

1- Equations de base de la Mécanique Des Fluides

1.1- Introduction

La mécanique des fluides (**M.D.F.**) est la partie des sciences physiques qui étudie le comportement des fluides au repos ou en mouvement. Elle est d'une grande importance dans de nombreux domaines: l'aéronautique, la chimie, le génie civil, la mécanique, la météorologie, la construction navale et l'océanographie.

Les principes de la mécanique des fluides sont appliqués dans la propulsion à réaction, dans les turbines, les compresseurs et les pompes. En ingénierie, lorsque l'on utilise les pressions de l'eau et de l'huile, on suit les principes de l'*hydraulique*.

La mécanique des fluides peut être divisée en deux grandes catégories: la statique des fluides, ou *hydrostatique*, qui modélise les fluides au repos, et la *dynamique des fluides*, qui étudie les fluides en mouvement. Le terme *hydrodynamique* s'applique à l'écoulement des liquides ou des gaz à faible vitesse. Dans ce cas, le gaz est considéré comme incompressible: sa masse volumique est constante. L'*aérodynamique*, ou dynamique des gaz, s'intéresse au comportement des gaz lorsque les changements de vitesse et de pression sont trop importants pour pouvoir négliger la compressibilité des gaz.

1.1.1- Statique des fluides (ou hydrostatique)

Un fluide au repos présente une caractéristique fondamentale: la force qui s'exerce sur une particule quelconque de ce fluide est la même dans toutes les directions de l'espace. Si ce n'était pas le cas, la résultante totale des forces appliquées à toutes les particules du fluide serait non nulle, et les particules se déplaceraient dans la direction de la résultante. Ainsi, la pression (c'est-à-dire la force par unité de surface) qu'exerce le fluide sur les parois du récipient est perpendiculaire aux parois, en tout point de celles-ci. Si cette pression n'était pas perpendiculaire

aux parois, il apparaîtrait une composante tangentielle non nulle de la force, ce qui provoquerait un déplacement du fluide le long de la paroi.

Ce concept fut d'abord formulé sous une forme plus générale par le mathématicien et philosophe français Blaise Pascal en 1647. D'après la *loi de Pascal*, la pression d'un fluide en milieu fermé est transmise uniformément dans toutes les directions et dans toutes les parties du récipient, à condition que les différences de pression dues au poids du fluide soient négligeables. Cette loi a des applications extrêmement importantes en hydraulique.

Dans un récipient ouvert, la surface d'un fluide au repos est toujours perpendiculaire à la force auquel il est soumis. Si la force de gravité est la seule force agissant sur le liquide, la surface est horizontale. Si, outre la gravité, d'autres forces s'exercent sur le liquide, la surface libre prendra une forme dépendant de celles-ci. Par exemple, si l'on fait tourner un verre contenant de l'eau autour de son axe vertical, la force de gravité et la force centrifuge s'exercent sur l'eau, et la surface prend alors la forme d'une parabole, dans un plan perpendiculaire à la force résultante.

Si la gravité est la seule force qui agit sur un liquide en récipient ouvert, la pression en tout point du liquide est proportionnelle à la masse volumique d'une colonne verticale de ce liquide dont la hauteur est la profondeur du point considéré. Cela est vrai si l'on néglige la pression du milieu extérieur. Cette force ne dépend donc ni de la taille ni de la forme du récipient. Ainsi, la pression qui s'exerce au bas d'un tuyau vertical rempli d'eau et de 15 m de hauteur est égale à la pression qui s'exerce au fond d'un lac d'environ 15 m de profondeur.

Le second principe important de la statique des fluides fut découvert par le mathématicien et philosophe grec Archimède. Le *principe d'Archimède* stipule qu'un corps immergé est soumis à une force verticale ascendante égale au poids du liquide déplacé par le corps. Cela explique pourquoi un navire lourdement chargé flotte: son poids total est égal au poids de l'eau qu'il déplace, et le navire exerce une force de poussée qui le maintient à la surface.

Le point où toutes les forces génèrent l'effort de poussée est appelé le centre de poussée. Il correspond au centre de gravité du fluide déplacé. Le centre de poussée d'un corps flottant est placé directement au-dessus du centre de gravité de ce corps. Plus est grande la distance entre ces deux points, plus la stabilité de ce corps est importante.

Le principe d'Archimède permet de déterminer la densité d'un corps dont la forme est tellement irrégulière que son volume ne peut être mesuré directement. Si ce corps est pesé dans l'air et dans l'eau, la différence de poids entre ces deux pesées est égale au poids du volume d'eau déplacé,

pois qui permet alors de déterminer le volume du corps. C'est ainsi que la densité d'un corps (masse divisée par le volume) peut être aisément mesurée.

1.1.2- Dynamique des fluides (ou hydrodynamique)

Cette partie de la mécanique des fluides traite des lois régissant le comportement des fluides en mouvement; ces lois sont considérablement plus complexes que celles de l'hydrostatique.

Avec l'invention de la pompe à vis que les scientifiques lui attribuent, Archimède fut le premier à appliquer la dynamique des fluides de façon pratique. D'autres machines et appareillages hydrauliques furent mis au point par les Romains. Ils n'utilisaient pas seulement la vis d'Archimède pour irriguer ou pomper dans les mines!; ils construisirent également de grands systèmes d'aqueducs, certains étant encore utilisés aujourd'hui. L'architecte et ingénieur romain Vitruve inventa la roue à eau horizontale, au 1^{er} siècle av. J.-C., ce qui révolutionna les techniques de broyage des grains.

