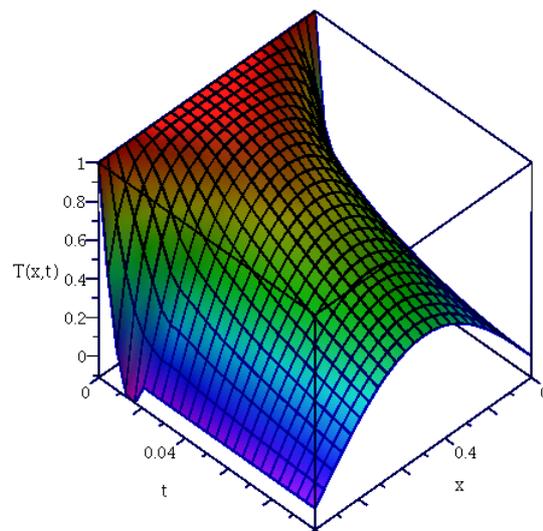


L.MESSAOUDI

METHODES NUMERIQUES APPLIQUEES

Tome I : Cours



Maître de Conférences.

Département de Mécanique.

Faculté de Technologie.

Université Mustafa Benboulaïd Batna 2.

Table des matières

Liste des figures	v
Liste des tableaux	vii
1 <i>Notions sur les équations aux dérivées partielles</i>	1
1.1 Introduction	1
1.2 Définitions	1
1.3 Classification des EDP	3
1.3.1 Caractéristiques des EDP	4
1.4 Différents types de conditions aux limites (C.L)	5
1.4.1 Conditions de Dirichlet (ou 1 ^{er} type)	5
1.4.2 Conditions de Neumann (ou 2 ^{ème} type)	6
1.4.3 Conditions mixtes (ou 3 ^{ème} type)	6
1.5 Exercices	6
2 <i>Méthodes Analytiques</i>	7
2.1 Introduction	7
2.2 Principe de superposition	7
2.3 Méthode de séparation des variables	8
2.3.1 Equation de diffusion avec conditions de Dirichlet	9
2.3.2 Equation de Laplace en coordonnées rectangulaires	12
2.3.3 Equation d'onde	15
2.4 Exercices	17
3 <i>Méthodes des différences finies</i>	19
3.1 Introduction sur les méthodes numériques	19
3.2 Principe et bases de la MDF	19
3.3 Formule de Taylor en coordonnées rectangulaires	25
3.4 Schémas de discrétisation	25

3.5	Notions de stabilité, consistance et convergence	25
3.5.1	Stabilité	25
3.5.2	Consistance	26
3.5.3	Convergence	26
3.6	Méthodes de discrétisation	26
3.6.1	Méthode explicite	26
3.6.2	Méthode implicite	27
3.6.3	Méthode de Crank-Nicholson	28
3.7	Application de la méthode explicite à l'équation de diffusion	29
3.7.1	Consistance	29
3.7.2	Stabilité	30
3.8	Application de la méthode implicite à l'équation de diffusion	31
3.8.1	Consistance	31
3.8.2	Stabilité	31
3.9	Application de la méthode de Crank-Nicholson à l'équation de diffusion	32
3.9.1	Consistance	32
3.9.2	Stabilité	32
3.10	Formulation matricielle du schéma explicite appliqué à l'équation de diffusion	33
3.11	Formulation matricielle du schéma implicite appliqué à l'équation de diffusion	36
3.12	Exemple résolu par wxMaxima	37
3.13	Cas des conditions aux limites du 2 ^{ème} type	39
3.13.1	Cas de l'approximation centrée	40
3.13.2	Cas de l'approximation décentrée d'ordre 1	42
3.13.3	Cas de l'approximation décentrée d'ordre 2	44
3.14	Equations non linéaires	46
3.14.1	Discrétisation par un schéma explicite	46
3.14.2	Discrétisation par un schéma implicite	47
3.15	Problèmes multidimensionnels	47
3.15.1	Discrétisation par un schéma explicite	47
3.15.2	Discrétisation par un schéma implicite	48
3.16	Equation de Laplace	48
3.16.1	Discrétisation par la formule à 5 points (Runge 1908)	49
3.16.2	Conditions limites de Dirichlet variables	53
3.16.3	Méthodes de résolution	54
3.16.4	Conditions aux limites de Neumann	55
3.16.5	Equation de Poisson	60
3.16.6	Méthode d'ordre élevé	61

3.16.7	Cas du domaine non rectangulaire	63
3.16.8	Equation non-linéaire et problème tridimensionnel	65
3.17	Equation d'onde	65
3.17.1	Résolution de l'équation d'onde	65
3.17.1.1	Discrétisation	66
3.17.1.2	Stabilité	66
3.17.1.3	Autres schémas de discrétisation	67
3.17.2	Méthodes de résolution	68
3.18	Exercices	69
4	Méthode des Volumes Finis	83
4.1	Equations de conservation	83
4.2	Equation de diffusion	86
4.2.1	Problème de diffusion unidimensionnel	87
4.2.2	Exemple 1 : Equation de diffusion 1D	89
4.2.3	Exemple 2 : Equation de diffusion 1D avec terme source	91
4.2.4	Exemple 3 : Equation de diffusion 1D avec convection à la surface et bord isolé	93
4.2.5	Problème de diffusion bidimensionnel	95
4.2.6	Problème tridimensionnel	101
4.2.7	Problèmes symétriques	102
4.2.8	Règles de base à satisfaire	102
4.3	Problème de convection-diffusion	103
4.3.1	Schéma centré	104
4.3.2	Schéma décentré (Upwind)	105
4.3.3	Schéma exponentiel	106
4.3.4	Schéma Hybride	106
4.3.5	Schéma Power Law	107
4.3.6	Forme générale	107
4.3.7	Exemple 1 : Schéma centré	107
4.3.8	Exemple 2 : Schéma Upwind	113
4.4	Equation de diffusion 1D instationnaire	117
4.4.1	Schéma explicite	118
4.4.2	Schéma implicite	118
4.4.3	Schéma de Crank-Nicholson	118
4.5	Exercices	119
	Bibliographie	123

A	Formulation à 9 points	127
B	Approximation des dérivées aux interfaces	131

Liste des figures

1.1	<i>Etapes de la simulation numérique.</i>	2
1.2	<i>Domaine d'étude pour les problèmes elliptiques.</i>	4
1.3	<i>Domaine d'étude pour les problèmes paraboliques et hyperboliques.</i>	5
2.1	<i>Problème original.</i>	9
2.2	<i>Problème modifié.</i>	10
2.3	<i>Distribution de la température en fonction du temps et de l'espace.</i>	12
2.4	<i>Equation de Laplace dans un rectangle.</i>	13
2.5	<i>Distribution de la température en fonction de x et de y.</i>	15
2.6	<i>Variation du déplacement en fonction du temps et de l'espace.</i>	17
3.1	<i>Passage du domaine continu au domaine discret.</i>	20
3.2	<i>Approximation par séries de Taylor de la fonction e^x.</i>	23
3.3	<i>Différents types de schémas de discrétisation.</i>	25
3.4	<i>Schéma explicite.</i>	27
3.5	<i>Schéma implicite.</i>	27
3.6	<i>Schéma de Crank-Nicholson.</i>	28
3.7	<i>Discrétisation du domaine pour l'équation de la chaleur.</i>	34
3.8	<i>Discrétisation du domaine spatio-temporel.</i>	38
3.9	<i>Conditions aux limites de type Neumann.</i>	39
3.10	<i>Discrétisation du domaine pour l'équation de Laplace.</i>	49
3.11	<i>Schéma cellulaire de la formulation à 5 points : (a) $\beta = 1$, (b) $\beta \neq 1$.</i>	50
3.12	<i>Equation de Laplace. Exemple 1.</i>	50
3.13	<i>Equation de Laplace. Exemple 3.</i>	52
3.14	<i>Equation de Laplace. (C.L) de Neumann.</i>	55
3.15	<i>Résolution de l'équation de Poisson. Répartition des isothermes.</i>	61
3.16	<i>Représentation schématique de la formulation à 9 points ($\beta = 1$).</i>	62
3.17	<i>Formulation à 9 points. Exemple 1.</i>	62
3.18	<i>Domaine physique non rectangulaire.</i>	64

