecteur vitesse suivant Y et Z sont nulles.*
- *Les forces de pesanteur sont négligeables (écoulement horizontal).*

# 4 Applications des équations de N-S
# Ecoulement de Poiseuille

- *Equation de continuité:* $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u=u(y,z)$

$$L \gg l \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow u=u(y)$$

- *Equations de N-S:*

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + C_1 y + C_2$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\Rightarrow p=p(x)$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{l}$$

# 4 Applications des équations de N-S
# Ecoulement de Poiseuille

- *Conditions aux limites:* $$\begin{cases} u(y=-h) = 0 \\ u(y=+h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \dfrac{h^2}{2\mu}\dfrac{\Delta p}{l} \end{cases}$$

- *Profile des vitesses :* $$\boxed{u(y) = \frac{h^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{l}[1-(\frac{y}{h})^2]}$$

- *Position de $U_{max}$ :* $$\left.\frac{du(y)}{dy}\right|_{y=d} = 0 \Rightarrow \boxed{d = 0}$$

  **Au centre des plaques**

- *Valeur de $U_{max}$ :* $$u_{max} = u(y=d) \Rightarrow \boxed{u_{max} = \frac{h^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{l}}$$

# 4 Applications des équations de N-S
# Ecoulement de Poiseuille

- *Débit volumique:*

$$Q_v = \int_s u(y)\, ds = \int_{-h}^{+h} u(y)\, L dy = \frac{2 L h^3}{3\mu} \frac{\Delta p}{l}$$

- *Vitesse moyenne :*

$$\bar{u} = \frac{Q_v}{2 h L}$$

$$\bar{u} = \frac{h^2}{3\mu} \frac{\Delta p}{l} = \frac{2}{3} u_{max}$$

- *Autres formes du profile des vitesses:*

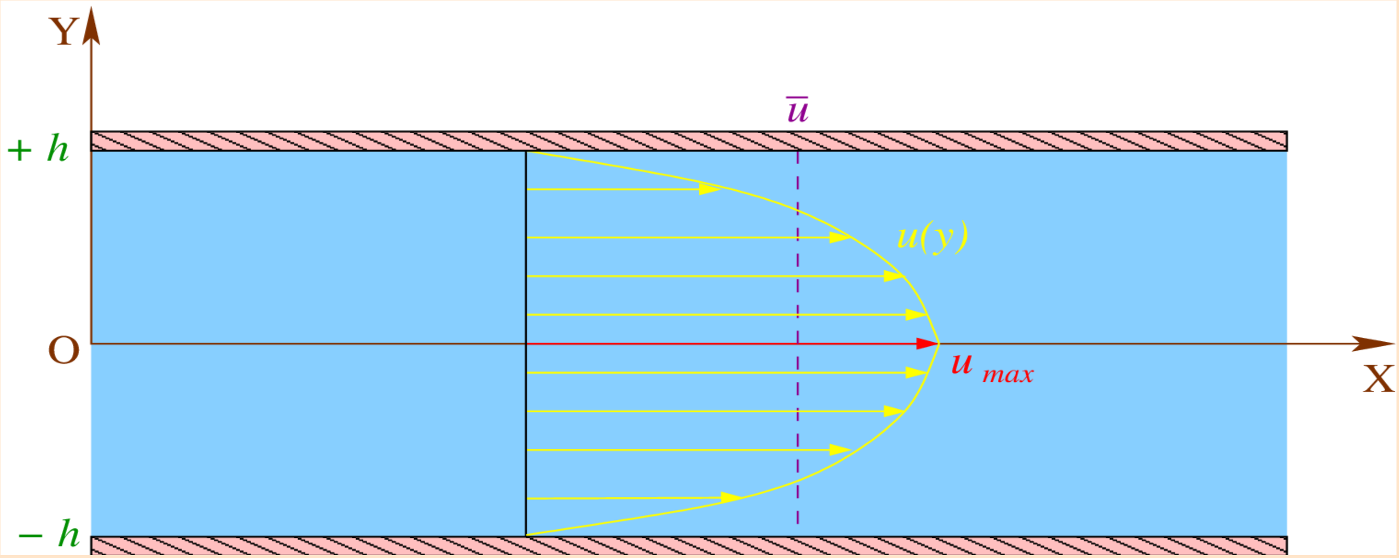
$$\frac{u(y)}{\bar{u}} = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$

**En introduisant la vitesse moyenne**

$$\frac{u(y)}{u_{max}} = 1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2$$

**En introduisant la vitesse maximale**

# 4 Applications des équations de N-S
## Ecoulement de Poiseuille




- *Diamètre hydraulique:* $$D_H = \frac{4S}{P_m}$$

*section de passage*

*périmètre mouillé*

$$D_H = \frac{4 \cdot 2hL}{2(2h+L)} \simeq 4h$$ *(h << L)*

# 4 Applications des équations de N-S
# Ecoulement de Poiseuille

- *Nombre de Reynolds:*

$$\Re_e = \frac{\bar{u}\, D_H}{\nu} \simeq \frac{4\, h\, \bar{u}}{\nu} = \frac{4\, h^3}{3\, \rho\, \nu^2} \frac{\Delta\, p}{l}$$