Malgré ces premières applications pratiques de la dynamique des fluides, il n'existait que peu ou pas de théorie fondamentale. Après Archimède, plus de 1800 années se sont écoulées avant qu'une avancée scientifique significative n'intervienne, grâce au mathématicien et physicien italien Evangelista Torricelli, qui inventa le baromètre en 1643 et formula la loi de Torricelli, qui relie la vitesse d'écoulement d'un liquide par l'orifice d'un récipient à la hauteur de liquide contenu dans le récipient au-dessus de l'orifice. Plus tard, le mathématicien suisse Leonhard Euler appliqua aux fluides sans frottement les lois dynamiques du mathématicien et physicien Isaac Newton.

Euler reconnut le premier que des lois adaptées à la dynamique des fluides ne peuvent être exprimées que de façon approximative. On suppose en effet très souvent que le fluide est incompressible et idéal : on néglige donc frottements et viscosité.

1.1.3- Ecoulements des fluides parfaits

Un fluide est considéré comme parfait si l'on peut négliger sa viscosité: il s'écoule alors sans frottement.

Ecoulements incompressibles:

On considère ici que la masse volumique du fluide est constante. Les écoulements incompressibles suivent le *principe de Bernoulli*, du nom du mathématicien et scientifique suisse Daniel Bernoulli. D'après ce principe, l'énergie mécanique totale d'un écoulement de fluide incompressible et sans frottement est constante le long d'une *ligne de courant* de cet écoulement. Les lignes de courant sont des lignes d'écoulements imaginaires parallèles à la direction locale de l'écoulement et qui, pour un écoulement uniforme, correspondent à la trajectoire des molécules de fluide prises individuellement. Le principe de Bernoulli conduit à une relation entre la pression, la vitesse du fluide et la force de gravitation. Il montre que la vitesse du fluide augmente lorsque la pression exercée sur le fluide diminue. Ce principe est important pour la conception des buses, les mesures de flux, et peut également être utilisé pour déterminer la poussée sur les ailes d'un avion en vol.

Ecoulements compressibles:

L'intérêt pour les écoulements compressibles apparut avec l'avènement des turbines à vapeur dans les années 1880. Pour la première fois, on utilisait des flux de vapeur à grande vitesse; le besoin de turbines adaptées conduisit à l'étude approfondie des écoulements incompressibles. Cependant, les avancées dans ce domaine sont dues aux turbines à gaz et à la propulsion à réaction, découverte dans les années 1930. Vers la fin du XIX^e siècle, Prandtl apporta des contributions considérables à la théorie des fluides compressibles. Celle-ci devint d'une importance considérable pendant la Seconde Guerre mondiale, avec l'apparition des avions à grande vitesse et des fusées.

Lors de l'écoulement compressible d'un gaz, sa densité change lorsqu'il est soumis à des variations importantes de vitesse et de pression. Sa température se modifie également, ce qui complique les phénomènes à étudier. L'écoulement d'un gaz compressible dépend du rapport de la

vitesse du gaz sur la vitesse de propagation du son dans le milieu. La vitesse du son dans un gaz est proportionnelle à la racine carrée de sa température absolue. Par exemple, la vitesse du son dans l'air à 20 °C, ou 293 K, est égale à 344 m/s.

On peut caractériser les écoulements compressibles par le nombre de Mach, rapport de la vitesse locale du fluide à la vitesse locale du son. Ainsi, les écoulements supersoniques ont un nombre de Mach supérieur à 1.

1.1.4- Ecoulements des fluides visqueux

Les premières expériences sur l'étude du frottement pour des écoulements à faible vitesse dans des tuyaux ont été effectuées par le physiologue français Jean-Louis Poiseuille, qui s'intéressait à l'écoulement du sang, et dans les années 1840 par l'ingénieur hydraulicien allemand Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen. Un essai pour prendre en compte les effets de la viscosité dans les équations mathématiques fut d'abord fait par l'ingénieur français Henri Navier en 1827. Puis, en 1845, le mathématicien britannique George Gabriel Stokes précisa les équations fondamentales pour des fluides incompressibles visqueux. Celles-ci sont maintenant connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes. Elles sont tellement complexes qu'elles ne peuvent être résolues que dans les cas d'écoulements simples. Ces équations permettent notamment de modéliser l'écoulement d'un fluide réel dans un tuyau droit. Dans ce cas, le principe de Bernoulli n'est pas applicable car une partie de l'énergie mécanique totale du fluide, se dissipe par frottement et provoque une chute de la pression le long du tuyau. Les équations suggèrent que, pour un tuyau et un fluide définis, cette chute de pression est proportionnelle à la vitesse d'écoulement du fluide. Des expériences réalisées d'abord vers le milieu du XIX^e siècle montrèrent que cela est exact uniquement pour des vitesses faibles; à des vitesses supérieures, la chute de pression est plutôt proportionnelle au carré de la vitesse d'écoulement du fluide. Ce phénomène resta inexpliqué jusqu'en 1883, date où l'ingénieur britannique Osborne Reynolds montra l'existence de deux types d'écoulements visqueux dans les tuyaux. À de faibles vitesses, les particules du fluide suivent les courants (flux laminaire) et les résultats concordent avec les prédictions analytiques. À des vitesses supérieures, le flux prend une forme variable ou tourbillonnaire (flux turbulent) qui ne peut être parfaitement prédite. Encore maintenant, on ne sait pas donner une définition analytique à de tels écoulements. Pour les étudier, on a recours aux

expériences et à l'utilisation de puissants logiciels de calcul. Reynolds établit également que la limite entre flux laminaire et flux turbulent dépend d'un paramètre unique, le *nombre de Reynolds*. Si le nombre de Reynolds (qui est le produit du diamètre du tuyau, de la vitesse et de la masse volumique du fluide divisé par la viscosité du fluide) est inférieur à 2300, le flux du fluide, dans le tuyau est laminaire; à des valeurs supérieures, il est turbulent. Le concept du nombre de Reynolds est fondamental pour une grande partie de la mécanique des fluides moderne.