3.19	<i>Transformation du domaine physique.</i>	64
3.20	<i>Exo-3-26.</i>	74
3.21	<i>Exo-3-31.</i>	75
3.22	<i>Exo-3-34.</i>	77
3.23	<i>Exo-3-36.</i>	78
3.24	<i>Exo-3-37.</i>	78
3.25	<i>Exo-3-38.</i>	79
3.26	<i>Exo-3-39.</i>	79
3.27	<i>Exo-3-45.</i>	80
3.28	<i>Exo-3-46.</i>	81
4.1	<i>Equations de conservation.</i>	84
4.2	<i>Disposition du (v.c) 1D.</i>	87
4.3	<i>Exemple 1 : Equation de diffusion 1D.</i>	89
4.4	<i>Exemple 2 : Equation de diffusion 1D avec terme source.</i>	91
4.5	<i>Exemple 3 : Equation de diffusion 1D, convection en surface et bord isolé.</i>	93
4.6	<i>Disposition du (v.c) 2D.</i>	95
4.7	<i>Exemple 2D.</i>	98
4.8	<i>Problème conducto-convectif 1D.</i>	103
4.9	<i>Exemple 1 : Schéma centré.</i>	108
4.10	<i>Exemple1- Cas 1 : $u=0,1$ m/s et $\Delta x=0,2$ m.</i>	110
4.11	<i>Exemple1- Cas 2 : $u=2,5$ m/s et $\Delta x=0,2$ m.</i>	112
4.12	<i>Exemple1- Cas 3 : $u=2,5$ m/s et $\Delta x=0,05$ m.</i>	113
B.1	<i>Approximation de la dérivée aux interfaces.</i>	132

Liste des tableaux

3.1	<i>Approximation centrée en $O(h^2)$.</i>	21
3.2	<i>Approximation décentrée avant du 1^{er} ordre $O(h)$.</i>	22
3.3	<i>Approximation décentrée arrière du 1^{er} ordre $O(h)$.</i>	22
3.4	<i>Approximation décentrée avant du 2nd ordre $O(h^2)$.</i>	22
3.5	<i>Approximation décentrée arrière du 2nd ordre $O(h^2)$.</i>	22
3.6	<i>Influence négative de la simple précision.</i>	23
3.7	<i>Influence positive de la double précision.</i>	24
3.8	<i>Influence de l'approximation.</i>	24
4.1	<i>Fonction à prendre pour $A (P_e)$.</i>	107

Notions sur les équations aux dérivées partielles

1.1 Introduction

Les scientifiques et les ingénieurs utilisent plusieurs techniques pour la résolution des problèmes de champ (diffusion de la chaleur, propagation d'ondes ...etc). Ces techniques peuvent être expérimentales, analytiques ou numériques.

Les méthodes expérimentales sont très chers, prennent beaucoup de temps et dans certains cas, elles sont hasardeuses et même dangereuses. Elles ne permettent pas souvent une grande flexibilité des paramètres de variation.

La plupart des méthodes analytiques ne s'appliquent que dans des cas limités. Pour des problèmes relatifs à des systèmes de forme géométrique complexe ou à des milieux à caractéristiques non uniformes ou non isotropes, qui est le cas de la plupart des problèmes rencontrés en pratique, il est nécessaire de faire appel aux méthodes numériques.

Les problèmes rencontrés dans le domaine des sciences de l'ingénieur sont souvent représentés (ou modélisés) par des équations aux dérivées partielles (EDP) qui modélisent les phénomènes physiques présents (écoulement de fluides, transfert de chaleur, vibration de structures, propagation d'ondes, champ électromagnétique ...etc). Les étapes depuis la modélisation jusqu'à la programmation sont schématisées sur la figure (Fig.1.1).

1.2 Définitions

- Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation faisant intervenir une fonction inconnue de plusieurs variables ainsi que certaines de ses dérivées partielles.

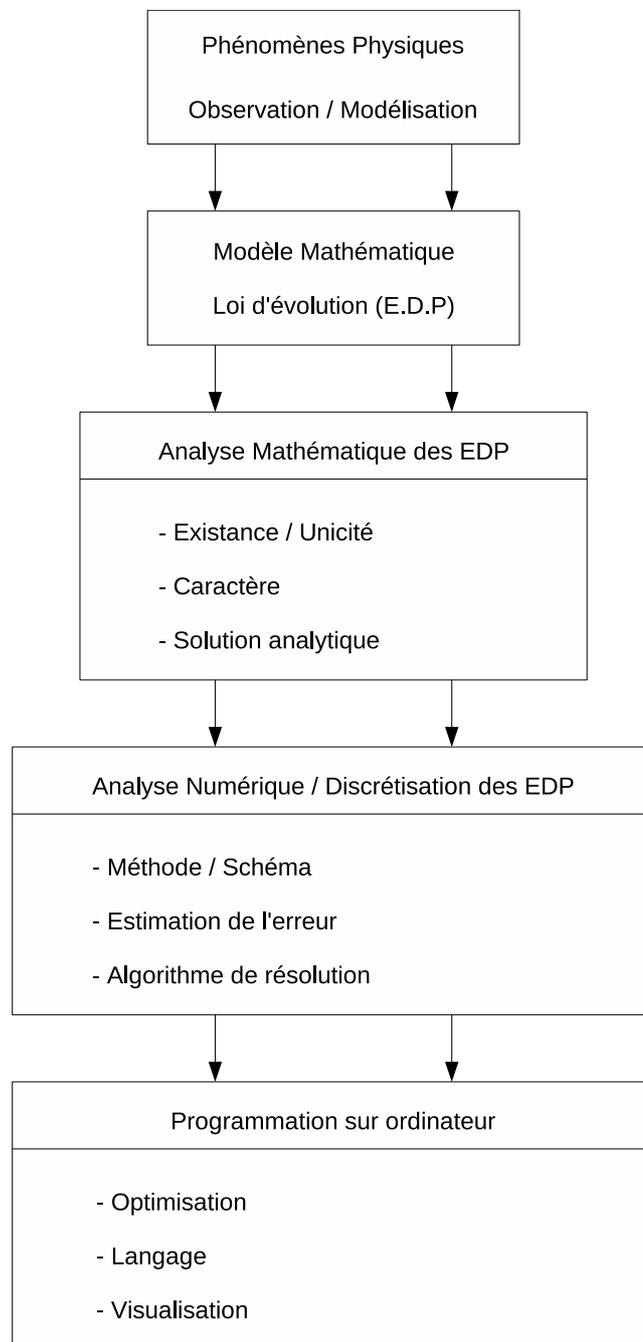


Fig. 1.1: *Étapes de la simulation numérique.*

- Une équation différentielle ordinaire (EDO) contient seulement des dérivées par rapport à une seule variable.
- On appelle *ordre* d'une EDP, l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation.

Exemples :

1. L'équation ci-contre est une EDO du 2^{nd} degré : $\alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = \lambda$.
2. L'équation ci-dessous est une EDP du 2^{nd} degré :

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi = g \quad (1.1)$$

Elle peut aussi s'écrire sous la forme :

$$a \phi_{xx} + b \phi_{xy} + c \phi_{yy} + d \phi_x + e \phi_y + f \phi = g \quad \iff \quad L \phi = g$$

- Une EDP est *linéaire* si l'équation est linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue (c-à-d qu'il n'existe pas de produit des variables dépendantes et/ou produit de ses dérivées).
- Une EDP est *non linéaire* si l'équation contient un produit des variables dépendantes et/ou un produit de ses dérivées.