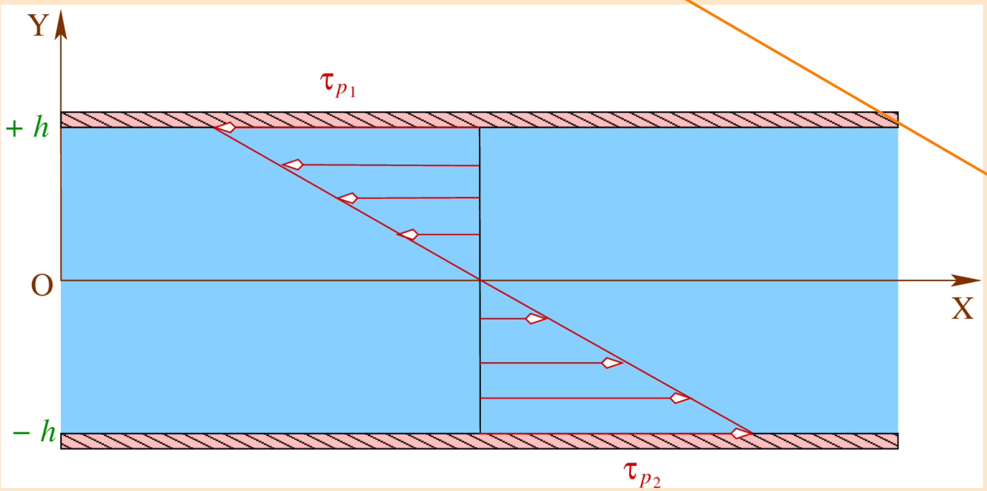
- *Contraintes au sein du fluide:*

$$\tau(y) = \mu \frac{d\, u(y)}{dy} = -\frac{\Delta\, p}{l}\, y$$

- *Contraintes pariétales:*

$$\tau_{p1} = \tau(y=+h) = -\frac{\Delta\, p}{l}\, h$$

$$\tau_{p2} = \tau(y=-h) = \frac{\Delta\, p}{l}\, h$$



# 4 Applications des équations de N-S
# Ecoulement de Poiseuille

- *Nombre de Raynolds:*

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho \bar{u}^2} \simeq \frac{24}{\Re_e} \cdot \frac{l}{h}$$

- *Coefficent de frottement à la paroi:*

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho \bar{u}^2} \simeq \frac{24}{\Re_e} = \lambda \cdot \frac{h}{l}$$

- *Force de traîné sur la plaque:*

$$F_t = S \cdot \tau_p = L h \Delta p$$

# 4 Applications des équations de N-S
# Ecoulement de Couette

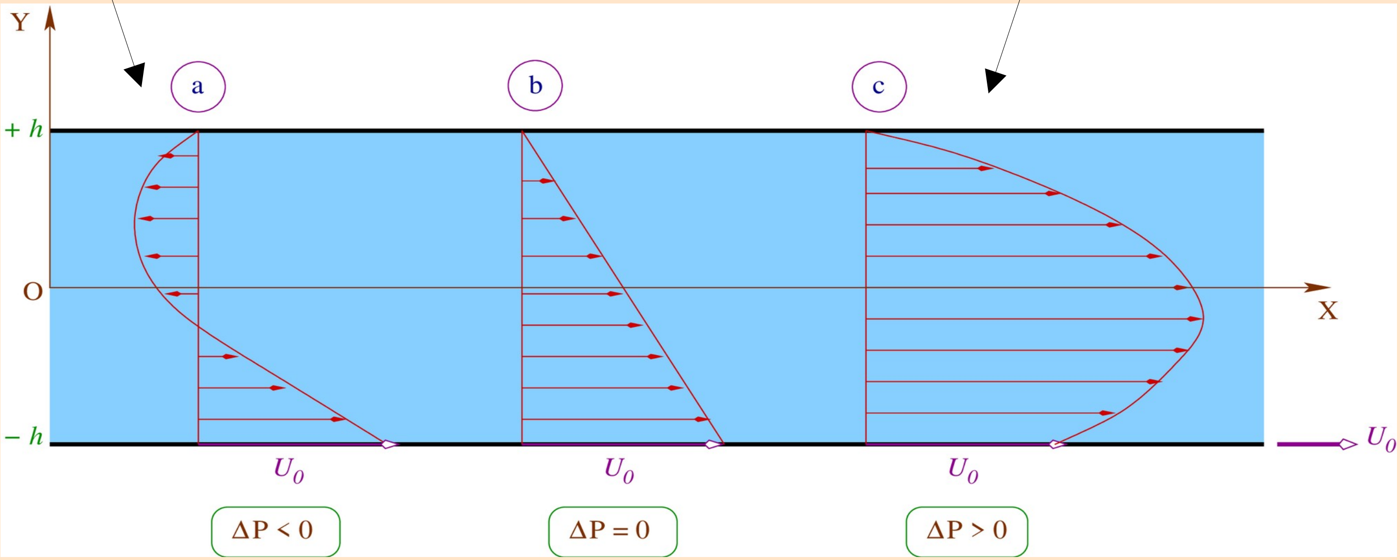
- *C'est l'écoulement de Poiseuille dans lequel la paroi inférieure se déplace parallèlement à elle même avec la vitesse constante $U_0$.*

- *Profil des vitesses :* ➡

$$u(y) = \frac{U_0}{2}\left[1-\frac{y}{h}\right] + \frac{h^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{l}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$