- Ecoulement laminaire dans les conduites:

L'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite rectiligne s'effectue de telle façon que les lignes de courant glissent les unes sur les autres tout en restant parallèles; l'écoulement est alors appelé *laminaire*.

- Ecoulement turbulent dans les conduites:

Lorsque le nombre de Reynolds atteint la valeur de 2300 environ, l'écoulement devient *turbulent*, c'est-à-dire que les vitesses dans la conduite varient de façon aléatoire. Les profils des vitesses moyennes par rapport au temps ne sont plus paraboliques comme c'est le cas pour le régime laminaire, mais elles ont une forme plus aplatie. Ceci est dû à une augmentation de perte de charge dans la conduite circulaire lorsque l'écoulement y est turbulent.

Dans les écoulements compressibles, on constate également des fluctuations de masse volumique et de température qui sont reliées aux fluctuations de vitesse.

1.2- Equations fondamentales de la M.D.F.

1.2.1- Equation de continuité

On appelle *débit* la quantité de fluide qui passe à travers la section d'écoulement pendant l'unité de temps. Cette quantité peut s'exprimer en m³/s, l/s ou en Kg/s.

L'équation de continuité traduit la conservation du débit massique \dot{m} qui s'écrit:

$$\dot{m} = \rho S V_m = C^{te} \quad (1.1)$$

où: ρ : masse volumique du fluide;

S : section de passage de la conduite;

V_m : vitesse moyenne du fluide dans la section S .

Exemple:

Un piston de pompe à eau de diamètre $D=60$ cm se déplace à la vitesse $V_1=1,5$ m/s. Quelle est la vitesse de l'eau dans la conduite de refoulement de la pompe dont le diamètre est $d=40$ cm ?

Le débit déplacé par le piston étant égal à celui qui passe dans la conduite de refoulement, on a alors:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho S_1 V_1 = \rho S_2 V_2 \\ \Rightarrow V_2 &= V_1 \frac{S_1}{S_2} = V_1 \left(\frac{D}{d} \right)^2 \\ V_2 &= 1,5 (6/4)^2 \qquad \text{d'où} \qquad \underline{V_2 = 3.375 \text{ m/s.}} \end{aligned}$$

1.2.2- Equation de Bernoulli

Cette équation traduit la conservation de l'énergie totale le long d'un filet de liquide parfait (non visqueux) en mouvement permanent (indépendant du temps). Elle s'écrit:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + g z = C^{te} \qquad [\text{J/Kg}] \qquad (1.2)$$

où: P/ρ : énergie potentielle due à la pression;

$V^2/2$: énergie cinétique due à la vitesse;

$g z$: énergie potentielle due à l'altitude.

Au cours du déplacement d'un liquide parfait, une des formes d'énergie peut se transformer en une autre forme, mais cette transformation doit s'effectuer de telle façon que l'énergie mécanique reste constante (Fig. 1.1).

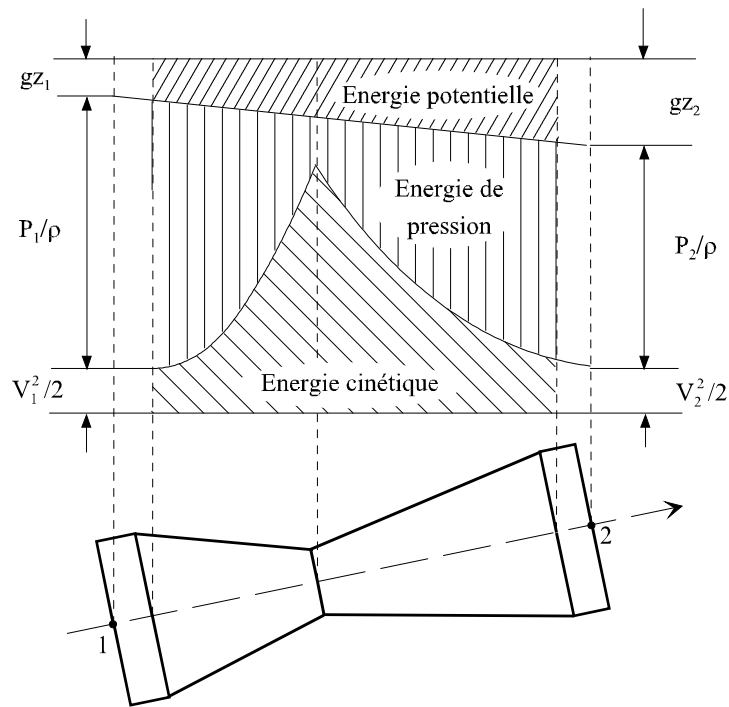


Figure 1.1- Différentes formes d'énergies dans un écoulement idéal.