Exemples :

- 1- L'équation ci-dessous est une EDP linéaire du second degré.

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} k_1 x^2 \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} + k_2 x \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} - k_3 \phi(x,t) = 0$$

- 2- L'équation ci-dessous est une EDP non linéaire du premier degré.

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + \phi(x,t) \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = g(x,t)$$

- On appelle *problème aux limites* une EDP munie de conditions aux limites (C.L) sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée.
- Un problème est *bien posé* si pour toute donnée (second membre, domaine, données aux bords, ...), il admet une solution unique et si cette solution dépend continûment de la donnée.

1.3 Classification des EDP

Considérons les équations aux dérivées partielles du second degré de type (1.1). Leur classification se fait de la manière suivante :

L'EDP est *elliptique* si : $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

L'EDP est *parabolique* si : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

L'EDP est *hyperbolique* si : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Les termes elliptique, parabolique et hyperbolique sont dérivés de l'équation quadratique :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

qui représente une hyperbole, une parabole ou une ellipse selon la valeur de Δ .

Exemples :

— Equation d'onde : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$a = c^2, b = 0, c = -1 \Rightarrow \Delta = 4c^2$ donc c'est une EDP de type hyperbolique.

— Equation de diffusion (chaleur) : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$a = 1, b = 0, c = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ donc c'est une EDP de type parabolique.

— L'équation : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = f$

$a = 1, b = 0, c = 1 \Rightarrow \Delta = -4$ donc c'est une EDP de type elliptique.

- L'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans ce cas u est dite *harmonique*.

- L'équation de Poisson : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$

— Equation de Tricomi : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$a = 1, b = 0, c = x \Rightarrow \Delta = -4x$ donc c'est une EDP de type *mixte*. Elle est elliptique si $x > 0$ et hyperbolique si $x < 0$.

1.3.1 Caractéristiques des EDP

— Les EDP elliptiques sont associées avec des phénomènes stationnaires. Elles modélisent souvent un problème *intérieur (fermé)* (Fig.1.2) et alors la solution est souvent bornée (exp : les équations de Laplace et de Poisson).



Fig. 1.2: **Domaine d'étude pour les problèmes elliptiques.**

— Les EDP hyperboliques apparaissent dans les problèmes de propagation. La solution est souvent *ouverte* et elle avance alors indéfiniment vers l'extérieur à partir d'une condition initiale satisfaisant toujours les conditions aux limites (C.L) spécifiées (Fig.1.3).

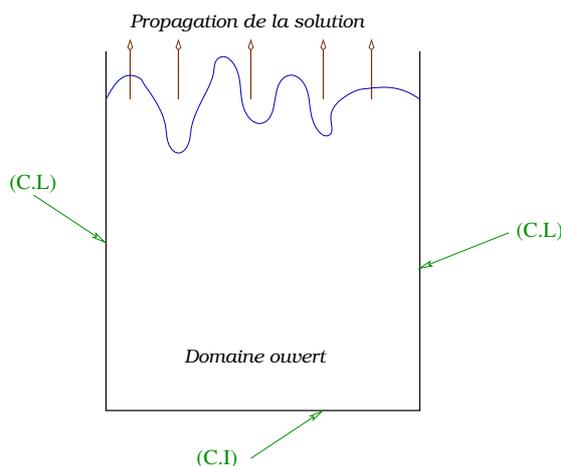


Fig. 1.3: *Domaine d'étude pour les problèmes paraboliques et hyperboliques.*

- Les EDP paraboliques sont généralement associées avec des problèmes dans lesquels la quantité qui nous intéresse varie lentement comparée aux mouvements aléatoires qui produisent les variations. Comme l'EDP hyperbolique, le domaine de la solution de l'EDP parabolique est souvent ouvert. Les conditions initiale (C.I) et limites (C.L) typiquement associées avec cette équation ressemblent à ceux des problèmes hyperboliques à l'exception de la seule condition initiale à $t = 0$ nécessaire puisque l'équation est du 1^{er} ordre en temps. Aussi, les équations paraboliques et hyperboliques sont résolues par des techniques similaires alors que l'équation elliptique est souvent plus difficile et requiert des techniques différentes.

1.4 Différents types de conditions aux limites (C.L)

1.4.1 Conditions de Dirichlet (ou 1^{er} type)

Dans ce cas, la valeur de la variable dépendante est spécifiée le long de la frontière du domaine.

$$\phi(r) = 0, \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition homogène.}$$

$$\phi(r) = p(r), \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition non homogène.}$$

r étant la variable indiquant la position et S la frontière du domaine.

1.4.2 Conditions de Neumann (ou 2^{ème} type)

Dans ce cas, le gradient normal de la variable dépendante est spécifié le long de la frontière du domaine.

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} = 0, \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition homogène.}$$

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} = q(r), \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition non homogène.}$$

$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n}$ étant la dérivée normale de ϕ le long de la frontière S du domaine.

1.4.3 Conditions mixtes (ou 3^{ème} type)

Dans ce cas, une combinaison des deux C.L précédentes spécifiée le long de la frontière du domaine.

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} + h(r) \phi(r) = 0, \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition homogène.}$$

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} + h(r) \phi(r) = w(r), \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition non homogène.}$$

1.5 Exercices

1-01 : Classer les EDP suivantes (parabolique, hyperbolique ou elliptique) :

1. $\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$
2. $(1 - M) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ (étudier en fonction de M).
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
4. $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$

1-02 : Classer les EDP suivantes :

1. $4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u = 0.$
2. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t).$
3. $x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0.$
4. $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} - 16 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$

Méthodes Analytiques

2.1 Introduction

La solution la plus satisfaisante d'un problème de champ est certainement la solution mathématique exacte. Cependant, dans beaucoup de cas pratiques, cette solution analytique ne peut être obtenue et on a alors recours aux méthodes numériques qui sont approximatives. La solution analytique, si elle existe, est intéressante afin de s'assurer de la solution obtenue numériquement.

Parmi les méthodes analytiques les plus utilisées, on distingue :

- Méthode de séparation des variables (MSV) ou méthode de Fourier.
- Méthodes de perturbation.
- Méthode des séries de puissance.
- Méthode analogiques.
- Méthode des transformées de Laplace . . . etc.

Nous nous intéressons uniquement à la MSV qui est très puissante et d'un emploi plus général que les autres méthodes qui sont spécifiques à certains type de problèmes physiques.

Avant de détailler la MSV, nous allons, en premier lieu, voir un principe très important :

2.2 Principe de superposition

Si chaque membre de l'ensemble des fonctions ϕ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ est solution de l'EDP : $L\phi = 0$ (L : Opérateur différentiel) avec des (C.L) données, alors la combinaison linéaire :

$$\phi = \phi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \phi_n$$

satisfait aussi l'équation $L\phi = g$.

Théorème d'unicité : Ce théorème garanti que la solution obtenue de l'EDP avec des (C.L) données est la seule possible.

2.3 Méthode de séparation des variables

Le principe de cette méthode est de chercher les solutions d'une EDP sous la forme :

$$\phi(x, y, z, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \cdot T(t) \quad (2.1)$$

Pour voir si la MSV indépendantes peut s'appliquer à un problème physique donnée, nous devons considérer l'EDP décrivant le problème, la forme du domaine de la solution et les (C.L).

Par exemple, pour appliquer cette méthode à un problème faisant intervenir deux variables x et y , trois choses doivent être considérées :

1. L'opérateur différentiel L doit être séparable, c-à-d. il doit être une fonction de $\phi(x, y)$.
2. Toutes les (C.L) et (C.I) doivent être prises sur des surfaces à coordonnées constantes c-à-d. $x = C^{te}$, $y = C^{te}$.
3. L'opérateur linéaire définissant la (C.L) à $x = C^{te}$ (ou $y = C^{te}$) ne doit pas contenir des dérivées partielles en ϕ par rapport à y (ou x) et ses coefficients doivent être indépendants de y (ou de x).