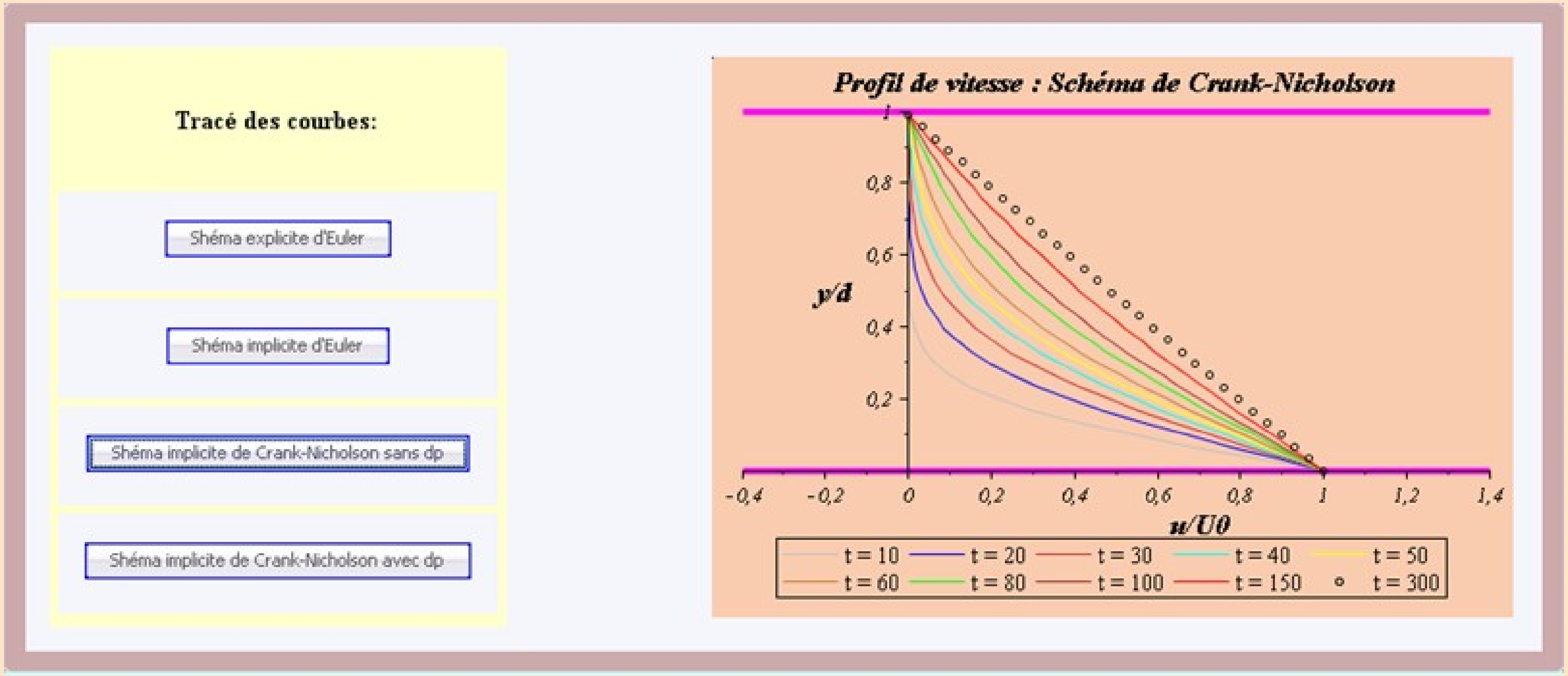
**Gradient de pression défavorable (dp/dx > 0)**