Exemple:

Soit à transporter de l'eau dans une conduite d'un point 1 à un point 2 tels que:

$$P_1 = 15 \text{ N/cm}^2; \quad V_1 = 8 \text{ m/s}; \quad z_1 = 12 \text{ m}$$

et $P_2 = 10 \text{ N/cm}^2; \quad V_2 = ?; \quad z_2 = 2 \text{ m}$

On donne: $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- Quelle est la vitesse au point 2 ?

- Si le débit transporté est $6 \text{ dm}^3/\text{s}$; calculer les diamètres de la conduite aux points 1 et 2.

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les point 1 et 2:

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0$$

$$\Rightarrow -50 + \frac{1}{2}(V_2^2 - 64) - 100 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{V_2 = 19 \text{ m/s.}}$$

D'après l'équation de continuité, le débit volumique est donné par:

$$q_v = S_1 V_1 = S_2 V_2$$

$$\Rightarrow S_1 = 0,006/8 = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad \Rightarrow \underline{D_1 = 0,031 \text{ m.}}$$

$$\Rightarrow S_2 = 0,006/19 = 3,158 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad \Rightarrow \underline{D_2 = 0,02 \text{ m.}}$$

L'augmentation de la vitesse à la sortie nous impose donc une diminution du diamètre afin de conserver le débit.

1.2.3- Applications pratiques de l'équation de Bernoulli

- Mesure de la pression statique :

La pression statique (ou locale) au voisinage d'une paroi peut être mesurée au moyen d'un trou fin percé sans bavures et perpendiculairement à la surface de la paroi. Cette dernière peut être considérée comme une ligne de courant qui n'est pas modifiée par la présence de la cavité qui se remplit de fluide mort (Fig. 1.2).

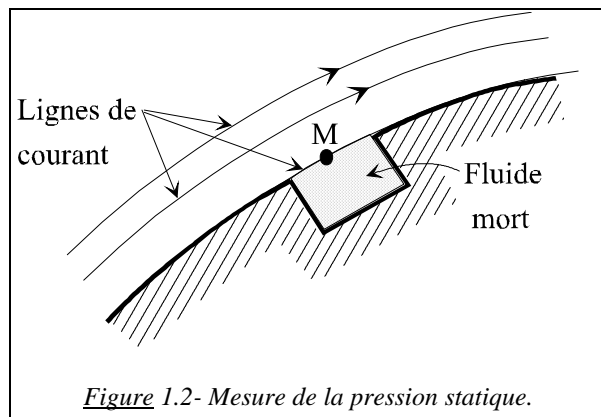


Figure 1.2- Mesure de la pression statique.

Le fluide mort et le fluide en mouvement sont en contact au point M et on peut écrire d'après l'équation de Bernoulli:

$$\frac{P_M}{\rho} + \frac{1}{2} V_M^2 + g z_M = C^{te} \quad \Rightarrow \quad P_M = C^{te}$$

la pression dans la cavité est donc constante et on peut la mesurer avec un manomètre. Elle sera égale à celle du fluide en mouvement.

- Mesure de la pression dynamique:

La pression dynamique (ou totale ou encore pression d'arrêt) est la pression qu'on obtiendrait si l'écoulement était décéléré sans pertes (frottements) jusqu'à la vitesse nulle. Elle peut être mesurée au moyen d'un tube de Pitot.

Cet instrument est constitué d'un tube mince inséré dans l'écoulement de telle manière que l'ouverture du tube soit orientée dans le sens opposé à l'écoulement (Fig.1.3).

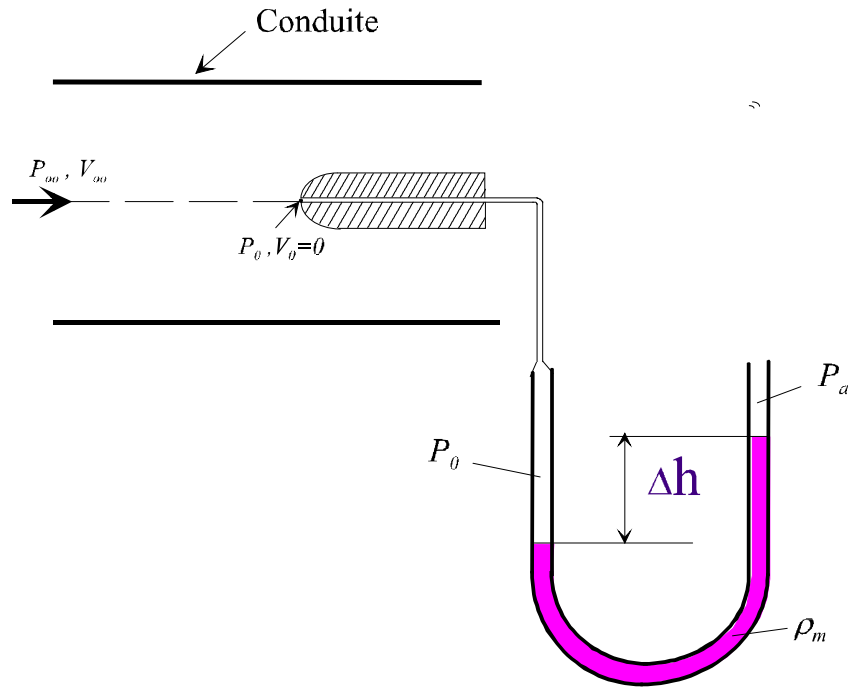


Figure 1.3- Mesure de la pression totale.

$$P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 + \cancel{\rho g z_{\infty}} = P_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 + \cancel{\rho g z_0}$$

d'où:

$$P_0 = P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 \quad (1.3)$$

C'est donc la pression statique augmentée de la pression dynamique.