Exemples :

- $L\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$ viole la règle (1).
- Si la région de la solution n'est pas un rectangle à faces parallèles aux axes x et y alors la règle (2) est violée.
- Avec une (C.L) sur une partie ou $x = 0$ et $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$ sur une autre partie, la règle (3) est violée.

Nous allons maintenant appliquer la MSV aux EDP les plus rencontrés telles que l'équation de diffusion de la chaleur, l'équation de Laplace et l'équation d'onde en respectant les étapes suivantes :

1. Séparer les variables indépendantes.
2. Trouver les solutions particulières aux équations séparées satisfaisant les (C.L).
3. Combiner linéairement ces solutions pour obtenir la solution générale (principe de superposition).
4. Satisfaire la (C.I) pour déterminer les coefficients restant.

2.3.1 Equation de diffusion avec conditions de Dirichlet

Soit une barre de longueur L et de très faible section. Considérons le transfert de chaleur entre ses extrémités maintenues à des températures fixes θ_1 , la température initiale étant θ_0 (Fig.2.1).

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 & t = 0 & \text{et} & 0 \leq x \leq L \\ \theta = \theta_1 & t > 0 & \text{et} & x = 0 \\ \theta = \theta_1 & t > 0 & \text{et} & x = L \end{cases}$$

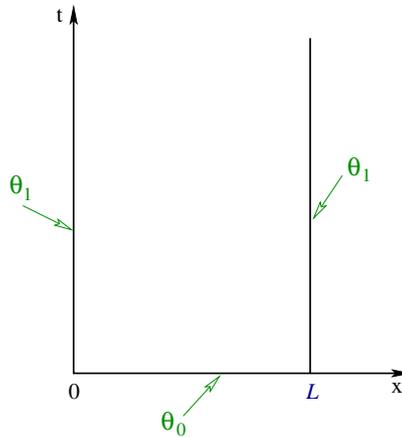


Fig. 2.1: *Problème original.*

Pour faciliter la résolution du système (2.2), il est recommandé d'homogénéiser les (C.L), pour cela, on pose :

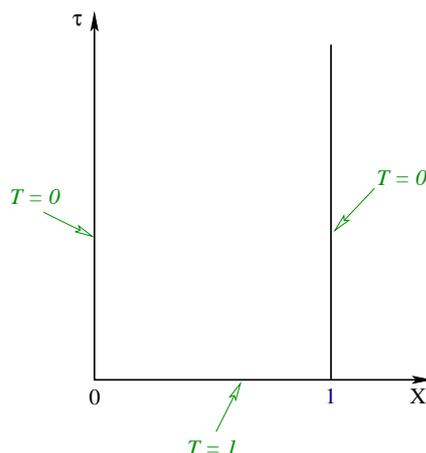
$$T = \frac{\theta - \theta_1}{\theta_0 - \theta_1}, \quad \tau = \frac{\alpha}{L^2} t, \quad X = \frac{x}{L}$$

T , τ et X sont alors des variables adimensionnelles (sans unités).

Le système (2.2) devient alors (Fig.2.2) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad 0 \leq X \leq 1, \tau \geq 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} T = 1 & \tau = 0 & \text{et} & 0 \leq X \leq 1 \\ T = 0 & \tau > 0 & \text{et} & X = 0 \\ T = 0 & \tau > 0 & \text{et} & X = 1 \end{cases}$$

Fig. 2.2: *Problème modifié.*

Appliquons maintenant la MSV, on pose alors : $T(X, \tau) = f(X) \cdot g(\tau)$
le système (2.3) devient alors :

$$f''(X) \cdot g(\tau) = f(X) \cdot g'(\tau)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

En séparant les variables :

$$\frac{f''(X)}{f(X)} = \frac{g'(\tau)}{g(\tau)}$$

et comme f ne dépend que de X et g ne dépend que de τ , ceci ne peut être satisfait que si les deux rapports sont égaux à une même constante :

$$\frac{f''(X)}{f(X)} = \frac{g'(\tau)}{g(\tau)} = C^{te}$$

Pour des considérations physiques ainsi que pour éviter de trouver une solution triviale au problème, cette constante doit être égale un nombre négatif, soit $-\lambda^2$. Nous obtenons alors deux équations différentielles ordinaires (EDO) :

$$\begin{cases} f'' + \lambda^2 f = 0 \\ g' + \lambda^2 g = 0 \end{cases}$$

La solution de la première équation est donnée par les deux formes :

$$f(X) = A e^{i\lambda X} + B e^{-i\lambda X} = C \sin(\lambda X) + D \cos(\lambda X)$$

$$f(0) = 0 \implies D = 0$$

$$f(1) = 0 \implies C \sin(\lambda) = 0 \implies \sin(\lambda) = 0 \implies \lambda = n\pi, n = 1, 2, \dots \infty.$$

Nous avons trouvé un ensemble infini de valeurs discrètes de λ pour lesquelles l'équation n'a pas de solutions triviales ; ceci nous donne :

$$f_n(X) = C_n \sin(n\pi X)$$

La solution de la deuxième équation est donnée par la méthode des coefficients indéterminés :

$$g(\tau) = K e^{-\lambda^2 \tau} = K e^{-n^2 \pi^2 \tau} \text{ et par suite :}$$

$$g_n(\tau) = K_n e^{-n^2 \pi^2 \tau}$$

En remplaçant les deux fonctions :

$$T_n(X, \tau) = f_n(X) \cdot g_n(\tau) = C_n \sin(n\pi X) \cdot e^{-n^2 \pi^2 \tau}$$

et en appliquant le théorème de superposition, nous aurons la solution sous la forme :

$$T(X, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(X, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi X) \cdot e^{-n^2 \pi^2 \tau}$$

Maintenant déterminons la constante en utilisant la condition initiale :

$$T(X, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi X) = 1$$

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L T(X, 0) \sin(n\pi X) dX = 2 \int_0^1 \sin(n\pi X) dX = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

La solution est triviale pour tout n paire, on ne prendra donc que les valeurs impaires, pour cela on pose :

$$n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \infty. \text{ Dans ce cas :}$$

$$C_k = \frac{4}{(2k + 1)\pi}$$

et par suite, la solution du problème est :

$$T(X, \tau) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)} \sin[(2k + 1)\pi X] \cdot e^{-[(2k+1)^2 \pi^2 \tau]} \quad (2.4)$$

et en revenant aux variables dimensionnelles :

$$\theta(x, t) = \theta_1 + \frac{4(\theta_0 - \theta_1)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)} \sin \left[\frac{(2k + 1)\pi}{L} x \right] \cdot e^{-\left[\alpha \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{L^2} t \right]} \quad (2.5)$$

Les distributions de la température en fonction du temps et de l'espace sont représentées sur la figure (Fig.2.3).