**Gradient de pression favorable (dp/dx < 0)**



# 4 Applications des équations de N-S
# Ecoulement de Couette instationnaire

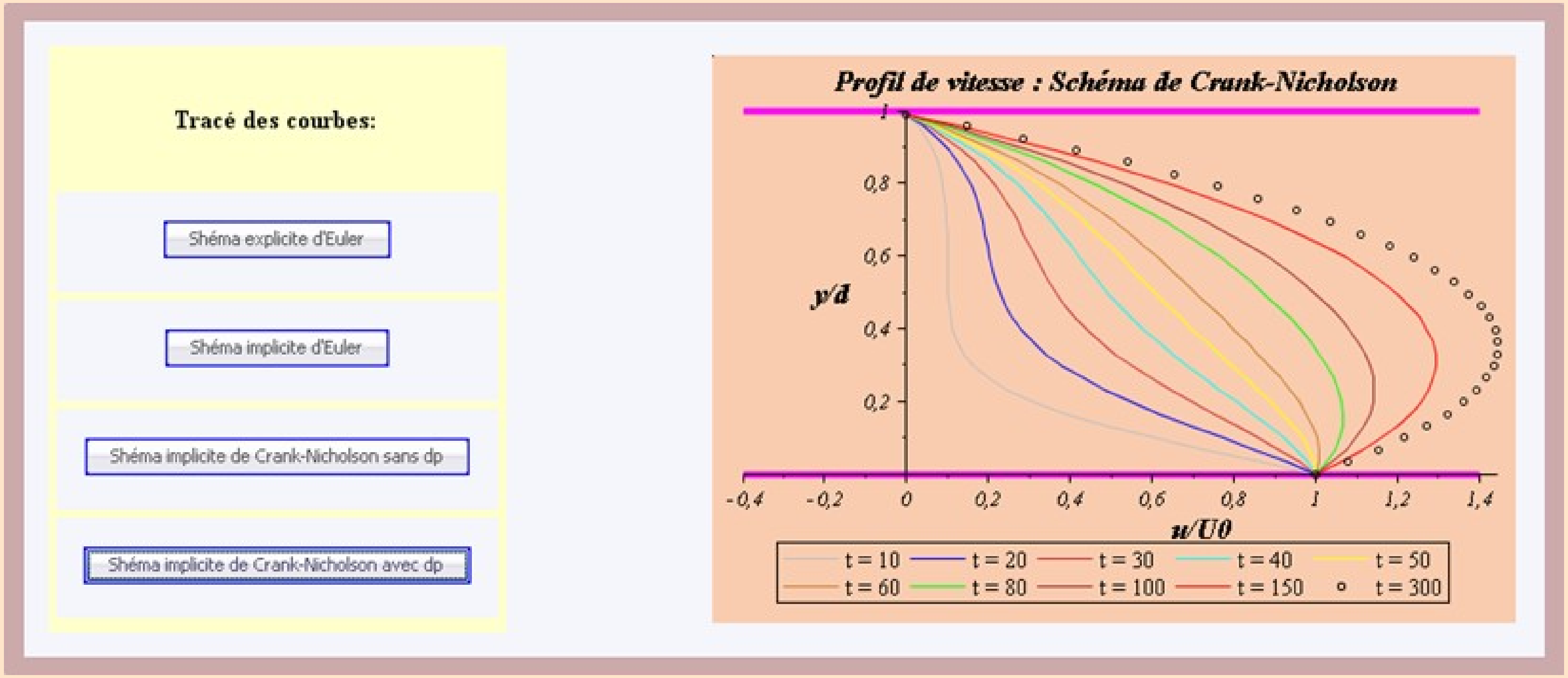
*Cas du gradient de pression nulle*




$$\frac{dp}{dx} = 0$$

# 4 Applications des équations de N-S
# Ecoulement de Couette instationnaire

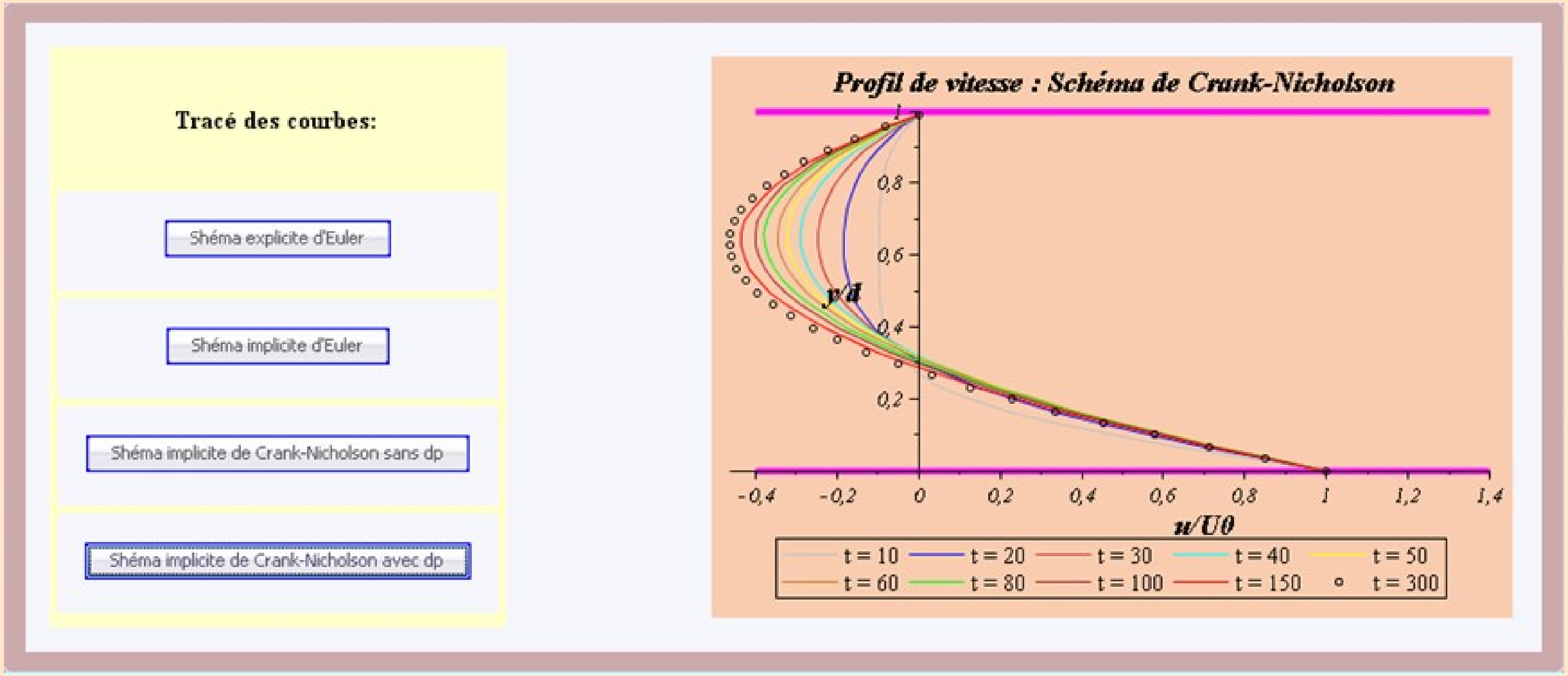
*Cas du gradient de pression favorable*




$$\frac{dp}{dx} < 0$$

# 4 Applications des équations de N-S
# Ecoulement de Couette instationnaire

Cas du gradient de pression défavorable



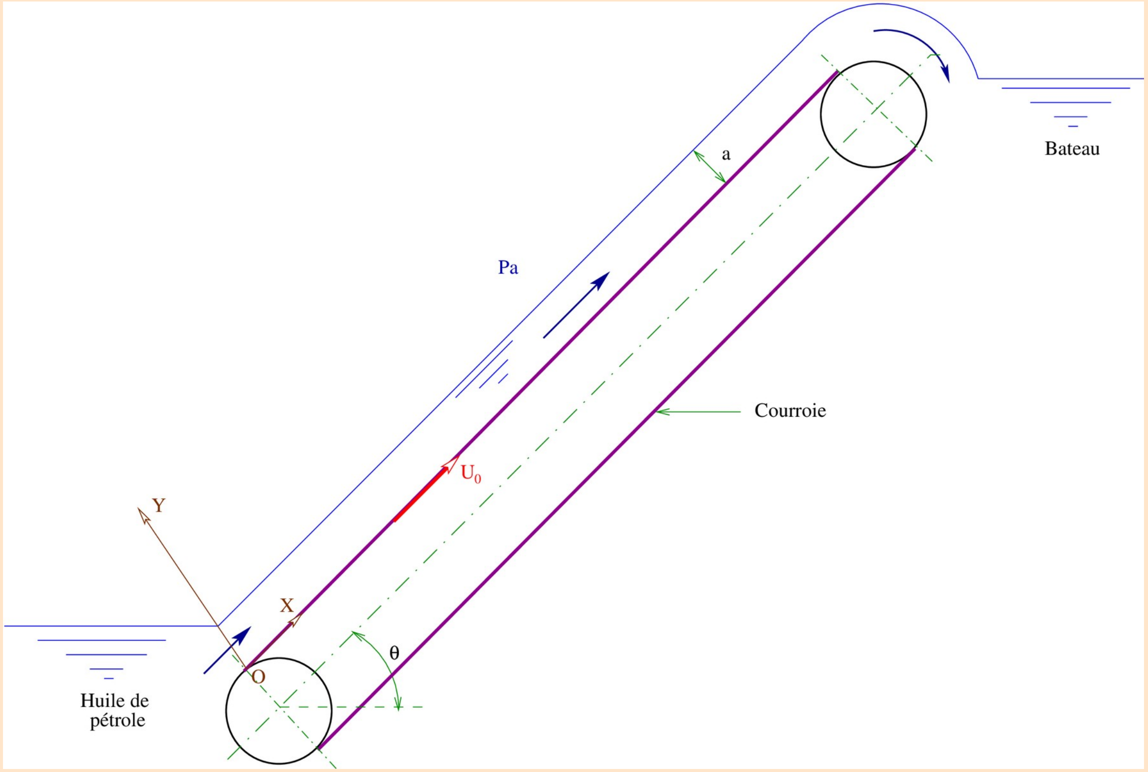

$$\frac{dp}{dx} > 0$$

# 4 Applications des équations de N-S
# Exercice d'application

- *Un dispositif convoyeur-courroie monté sur un bateau est utilisé pour récupérer de l'huile de pétrole qui contamine la surface de la mer.*
  *On suppose que l'écoulement est permanent, incompressible, visqueux et que le dispositif fonctionne en continu c-à-d que le film d'huile d'épaisseur **a** n'est pas discontinu. En suppose, de plus, que la courroie, fonctionnant à une vitesse $U_0$ constante, a une largeur **L** (perpendiculaire au papier) très grande.*

  *1- Déterminer l'expression du débit volumique d'huile qui peut être porté sur le bateau.*

  *2- En maintenant l'angle d'inclinaison $\theta$ constant, quel est le débit maximal qu'on peut récupérer sur le bateau?*



# Applications des équations de N-S

4

# Exercice d'application

*Hypothèses simplificatrices:*

- *L'écoulement est stationnaire* → $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t} = 0}$
- *Fluide incompressible* → $\boxed{\rho = C^{te}}$