Par la connexion du tube de Pitot à un manomètre, on peut mesurer la pression P_0 relativement par rapport à la pression atmosphérique P_a : $P_0 - P_a = \rho_m g \Delta h$

- Mesure de la vitesse dans un écoulement incompressible

Il existe une variante du tube de Pitot (Fig. 1.4) permettant de mesurer simultanément les pressions locale et totale. Un tel instrument est dénommé tube de Prandtl.

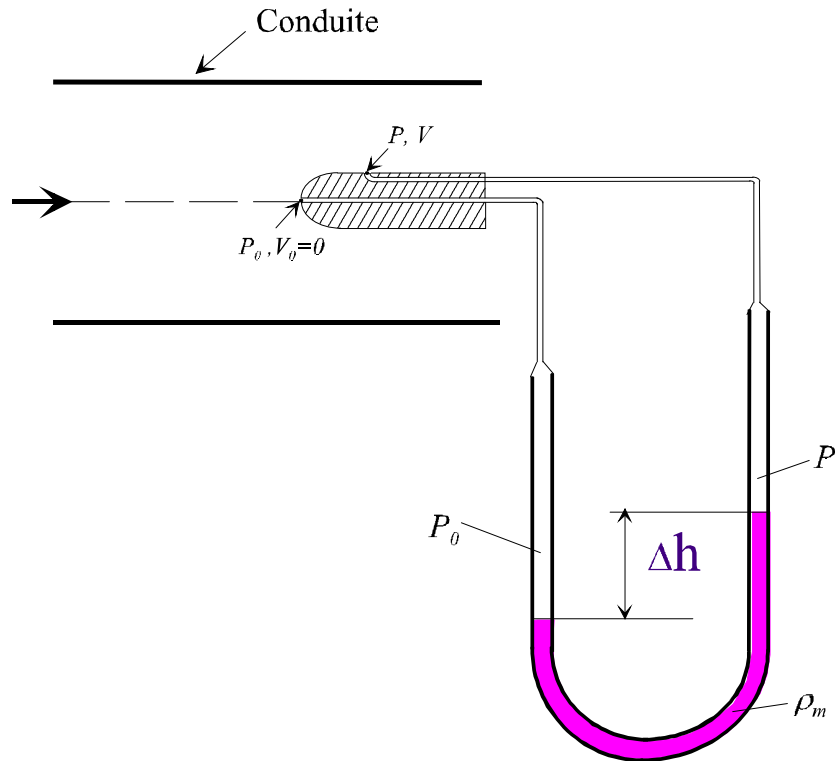


Figure 1.4- Mesure de la vitesse.

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 + \rho g z_0 = P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z$$

Le tube étant assez mince pour ne pas perturber l'écoulement d'où: $z = z_0$

Le tube de Prandtl sert donc à mesurer la vitesse en un point quelconque de l'écoulement par la formule suivante:

$$V = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\rho}} \quad (1.4)$$

Si on met du mercure dans le manomètre, à l'équilibre nous aurons: $P_0 - P = \rho_m g \Delta h$.

- Mesure du débit-masse:

Pour déterminer le débit-masse dans une conduite, on utilise souvent un *tube de Venturi* comme il est indiqué sur la figure (Fig. 1.5) ci-dessous. Il est formé d'un convergent, d'un col et

d'un divergent. Il est muni de deux prises de pression statique: une à l'entrée de l'appareil et une au col.

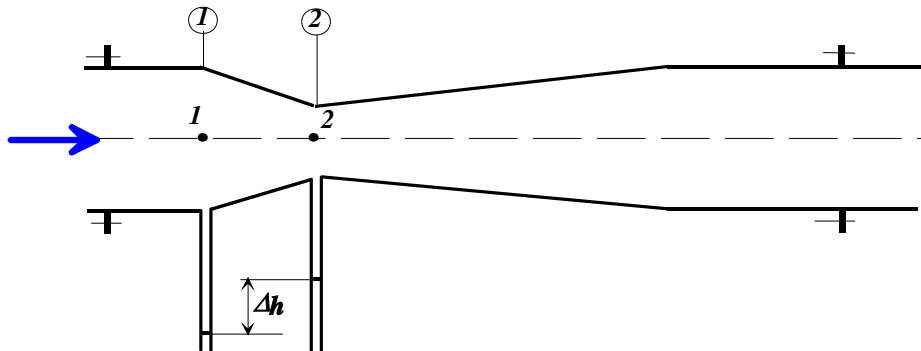


Figure 1.5- Mesure du débit-masse.

Dans les sections S_1 et S_2 , le tube est muni de trous capables de mesurer les pressions locales P_1 et P_2 . Au moyen d'une mesure de la différence de pression ($P_1 - P_2$), le débit-masse d'un écoulement incompressible est donné par la relation suivante:

$$\dot{m} = S_2 \sqrt{\frac{2 \rho (P_1 - P_2)}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \quad (1.5)$$

Cette relation est obtenue en combinant l'équation de continuité et celle de Bernoulli et la différence de pression est directement proportionnelle à la dénivellation Δh .