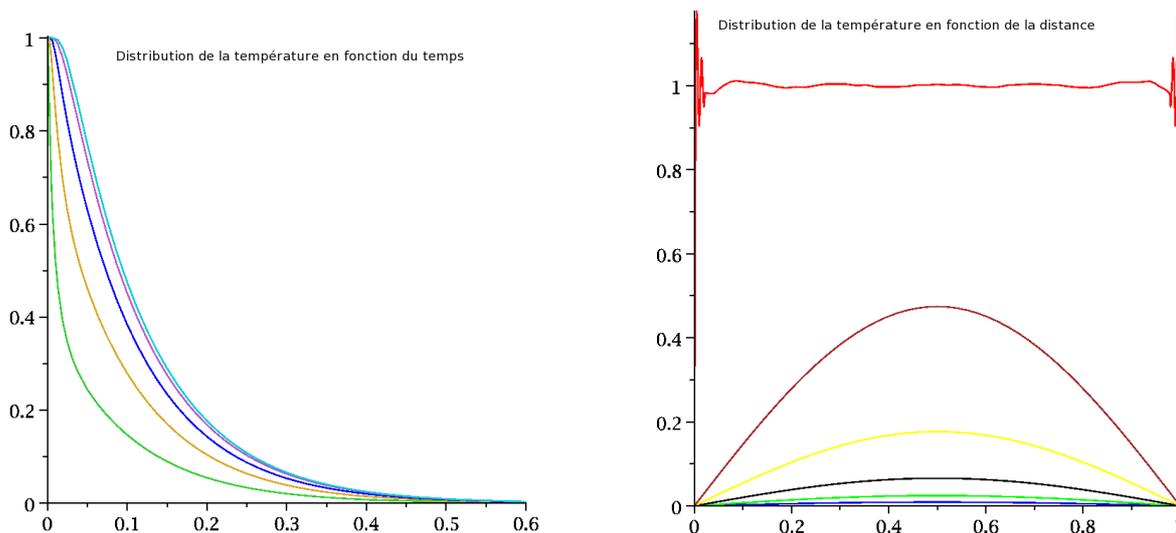


Fig. 2.3: *Distribution de la température en fonction du temps et de l'espace.*

2.3.2 Equation de Laplace en coordonnées rectangulaires

Soit une plaque rectangulaire soumise à des températures constantes comme il est indiqué sur la figure (Fig.2.4).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} T(0, y) = 0 & , & T(x, 0) = 0 \\ T(a, y) = 0 & , & T(x, b) = T_0 \end{cases}$$

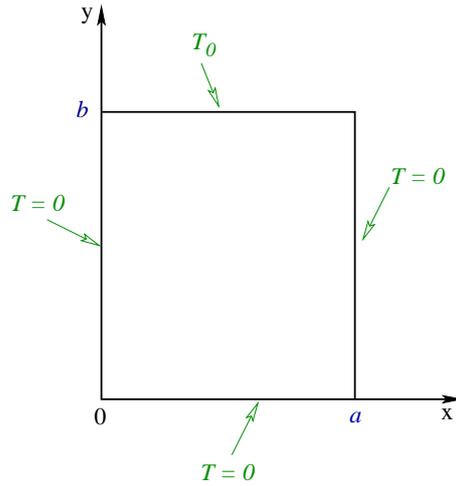


Fig. 2.4: *Equation de Laplace dans un rectangle.*

Appliquons maintenant la MSV, on pose alors : $T(x, y) = f(x) \cdot g(y)$
le système (2.6) devient alors :

$$f''(x) \cdot g(y) = -f(x) \cdot g''(y)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(a) = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

En séparant les variables :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)}$$

et comme f ne dépend que de x et g ne dépend que de y , ceci ne peut être satisfait que si les deux rapports sont égaux à une même constante :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} = C^{te} = -\lambda^2$$

Nous obtenons alors deux équations différentielles ordinaires (EDO) :

$$\begin{cases} f'' + \lambda^2 f = 0 \\ g'' - \lambda^2 g = 0 \end{cases}$$

La solution de la première équation est donnée par les deux formes :

$$f(x) = A e^{i\lambda x} + B e^{-i\lambda x} = C \sin(\lambda x) + D \cos(\lambda x)$$

$$f(0) = 0 \implies D = 0$$

$$f(a) = 0 \implies C \sin(\lambda a) = 0 \implies \sin(\lambda a) = 0$$

$$\implies \lambda a = n \pi \implies \lambda = \frac{n \pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \infty$$

Nous avons trouvé un ensemble infini de valeurs discrètes de λ pour lesquelles l'équation n'a pas de solutions triviales ; ceci nous donne :

$$f_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n \pi}{a} x\right)$$

La solution de la deuxième équation est donnée par les deux formes :

$$g(y) = A e^{\lambda y} + B e^{-\lambda y} = C \operatorname{sh}(\lambda y) + D \operatorname{ch}(\lambda y)$$

$$g(0) = 0 \implies D = 0 \quad \text{et par suite :}$$

$$g_n(y) = C_n \operatorname{sh}\left(\frac{n \pi}{a} y\right)$$

En remplaçant les deux fonctions :

$$T_n(x, y) = f_n(x) \cdot g_n(y) = C_n \sin\left(\frac{n \pi}{a} x\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{n \pi}{a} y\right)$$

et en appliquant le théorème de superposition, nous aurons la solution sous la forme :

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n \pi}{a} x\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{n \pi}{a} y\right)$$

Maintenant déterminons la constante en utilisant la dernière condition aux limites :

$$T(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n \pi}{a} x\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{n \pi}{a} b\right) = T_0$$

$$C_n \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{n \pi}{a} b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a T(x, b) \sin\left(\frac{n \pi}{a} x\right) dx = \frac{2}{a} \int_0^a T_0 \sin\left(\frac{n \pi}{a} x\right) dx = \frac{2T_0}{n \pi} [1 - (-1)^n]$$

La solution est triviale pour tout n paire, on ne prendra donc que les valeur impaires, pour cela on pose :

$$n = 2k - 1, \quad k = 1, 2, \dots \infty. \quad \text{Dans ce cas :}$$

$$C_k = \frac{4 T_0}{(2k - 1) \pi} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\left[\frac{(2k-1) \pi}{a} b\right]}$$

et par suite, la solution du problème est :

$$T(x, y) = \frac{4 T_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2k-1) \pi}{a} x\right] \cdot \operatorname{sh}\left[\frac{(2k-1) \pi}{a} y\right]}{(2k - 1) \operatorname{sh}\left[\frac{(2k-1) \pi}{a} b\right]} \quad (2.7)$$

La distribution de la température en fonction de x et de y est représentée sur la

figure (Fig.2.5).

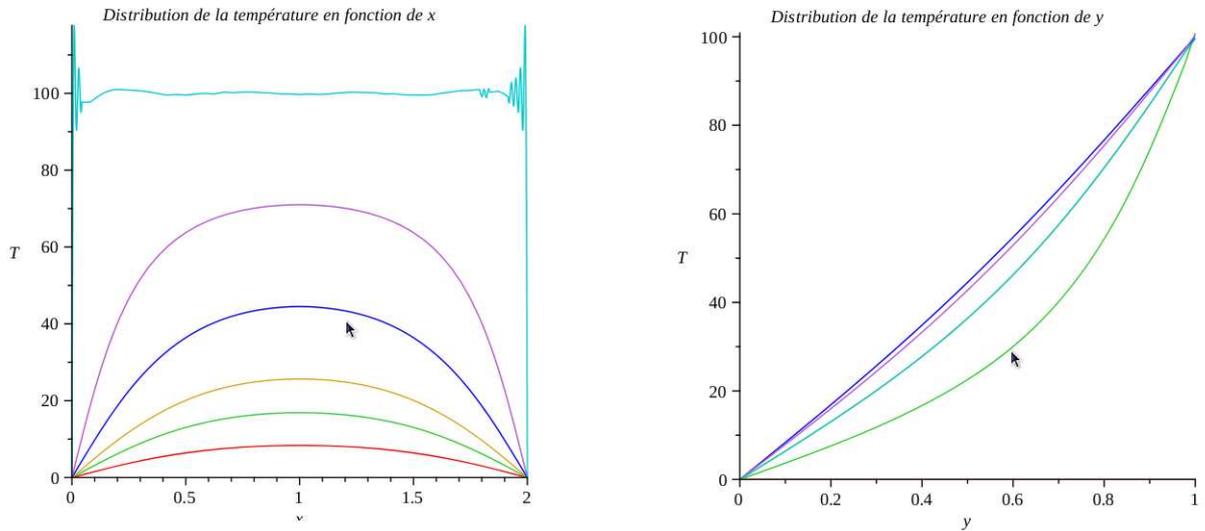


Fig. 2.5: *Distribution de la température en fonction de x et de y.*

2.3.3 Equation d'onde

Soit une corde maintenue par ces deux extrémités et définie par le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 & , & u(x, 0) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \\ u(L, t) = 0 & , & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -\sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \end{cases}$$