- *Fluide visqueux* → *adhérence à la courroie* → *(C.L)*
- *Ecoulement plan ou // courroie* → $\boxed{v = 0}$
- *Courroie de largeur très grande suivant Z* → $\boxed{w = 0}$ $\boxed{\dfrac{\partial q}{\partial z} = 0}$
- *Forces de pesanteur non négligeables (écoulement incliné)* →

$$\boxed{f_x = -g\sin(\theta)} \quad \boxed{f_y = -g\cos(\theta)} \quad \boxed{f_z = 0}$$

# 4 Applications des équations de N-S
# Exercice d'application

- *Equation de continuité:* $\Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y,z)$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow u = u(y)$$

- *Equations de N-S:*

$$0 = -g\sin(\theta) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$0 = -g\cos(\theta) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow P(x,y) = -\rho g\cos(\theta) + f(x)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow P = P(x,y)$$

# 4 Applications des équations de N-S
# Exercice d'application

- *Condition à la surface:* → $P(x,a) = P_a$

$$\Rightarrow \ f(x) = P_a + \rho g a \cos(\theta) = C^{te}$$

- *Champ de pression au sein du fluide:*

→ $P(x,y) = P(x) = P_a + \rho g \cos(\theta)\,(a-y)$

- *1ère équations de N-S:* → $u(y) = \dfrac{g\sin(\theta)}{2\nu} y^2 + C_1 y + C_2$

# Applications des équations de N-S
# Exercice d'application

- *Conditions aux limites:*
  - *Adhérence du fluide à la courroie:* $u(y=0) = U_0$
  - *Contrainte nulle à la surface (vitesse minimale) :* $\left.\dfrac{du}{dy}\right|_{y=a} = 0$

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{g\,a\sin(\theta)}{\nu} \\ C_2 = U_0 \end{cases}$$

- *Profile des vitesses :* $u(y) = U_0 - \dfrac{g\sin(\theta)}{2\,\nu}(2a - y)\,y$