Exemple d'application:

Un circuit hydraulique horizontal a les dimensions indiquées (Fig. 1.6). Il comporte un Venturi, une prise de pression statique et une prise de pression double. Ces divers appareils sont reliés à des manomètres à mercure. Les tubes de liaison aux manomètres sont remplis d'eau. On donne:

- masse volumique du mercure: $\rho_m = 13600 \text{ Kg/m}^3$;
- pression absolue au point 0: $P_0 = 1,5 \text{ bar}$;
- pression atmosphérique: $P_a = 1 \text{ bar}$ et $z = 1 \text{ m}$.

1- Sachant que la dénivellation $h_v = 40 \text{ mm}$, calculer le débit volumique q_v dans la conduite.

2- Calculer la dénivellation h_s .

3- Calculer la dénivellation h_d dans la prise de pression double.

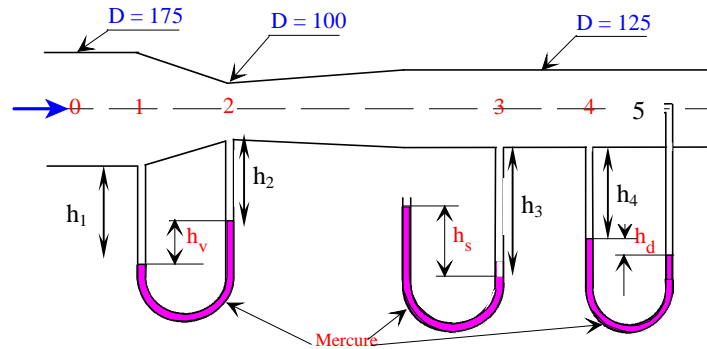


Figure 1.6- Exemple d'application. Circuit hydraulique horizontal.

1- Pour calculer le débit volumique, nous écrivons la conservation du débit entre les points 1 et 2 dans le Venturi:

$$q_v = S_1 V_1 = S_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

D'autre part, l'équation de Bernoulli entre ces deux points nous donne:

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \underbrace{g(z_2 - z_1)}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho} = -\frac{1}{2}V_1^2 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \right) = \frac{1}{2}V_1^2 \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right] \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right]}}$$

Comme la pression motrice P_g est constante dans chaque section de la conduite, alors:

$$P_{g1} = P_1 + \rho g \frac{D_1}{2} \quad \text{et} \quad P_{g2} = P_2 + \rho g \frac{D_2}{2}$$

Au niveau du Venturi on peut écrire:

$$P_{g1} + \rho g h_1 = P_{g2} + \rho g h_2 + \rho_m g h_v \Leftrightarrow P_1 + \rho g \left(h_1 + \frac{D_1}{2} \right) = P_2 + \rho g \left(h_2 + \frac{D_2}{2} \right) + \rho_m g h_v$$

$$\text{d'où en simplifiant: } P_1 - P_2 = g h_v (\rho_m - \rho)$$

En remplaçant cette différence de pression dans l'équation donnant V_1 , puis dans celle de conservation du débit, nous aurons finalement:

$$q_v = \frac{\pi D_1^2}{4} \sqrt{\frac{2 g h_v (\rho_m - \rho)}{\rho \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right]}} = \frac{\pi (0,175)^2}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,04 (13,6 - 1)}{(1,75)^4 - 1}}$$

d'où: $q_v = 0,02613 \text{ m}^3/\text{s} = 26,13 \text{ l/s.}$

2- L'équation de Bernoulli entre les points 2 et 3 nous donne ($z_2 = z_3$):

$$\frac{P_3 - P_2}{\rho} + \frac{1}{2}(V_3^2 - V_2^2) = 0 \Rightarrow P_3 = P_2 + \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_3^2)$$

L'équilibre du manomètre nous donne:

$$P_a + \rho g h_s = P_{g3} + \rho g h_3 = P_3 + \rho g \frac{D_3}{2} + \rho g \left(z - \frac{D_3}{2} \right) = P_3 + \rho g z$$

d'où: $h_s = \frac{P_3 - P_a + \rho g z}{\rho_m g}$

Il faut donc calculer la pression P_3 pour pouvoir évaluer la dénivellation h_s . Pour cela, calculons d'abords les vitesses dans les différentes sections de la conduite:

$$V_1 = \frac{4 q_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0,02613}{\pi \cdot 0,175^2} \Rightarrow \underline{V_1 = 1,086 \text{ m/s}}$$

$$V_2 = \frac{4 q_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0,02613}{\pi \cdot 0,1^2} \Rightarrow \underline{V_2 = 3,327 \text{ m/s}}$$

$$V_3 = \frac{4 q_v}{\pi D_3^2} = \frac{4 \cdot 0,02613}{\pi \cdot 0,125^2} \Rightarrow \underline{V_3 = 2,129 \text{ m/s}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{P_1 - P_0}{\rho} + \frac{1}{2}(V_1^2 - V_0^2) = 0 \\ q_v = S_0 V_0 = S_1 V_1 \Rightarrow V_0 = V_1 \end{array} \right\} \Rightarrow P_0 = P_1$$

$$\frac{P_2 - P_0}{\rho} + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_0^2) = 0 \Rightarrow P_2 = P_0 - \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_0^2)$$

$$P_2 = 1,5 \cdot 10^5 - \frac{10^3}{2} (3,327^2 - 1,086^2) \Rightarrow P_2 = 1,450 \text{ bar.}$$

$$\frac{P_3 - P_2}{\rho} + \frac{1}{2} (V_3^2 - V_2^2) = 0 \Rightarrow P_3 = P_2 - \frac{\rho}{2} (V_3^2 - V_2^2)$$

$$P_3 = 1,45 \cdot 10^5 + \frac{10^3}{2} (3,327^2 - 2,129^2) \Rightarrow \underline{P_3 = 1,482 \text{ bar.}}$$