Appliquons maintenant la MSV, on pose alors : $u(x, t) = f(x) \cdot g(t)$

le système (2.8) devient alors :

$$f(x) \cdot g''(t) = c^2 f''(x) \cdot g(t)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(L) = 0 \end{cases}$$

En séparant les variables :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)}$$

et comme f ne dépend que de x et g ne dépend que de t , ceci ne peut être satisfait que si les deux rapports sont égaux à une même constante :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} = C^{te} = -\lambda^2$$

Nous obtenons alors deux équations différentielles ordinaires (EDO) :

$$\begin{cases} f'' + \lambda^2 f = 0 \\ g'' + c^2 \lambda^2 g = 0 \end{cases}$$

La solution de la première équation est donnée par :

$$\begin{aligned} f(x) &= A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) \\ f(0) = 0 &\implies B = 0 \\ f(L) = 0 &\implies A \sin(\lambda L) = 0 \implies \sin(\lambda L) = 0 \\ \implies \lambda L = n\pi &\implies \lambda = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, \dots, \infty. \end{aligned}$$

Nous avons trouvé un ensemble infini de valeurs discrètes de λ pour lesquelles l'équation n'a pas de solutions triviales ; ceci nous donne :

$$f_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

La solution de la deuxième équation est donnée par :

$$g(t) = C \sin(c\lambda t) + D \cos(c\lambda t)$$

En remplaçant les deux fonctions :

$$u_n(x, t) = f_n(x) \cdot g_n(t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)$$

et en appliquant le théorème de superposition, nous aurons la solution sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) \right]$$

Maintenant, déterminons les constantes en utilisant les conditions initiales :

$$- u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

$$\implies 2 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) = b_1 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$\implies b_1 = 2 \text{ et } b_n = 0 \text{ pour } n > 1.$$

$$- \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$

$$\implies -\sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) = a_1 \frac{c\pi}{L} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + a_2 \frac{2c\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$\implies a_2 = -\frac{L}{2\pi c} \text{ et } a_n = 0 \text{ pour } n \neq 2$$

et par suite, la solution finale du problème est :

$$u(x, t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi c}{L} t\right) - \frac{L}{2\pi c} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi c}{L} t\right) \quad (2.9)$$

La représentation graphique du déplacement en fonction du temps et de l'espace est représenté sur la figure (Fig.2.6).

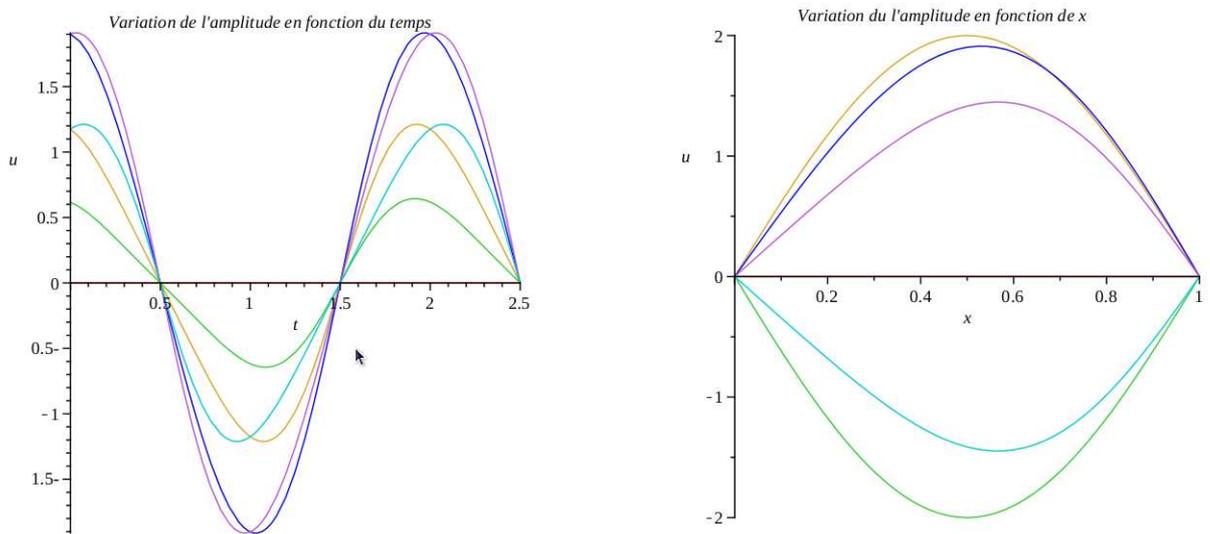


Fig. 2.6: *Variation du déplacement en fonction du temps et de l'espace.*

2.4 Exercices

2-01 : En utilisant la MSV, déterminer la solution du problème suivant :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, t > 0$$

$$T(0, t) = 0, \quad T(1, t) = 0, \quad T(x, 0) = 100$$

2-02 : En utilisant la MSV, déterminer la solution du problème suivant :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2$$

$$T(0, y) = 0, \quad T(1, y) = 0, \quad T(x, 0) = 0, \quad T(x, 2) = 1/2$$

2-03 : En utilisant la MSV, déterminer la solution du problème suivant :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$T(0, y) = 0, \quad T(2, y) = 0, \quad T(x, 0) = 0, \quad T(x, 1) = 2$$

2-04 : En utilisant la MSV, déterminer la solution du problème suivant pour les deux cas de $f(x)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 & , & u(x, 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \\ u(L, t) = 0 & , & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

1. $f(x) = 0$.
2. $f(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$

Méthodes des différences finies

3.1 Introduction sur les méthodes numériques

En général, les méthodes numériques donnent une solution approximative avec une précision suffisante pour les problèmes rencontrés en pratique dans les domaines de transferts thermiques, de mécanique des fluides, d'électromagnétisme, ...etc. Parmi ces méthodes, on distingue d'une manière générale :

- Méthode des différences finies (MDF).
- Méthode des éléments finis (MEF).
- Méthode des volumes finis (MVF).
- Méthodes spectrales (MS).

Il existe d'autres méthodes spécifiques à chaque domaine (méthode des lignes, méthode de Monté Carlo, ...etc).

- Les méthodes MDF et MVF sont basées sur une discrétisation du domaine et le remplacement de l'opérateur différentielle par un quotient différentiel.
- La méthode MEF est basée sur la formulation variationnelle.
- La méthode MS est basée sur la recherche d'une solution approchée sous forme d'un développement sur une certaine famille de fonctions (Fourier, polynômes, splines, ...etc). Ces méthodes sont souvent coûteuses mais précises.

3.2 Principe et bases de la MDF

L'objectif de la méthode des différences finies (MDF) est de transformer une *équation continue* valable sur un *domaine continu* (ou *domaine physique*) en un système à N équations à N inconnues associées à un *domaine discret* (ou *domaine de calcul*) appelé maillage.(Fig. 3.1).