# 4 Applications des équations de N-S
# Exercice d'application

- *Débit qui peut être porté sur le bateau :*

$$Q_v = \int_S u(y)\, ds = \int_0^a u(y)\, L\, dy = U_0 L a - \frac{L g \sin(\theta)}{3\nu} a^3$$

- *si $\theta = C^{te}$:*

$$Q_v = Q_v(a)$$

$$\frac{dQ_v}{da} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{\nu U_0}{g \sin(\theta)}}$$

- *Débit maximal qu'on peut récupérer sur le bateau :*

$$Q_{v\,max} = \frac{2}{3} L U_0 \sqrt{\frac{\nu U_0}{g \sin(\theta)}}$$

4

# Lubrification hydrodynamique

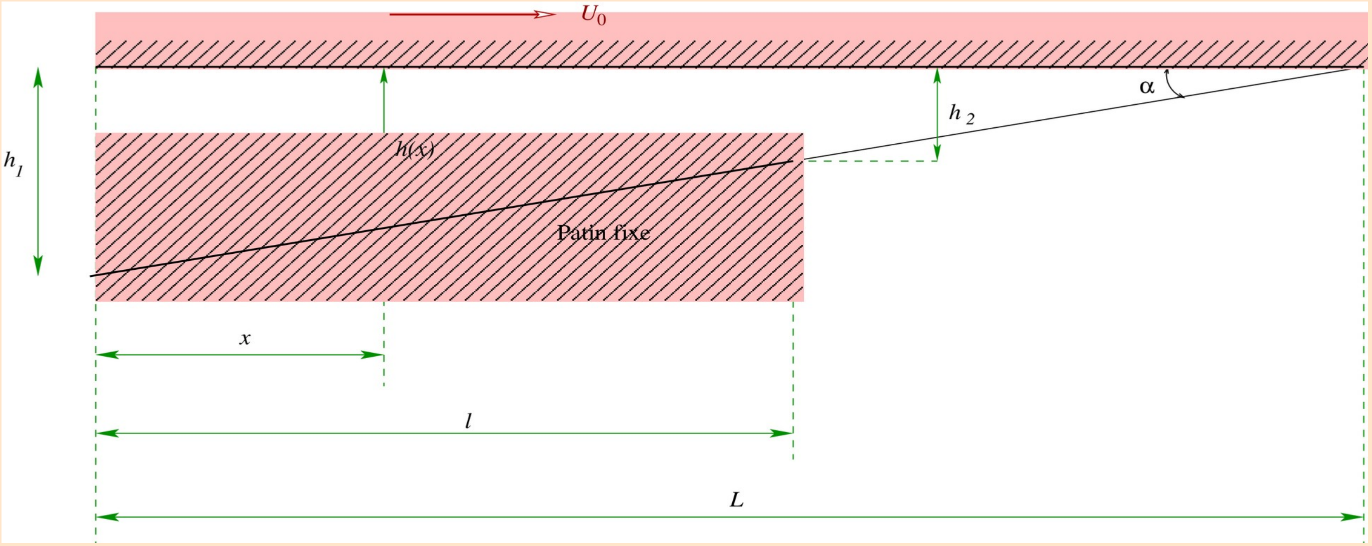
- *Nous allons considérer les écoulements "à faible nombre de Reynolds", appelés aussi "écoulements de Stokes" qui sont régis par les EDP linéaires. Ces équations peuvent avoir une solution exacte pour certains problèmes simples sinon, pour les problèmes plus compliqués, le passage aux solutions approximatives est nécessaire.*

- *Physiquement, ceci arrive quand la viscosité du fluide est élevée, quand la masse volumique est faible, quand la vitesse change rapidement à travers une faible distance produisant un brusque gradient spatial ou bien quand la vitesse convective est suffisamment faible.*

- ***Exemples :***
  - *Ecoulements de sirops.*
  - *Ecoulements de miels.*
  - *Ecoulements de diverses huiles en lubrification.*

# 4 Lubrification hydrodynamique

- *Un écoulement laminaire d'une grande importance pratique est celui de la lubrification hydrodynamique. Nous allons développer cette théorie dite "théorie du coin d'huile" à travers un exemple très simple utilisé en industrie qui est celui du "patin hydrodynamique". Nous allons déterminer l'équation de la charge portante maximale que peut supporter le système ainsi que la force de traînée requise pour mettre en mouvement la plaque supérieure à la vitesse $U_0$.*




*Soit un patin incliné, fixe, de longueur **L**, de largeur unité et un plan mobile animé d'une vitesse $U_0$ entraînant par son mouvement une mince couche d'huile entre les deux surfaces.*

4

# Lubrification hydrodynamique

- *Nous supposons que la pente est très faible de telle sorte que les calculs effectués pour lécoulement de Couette restent valables. Nous avons alors après simplification des équations de N-S:*

$$\frac{dp}{dx} = \mu \cdot \frac{d^2u}{dy^2}$$

- *Puisque la pression ne varie pas en fonction de y à cause de la très faible épaisseur du film d'huile, l'intégration de cette équation nous donne:*

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

- *Les constantes sont déterminées par les deux conditions d'adhérence du fluide aux parois:*

$$u(y=0) = 0$$

$$u(y=h) = U_0$$

# 4 Lubrification hydrodynamique

- *Profil des vitesses* → $$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\,y(y-h) + \frac{U_0}{h}\,y$$

- *Débit volumique passant entre les plans* → $$Q_v = \int_0^h u(y)\,dy = \frac{U_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}$$