En remplaçant ces valeurs dans l'expression de h_s on aura:

$$h_s = \frac{1,482 \cdot 10^5 - 10^5 + 10^3 \cdot 9,81 \cdot 1}{13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81} \quad \text{d'où} \quad \underline{h_s = 0,4348 \text{ m} = 434,8 \text{ mm.}}$$

3- Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points 3 et 4:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{P_4 - P_3}{\rho} + \frac{1}{2} (V_4^2 - V_3^2) = 0 \\ q_v = S_3 V_3 = S_4 V_4 \Rightarrow V_3 = V_4 \end{array} \right\} \Rightarrow P_3 = P_4$$

La condition d'équilibre dans la prise de pression double nous donne:

$$\begin{aligned} P_{g4} + \rho g h_4 + \rho_m g h_d &= \rho g h + P_5 \\ \Leftrightarrow \left(P_3 + \rho g \frac{D_3}{2} \right) + \rho g h_4 + \rho_m g h_d &= \rho g \left(h_d + h_4 + \frac{D_3}{2} \right) + P_5 \\ \Rightarrow P_3 + \rho_m g h_d &= \rho g h_d + P_5 \end{aligned}$$

Pour calculer h_d , il suffit maintenant de calculer la pression P_5 .

$$\frac{P_5 - P_4}{\rho} + \frac{1}{2} (V_5^2 - V_4^2) = 0 \quad \text{mais } V_5 = 0 \text{ car c'est un point d'arrêt}$$

$$\text{d'où:} \quad P_5 = P_4 + \frac{1}{2} \rho V_4^2 = P_3 + \frac{1}{2} \rho V_3^2$$

En remplaçant dans la relation précédente:

$$P_3 + \rho_m g h_d = \rho g h_d + P_3 + \frac{1}{2} \rho V_3^2 \Rightarrow h_d = \frac{\rho V_3^2}{2g(\rho_m - \rho)}$$

$$h_d = \frac{10^3 \cdot 2,129^2}{2 \cdot 9,81 (13600 - 1000)} \quad \text{donc} \quad \underline{h_d = 18,3 \text{ mm.}}$$

1.2.4- Equations de quantité de mouvement

Ces équations sont obtenues par application de la 2^{ème} loi de Newton: le taux de variation de la quantité de mouvement par rapport au temps d'une particule de fluide est égale à la résultante de toutes les forces qui exercent une influence ou une action sur la particule :

$$\dot{m} (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \sum \vec{F}_{es} \quad (1.6)$$

L'application des équations de quantité de mouvement (sur les différents axes) permet, par exemple, de déterminer les forces exercées par les fluides en mouvement sur des parois mobiles (aubes de turbomachines, air dans le cas de turboréacteurs) ou fixes (coudes, plaques, vis de raccords).

1.3- Ecoulements de fluides compressibles

1.3.1- Equation d'état des gaz parfaits

L'équation d'état d'un fluide de masse donnée est une relation qui lie sa pression P, son volume v et sa température absolue T. L'équation d'état d'un gaz parfait est:

$$P v = r T \quad (1.7)$$

r: étant la constante des gaz parfait (pour l'air: $r = 287 \text{ J/Kg } ^\circ\text{K}$).

v: volume massique: $v = 1/\rho$

1.3.2- Equation de continuité

De la même manière que pour les fluides incompressibles, elle s'écrit:

$$\dot{m} = \rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2 \quad (1.8a)$$

ou

$$\dot{m} = \frac{S_1 V_1}{v_1} = \frac{S_2 V_2}{v_2} \quad [\text{Kg/s}] \quad (1.8b)$$

L'équation (1.8) traduit la continuité du débit massique du fluide entre deux sections quelconques (1) et (2) dans l'écoulement.

1.3.3- Equation d'énergie

Elle traduit la conservation de l'énergie d'une particule de fluide entre deux sections quelconques (1) et (2):

$$\frac{(W + Q)_{12}}{(1)} = \frac{(H_2 - H_1)}{(2)} + \frac{\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2)}{(3)} \quad [\text{J/Kg}] \quad (1.9)$$

(1): somme algébrique de l'énergie thermique (chaleur) et mécanique (travail) échangés avec le milieu extérieur.

(2): variation d'enthalpie au cours de cet échange:

$$H_2 - H_1 = C_p (T_2 - T_1) \quad (1.10)$$

C_p : Chaleur spécifique à pression constante en [J/Kg °K]

(3): variation de l'énergie cinétique du Kg de fluide.

Exemples d'application:

1- Soit un compresseur d'air qui aspire de l'air à l'admission avec une température de 15 °C et une vitesse de 40 m/s. Il le refoule avec une température de 50 °C et une vitesse de 60 m/s

Quelque soit le type de compresseur, nous pouvons écrire:

$$(W + Q)_{12} = (H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = C_p (t_2 - t_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = 36 \text{ KJ} / \text{Kg}$$

Comme on considère souvent que ces machines sont adiabatiques (pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur), alors le travail échangé est de 36 000 J/Kg.

2- Considérons la conduite calorifugé (Fig.1.7), siège d'un écoulement de fluide compressible.