L'approximation des dérivées d'une fonction $f(x)$ par différences finies est basée sur le développement en séries de Taylor de cette fonction de la manière suivante :

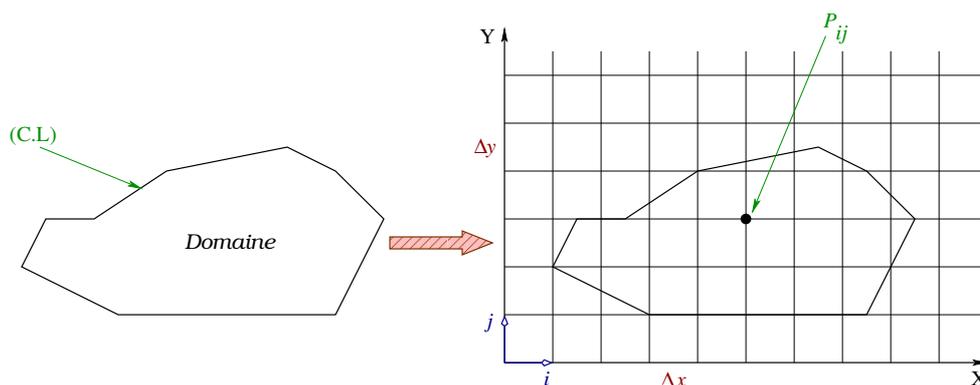


Fig. 3.1: *Passage du domaine continu au domaine discret.*

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots \quad (3.1)$$

$$f(x - h) = f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) - \dots \quad (3.2)$$

$$f(x + 2h) = f(x) + \frac{2h}{1!} f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots \quad (3.3)$$

$$f(x - 2h) = f(x) - \frac{2h}{1!} f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) - \dots \quad (3.4)$$

h étant le “pas” spatial (Δx , Δy ou Δz) ou temporel Δt .

Nous pouvons aussi faire sortir les sommes et les différences des séries :

$$f(x + h) + f(x - h) = 2 f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) + \dots \quad (3.5)$$

$$f(x + h) - f(x - h) = 2 h f'(x) + \frac{h^3}{3} f'''(x) + \dots \quad (3.6)$$

$$f(x + 2h) + f(x - 2h) = 2 f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{3} f^{(4)}(x) + \dots \quad (3.7)$$

$$f(x + 2h) - f(x - 2h) = 4h f'(x) + \frac{8h^3}{3} f'''(x) + \dots \quad (3.8)$$

Notons que les sommes contiennent seulement les dérivées paires par contre, les

différences contiennent seulement les dérivées impaires. Le nombre d'équations impliquées et le nombre de termes à conserver dans chaque équation dépend de la dérivée et du degré de précision désiré.

L'équation (3.6) nous donne :

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) + \dots$$

Ou encore :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (3.9)$$

qui est une approximation centrée du second ordre de la première dérivée de $f(x)$. $O(h^2)$ est appelée *Erreur de troncature* en h^2 .

Similairement, l'équation (3.5) nous donne :

$$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x) + \dots$$

ou encore :

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (3.10)$$

qui est une approximation centrée du second ordre de la dérivée seconde de $f(x)$.

Nous pouvons aussi obtenir de la même manière et en utilisant les équations (3.1)-(3.8) les dérivées $f'''(x)$ et $f^{(4)}(x)$ comme il est indiqué dans les tableaux (Tab.3.1-3.5).

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2h f'(x)$		-1	0	+1	
$h^2 f''(x)$		+1	-2	+1	
$2h^3 f'''(x)$	-1	2	0	-2	+1
$h^4 f^{(4)}(x)$	+1	-4	+6	-4	+1

Tab. 3.1: **Approximation centrée en $O(h^2)$.**

L'équation (3.1) nous donne :

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) + \dots$$

Ou encore :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (3.11)$$

qui est une approximation décentrée avant du 1^{er} ordre de la première dérivée de $f(x)$.

De même, l'équation (3.2) nous donne l'approximation décentrée arrière du 1^{er} ordre de la première dérivée de $f(x)$:

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad (3.12)$$

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$h f'(x)$	-1	+1			
$h^2 f''(x)$	+1	-2	+1		
$h^3 f'''(x)$	-1	+3	-3	+1	
$h^4 f^{(4)}(x)$	+1	-4	+6	-4	+1

Tab. 3.2: *Approximation décentrée avant du 1^{er} ordre $O(h)$.*

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$h f'(x)$				-1	+1
$h^2 f''(x)$			+1	-2	+1
$h^3 f'''(x)$		-1	+3	-3	+1
$h^4 f^{(4)}(x)$	+1	-4	+6	-4	+1

Tab. 3.3: *Approximation décentrée arrière du 1^{er} ordre $O(h)$.*

Ces approximations pouvant être utilisées par exemple aux limites du domaine où l'approximation centrée ne peut être appliquée. Les approximations décentrées du 2nd ordre sont données dans les tableaux (Tab.3.4 & 3.5) :

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$
$2h f'(x)$	-3	+4	-1			
$h^2 f''(x)$	+2	-5	+4	-1		
$2h^3 f'''(x)$	-5	+18	-24	+14	-3	
$h^4 f^{(4)}(x)$	+3	-14	+26	-24	+11	-2

Tab. 3.4: *Approximation décentrée avant du 2nd ordre $O(h^2)$.*

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2h f'(x)$				+1	-4	+3
$h^2 f''(x)$			-1	+4	-5	+2
$2h^3 f'''(x)$		+3	-14	+24	-18	+5
$h^4 f^{(4)}(x)$	-2	+11	-24	+26	-14	+3

Tab. 3.5: *Approximation décentrée arrière du 2nd ordre $O(h^2)$.*

Recommandations :

- Utiliser une double précision dans les calculs.
- Utiliser le 2nd ordre $O(h^2)$ ou plus.

Exemples :

1- La courbe (Fig.3.2) nous montre l'effet du nombre de termes à considérer durant l'approximation de la fonction e^x par les séries de Taylor.

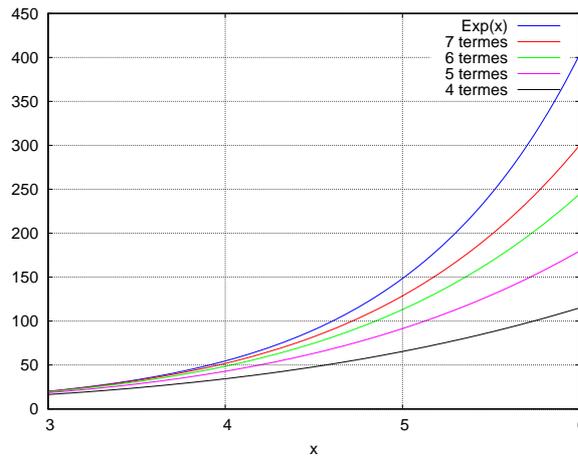


Fig. 3.2: *Approximation par séries de Taylor de la fonction e^x .*

2- Soit à calculer la dérivée seconde de la fonction $f(x) = e^{-x}$ au point $x = 1$.

- Avec 6 décimales : $f''(1) = f(1) = 0.367879$.

L'approximation de cette dérivée est donnée par la relation (3.10).

h	$f(x+h)$	$f(x-h)$	$f''(x)$
0.64	0.193980	0.697676	0.380611
0.32	0.267135	0.506617	0.371038
0.16	0.313486	0.431711	0.368699
0.08	0.339596	0.398519	0.368214
0.04	0.353455	0.382893	0.368480
0.02	0.360595	0.375311	0.370098
0.01	0.364219	0.371577	0.376706
0.005	0.366045	0.369723	0.403174
0.0025	0.366961	0.368800	0.509054
0.00125	0.367420	0.368340	0.932579
0.001	0.367512	0.368248	1.250222

Tab. 3.6: *Influence négative de la simple précision.*

— Avec 9 décimales : $f''(1) = f(1) = 0.367879441$.

h	$f(x+h)$	$f(x-h)$	$f''(x)$
0.64	0.193980042	0.697676326	0.380609097
0.32	0.267135302	0.506616992	0.371029414
0.16	0.313486181	0.431710523	0.368664921
0.08	0.339595526	0.398519041	0.368075685
0.04	0.353454682	0.382892886	0.367928494
0.02	0.360594940	0.375311099	0.367891704
0.01	0.364218980	0.371576691	0.367882507
0.005	0.366044635	0.369723445	0.367880208
0.0025	0.366960891	0.368800290	0.367879633
0.00125	0.367419879	0.368339578	0.367879489
0.001	0.367511746	0.368247505	0.367879472

Tab. 3.7: *Influence positive de la double précision.*

Nous remarquons, d'après ces deux tests, l'effet néfaste du choix de la simple précision par rapport à la double précision qui converge bien vers la solution exacte quand le pas h diminue.