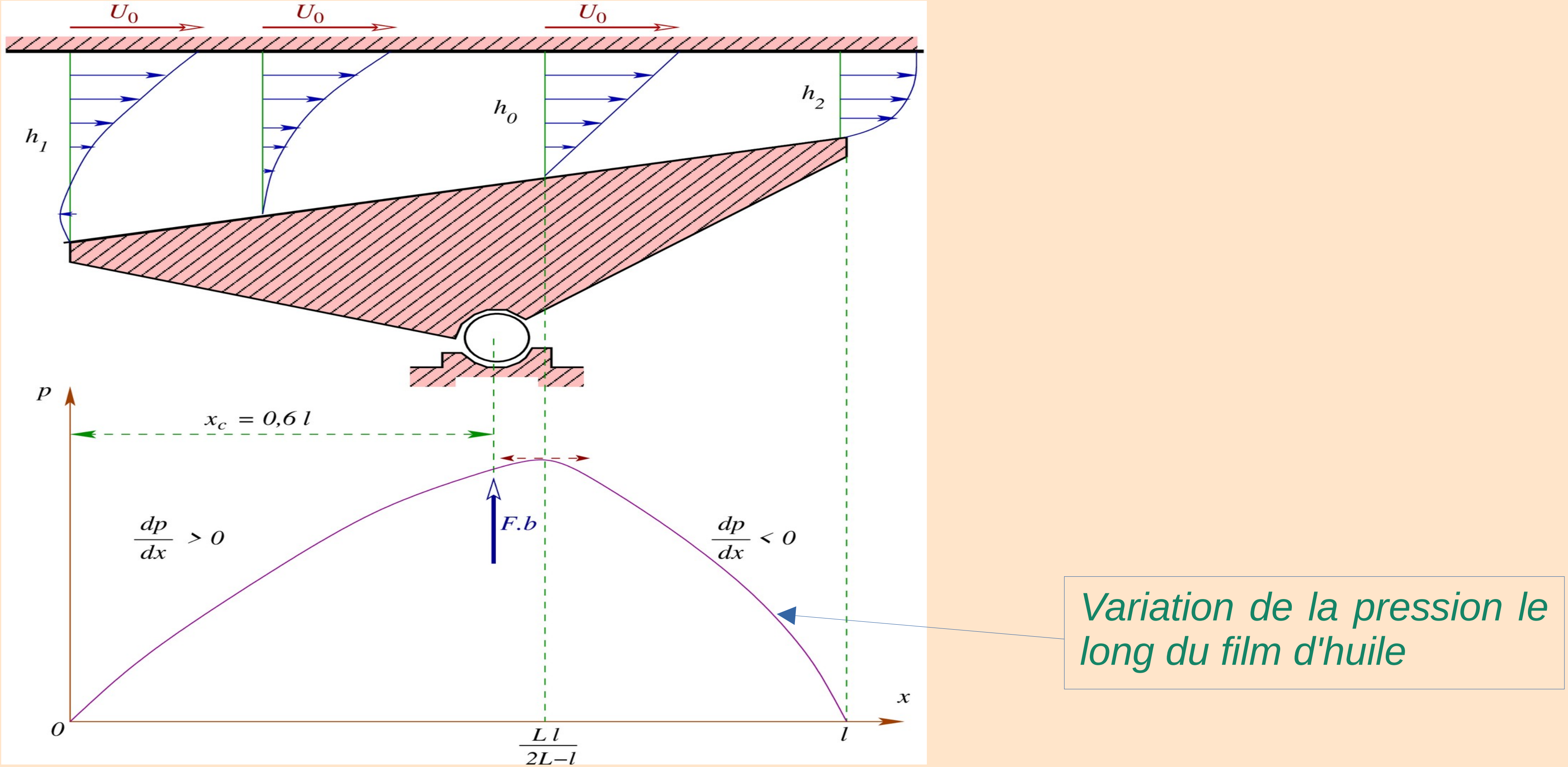
- *Formule de Reynolds* → $$\frac{dp}{dx} = 6\mu U_0\left(\frac{1}{h^2} - \frac{2}{h^3}\frac{Q_v}{U_0}\right)$$

# 4 Lubrification hydrodynamique

- *Loi du plan supérieur* → $h(x) = (L-x)\tan(\alpha) \simeq \alpha(L-x)$
- *Répartition de pression* → $p(x) = P_a + \dfrac{6\mu U_0 x(l-x)}{\alpha^2(2L-l)(L-x)^2}$
- *Pression maximale* → $p_{max} = P_a + \dfrac{3\mu U_0 l^2(L-l)}{2h_2^2 L(2L-l)}$
- *Position de $P_{max}$* → $x_m = \dfrac{L\,l}{2L-l}$

# 4 Lubrification hydrodynamique

- *Ce dispositif constitue le principe de la buté Michell qui est utilisée dans la construction des pivoteries des groupes turbo alternateurs à axe vertical. On peut ainsi supporter les charges de plusieurs centaines de tonnes.*



4

# Lubrification hydrodynamique

- *Charge portante*

$$F = \int_0^l (p - P_a)\, dx = \frac{\mu U_0 l^2}{h_2^2} C_p$$

$$C_p = \frac{6 h_2^2}{(h_1 - h_2)^2} \left[ \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right) - 2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right]$$

- *Point d'application*

$$F \cdot x_c = \int_0^l (p - P_a) x\, dx$$

4

# Lubrification hydrodynamique

- *Contrainte au sein du film*

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \left[\frac{U_0}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(h-2y)\right]$$

$$\tau_0 = \frac{\mu U_0}{h} - \frac{h}{2}\frac{dp}{dx}$$ *sur le patin*

$$\tau_h = \frac{\mu U_0}{h} + \frac{h}{2}\frac{dp}{dx}$$ *sur le plan supérieur*