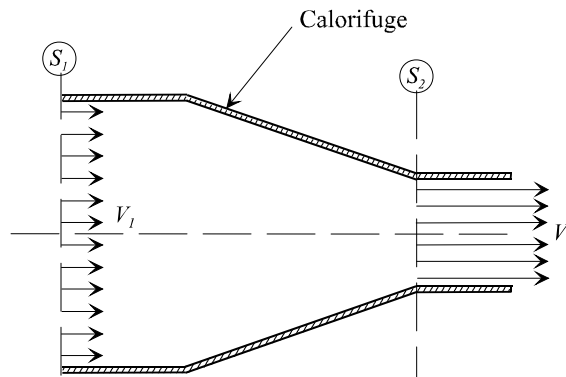


Figure 1.7- Ecoulement compressible dans une tuyère.

Comme le fluide ne traverse pas de machine dans laquelle il pourrait échanger du travail avec le milieu extérieur, nous pouvons écrire:

$$\left(\begin{matrix} W \\ + \\ Q \end{matrix} \right)_{12} = (H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

Nous obtenons la relation dite de Barré de Saint-Venant:

$$H + \frac{1}{2}V^2 = C^{te}$$

Nous constatons que dans la conduite, et sans intervention du milieu extérieur, il y a transformation de l'énergie thermique (enthalpie) en énergie cinétique (vitesse).

- Cas d'un écoulement permanent avec variation de l'énergie potentielle:

Dans certains cas, il se peut qu'il y a, en plus de la variation d'énergie cinétique et de l'enthalpie, une variation de l'énergie potentielle. Comme par exemple l'eau qui descend de son lac de montagne à la turbine hydraulique.

La relation qui traduit le principe de conservation de l'énergie devient encore plus général:

$$(W + Q)_{12} = (H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) \quad (1.11)$$

Si dans une machine thermique, une turbine à vapeur, un compresseur d'air, la différence $(z_2 - z_1)$ n'est que de quelques mètres, on peut alors le négliger par rapport au deux autres dans l'équation (1.10) ci-dessus.

Exemple d'application:

Soit un écoulement permanent d'un débit $\dot{m} = 2 \text{ Kg/s}$ d'air dans une conduite (Fig.1.8).

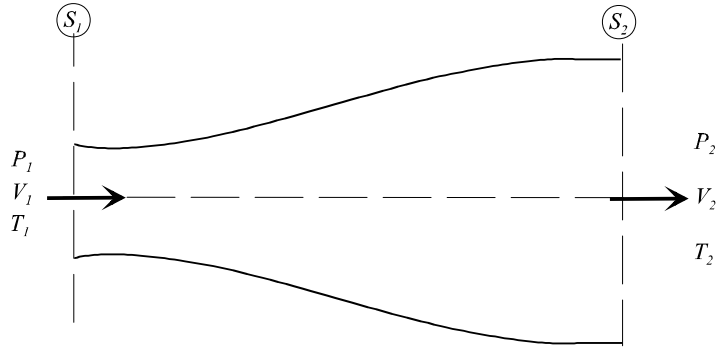


Figure 1.8- Ecoulement compressible dans un diffuseur.

On donne:

$$P_1 = 40 \text{ N/cm}^2, \quad T_1 = 400 \text{ °K}, \quad V_1 = 100 \text{ m/s}, \quad C_p = 1.09 \text{ KJ/Kg},$$

$$P_2 = 40 \text{ N/cm}^2, \quad T_2 = 1000 \text{ °K}, \quad V_2 = 100 \text{ m/s},$$

Quelles sont les sections d'entrée et de sortie de la conduite ainsi que la quantité de chaleur échangé avec le milieu extérieur?

Appliquons d'abord l'équation de continuité afin de déterminer la géométrie du diffuseur.

$$\dot{m} = \rho_1 \frac{\pi D^2}{4} V_1$$

il faut alors calculer la masse volumique à l'entrée par l'équation d'état:

$$P_1 = \rho_1 r T_1 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{P_1}{r T_1}$$

et en remplaçant dans l'équation du débit, nous aurons:

$$D_1 = \sqrt{\frac{4 \dot{m} r T_1}{\pi P_1 V_1}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 287 \cdot 400}{314 \cdot 40 \cdot 10^4 \cdot 100}} \approx 0.0855 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \underline{D_1 = 85,5 \text{ mm}}$$

D'une manière similaire, on trouve la valeur du diamètre de sortie: $\underline{D_2 = 95,6 \text{ mm}}$.

Pour déterminer la quantité de chaleur échangé avec le milieu extérieur, on applique l'équation d'énergie (1.10) entre deux points situés sur l'axe du diffuseur:

$$\cancel{0} \quad \cancel{(W + Q)}_{12} = (H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) \quad \cancel{0}$$

Le travail W_{12} échangé avec l'ambiance étant nul et les deux points étant situés sur la même horizontale ($z_1 = z_2$) alors cette équation devient:

$$Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

$$\Rightarrow Q_{12} = 1,09 \cdot 10^3 (1000 - 400) + 0,5 (200^2 - 100^2)$$

$$\text{d'où} \quad \underline{Q_{12} = 669 \text{ KJ/Kg}}$$

Cette quantité étant positive, le fluide a donc reçu de la chaleur du milieu extérieur ce qui a provoqué l'augmentation de la vitesse depuis la section d'entrée jusqu'à la section de sortie du diffuseur.

Ce calcul très simplifié peut s'appliquer, par exemple, à une chambre de combustion d'une turbine à gaz ou d'un turboréacteur.