- *Force de frottement*

$$F_f = \int_0^l \tau_h \, dx = \frac{\mu U_0 l}{h_2} C_f$$

$$C_f = \frac{2h_2}{(h_1-h_2)}\left[2\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right) - 3\frac{h_1-h_2}{h_1+h_2}\right]$$

# Lubrification hydrodynamique

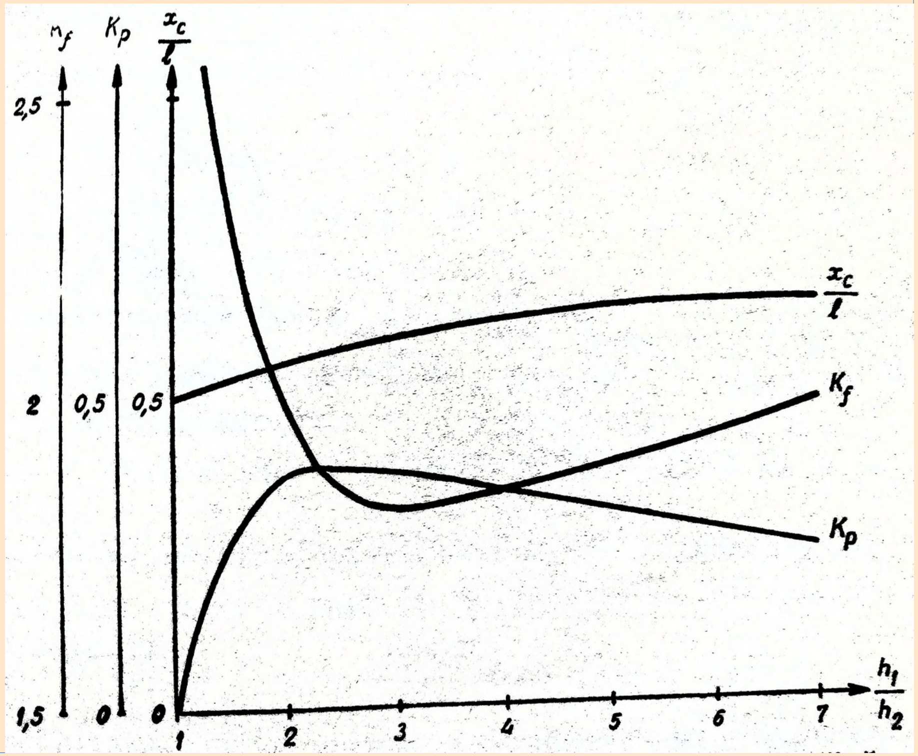
- *Coefficient de frottement équivalent*

$$f = \frac{F_f}{F} = \frac{h_2}{l} \cdot \frac{C_f}{C_p}$$

- *Paramètres caractérisant le fonctionnement*

$$K_p = \sqrt{C_p} = \sqrt{\frac{F}{\mu U_0} \cdot \frac{h_2}{l}}$$

$$K_f = \frac{C_f}{C_p} \sqrt{\frac{F}{\mu U_0} \cdot \frac{h_2}{l}}$$



4

# Lubrification hydrodynamique

- *Fonctionnement optimal du palier*
- *Pour une épaisseur donnée $h_2$ du film d'huile à la sortie, on veut obtenir une charge portante maximale. Dans ce cas, on choisira $K_p$ maximal, ce qui correspond à:*

$$\frac{h_1}{h_2} = 2{,}25 \quad ; \quad \frac{x_c}{l} = 0{,}58$$

- *On veut obtenir un coefficient de frottement minimal (puissance perdue minimale), ce qui correspond à:*

$$\frac{h_1}{h_2} = 3{,}00 \quad ; \quad \frac{x_c}{l} = 0{,}61$$

- *Pratiquement, on choisit une valeur moyenne entre les deux valeurs optimales précédentes:*

$$\frac{x_c}{l} = 0{,}60 \quad ; \quad \frac{h_1}{h_2} = 2{,}75 \quad ; \quad K_f = 1{,}82 \quad ; \quad K_p = 0{,}39$$

# Lubrification hydrodynamique

4

- *La solution technologique usuelle permettant d'assurer automatiquement ce fonctionnement optimal, consiste à articuler les patins. Pour que le patin soit en équilibre, il faut que la résultante des forces de pression **F.b** (**b** étant la largeur du patin) passe par l'axe d'articulation.*
  *Si on place cet axe à une distance $x_c = 0{,}6\ l$, on est certain d'obtenir automatiquement le fonctionnement hydrodynamique optimal. L'équilibre obtenu est stable; les courbes d fonctionnement du patin montrent en effet que $x_c/l$ et $h_1/h_2$ varient dans le même sens.*
  *Si par exemple $h_1/h_2$ diminue, la résultante se déplace donc vers la gauche et tend à faire basculer le patin dans le sens qui augmente $h_2/h_1$.*
  *Si $h_2/h_1$ augmente, la résultante se déplace donc vers la droite et tend à faire basculer le patin dans le sens qui augmente $h_1/h_2$. L'équilibre est donc bien stable.*

# 4 Lubrification hydrodynamique

- *Si l'on tient compte des fuites latérales, la pression devient à la fois fonction de $x$ et de $z$. L'équation de Reynolds s'écrira alors:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\mu U_0 \frac{dh}{dt}$$

- *Cette équation n'admet pas de solution exacte. Le recours aux méthodes numériques est obligatoire pour la résoudre.*