3- Soit à calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \ln(x)$ au point $x = 1$. Prenons $h = 0.1$ et comparons les approximations centrée (3.9), décentrée avant (3.11) et décentrée arrière (3.12).

Approximation	$f'(1)$	erreur relative (%)
Centrée	1.003353477	0.34
Décentrée avant	0.953101798	4.69
Décentrée arrière	1.053605157	5.36

Tab. 3.8: *Influence de l'approximation.*

Nous remarquons que l'approximation centrée est plus précise que celles décentrées et que les erreurs calculées sont proches de celles prévues par la théorie :

— Pour les approximations décentrées : $E = \left| \frac{h}{2} f''(1) \right| = \left| \frac{0.1}{2} \cdot (-1) \right| = 0.05$.

— Pour l'approximation centrée : $E = \left| \frac{h^2}{6} f'''(1) \right| = \frac{(0.1)^2}{6} \cdot 2 = 0.00333$.

3.3 Formule de Taylor en coordonnées rectangulaires

Etant donnée que le principe de la discrétisation est basée sur la formule de Taylor, il est alors utile de la rappeler dans le cas d'une fonction $f(x, y)$ au point $(x + \Delta x, y + \Delta y)$:

$$\begin{aligned}
 f(x + \Delta x, y + \Delta y) = & f(x, y) + \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) + \frac{1}{2!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) + \\
 & + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(x, y) + \frac{1}{n!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

3.4 Schémas de discrétisation

Avant de remplacer les dérivées partielles par les différences finies, il faut d'abord choisir l'un des schémas de discrétisation suivants (Fig.3.3) :

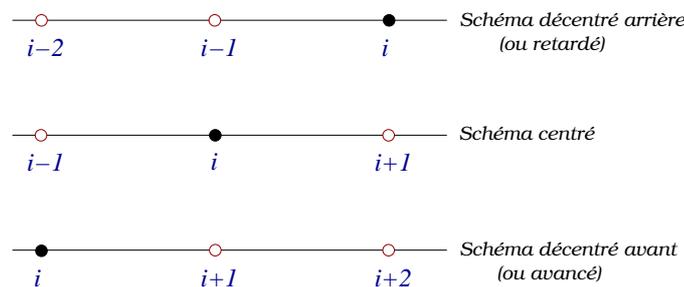


Fig. 3.3: *Différents types de schémas de discrétisation.*

3.5 Notions de stabilité, consistance et convergence

3.5.1 Stabilité

La notion de stabilité est relative à la solution de l'équation aux différences, on dira que le schéma est stable si, quelque soient Δx et Δy (du même ordre), la solution du problème discrétisé reste bornée quand Δt tends vers 0.

Pour étudier la stabilité, on utilise souvent l'analyse de *Von-Neumann* qui consiste à étudier toute solution de la forme : $\psi(t) e^{j\beta x}$ ($j^2 = -1$).

Si on substitue cette forme dans l'équation aux différences on obtient une relation entre $\psi(t)$ et $\psi(t + \Delta t)$.

Théorème : Le schéma est stable (condition suffisante) si le facteur d'amplification ξ vérifie :

$$\left| \xi = \frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} \right| \leq 1 \quad (3.14)$$

Remarque : L'analyse de la stabilité par *Von-Neumann* est valable uniquement pour les problèmes linéaires à coefficient constants car ce sont les seuls problèmes pour lesquels nous pouvons avoir une solution analytique. D'autres méthodes existent pour l'analyse de la stabilité (*matricielle, perturbation discrète*).

3.5.2 Consistance

Le terme de consistance appliqué à une certaine procédure de construction de schémas aux différences signifie que cette procédure approche la solution de l'EDP considérée et non la solution d'une autre EDP. La qualité de cette consistance s'appelle la précision du schéma.

Théorème : Soient les opérateurs \mathcal{D} discret et \mathcal{L} continu et soit ε un paramètre aussi petit que l'on veut.

Si $|Df - \mathcal{L}f| \leq \varepsilon$ quand Δx et $\Delta t \rightarrow 0$ alors la méthode est consistante.

3.5.3 Convergence

Le schéma est convergent si la solution du problème discrétisé tend vers la solution du problème aux dérivées partielles, lorsque Δx et Δy tendent simultanément vers 0.

Théorème de Lax : Pour une EDP linéaire, si le critère de consistance est vérifié, une condition nécessaire et suffisante de convergence et que le schéma soit stable.

3.6 Méthodes de discrétisation

3.6.1 Méthode explicite

L'équation explicite est obtenue en écrivant le terme spatial à l'instant n où la solution est connue. L'inconvénient principal de cette méthode (Fig.3.4) est qu'elle nécessite de choisir un pas de temps Δt suffisamment petit, sinon la solution de l'équation discrétisée devient instable.

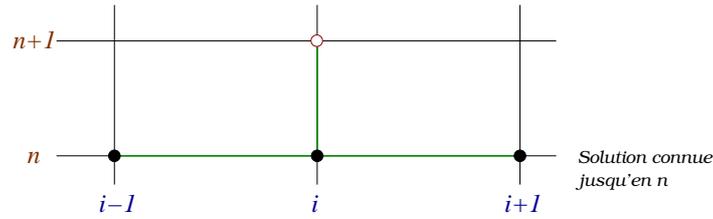


Fig. 3.4: *Schéma explicite.*

Exemple : La discrétisation de l'équation de la chaleur nous donne :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.15)$$

Le choix des approximations décentrée avant d'ordre 1 en temps et centrée d'ordre 2 en espace est désignée par "Méthode explicite d'Euler".

- Cette méthode converge pour $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \in]0, \frac{1}{2}]$ avec une erreur de discrétisation en $O(\Delta t + \Delta x^2)$.
- Pour $\lambda = \frac{1}{6}$, on démontre que l'erreur est en $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$.
- A cause de ce risque d'instabilité, il est préférable, lorsque cela est possible, d'utiliser l'une des méthodes implicites.

Il existe aussi d'autres méthodes de discrétisations explicites telles que celles de *Saul'Yev*, *Dufort-Frankel* et *Barakat et Clark ...etc.*

3.6.2 Méthode implicite

On obtient une équation implicite en écrivant le terme spatial à l'instant $(n + 1)$ où la solution n'est pas connue (Fig.3.5).

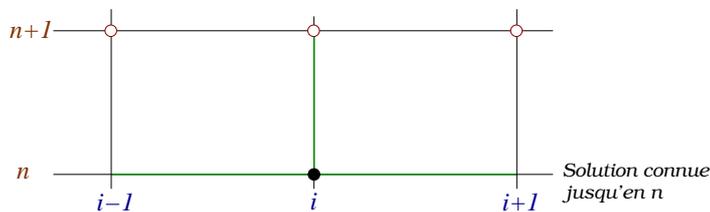


Fig. 3.5: *Schéma implicite.*

Exemple :

La discrétisation de l'équation de la chaleur nous donne :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (3.16)$$

Cette méthode est désignée par “*Méthode implicite d’Euler*”.

Un avantage essentiel de cette méthode est qu’elle est *universellement stable*. La seule limitation sur Δt est celle qui maintient les erreurs de troncature dans des limites acceptables.

Cette méthode converge quelque soit $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = C^{te}$.

Il existe aussi la méthode implicite de *Leasonen* en $O(\Delta t + \Delta x^2)$ et qui est *inconditionnellement stable*.

3.6.3 Méthode de Crank-Nicholson

Elle consiste à écrire le second membre de l’équation discrétisée comme la demi-somme des seconds membres des méthodes implicite et explicite.

- **Exemple** : La discrétisation de l’équation de la chaleur nous donne :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] \quad (3.17)$$

Le premier crochet de l’équation étant connu, on voit que ce schéma est en fait un schéma implicite. L’avantage principal de cette équation est que pour une valeur donnée de Δx , l’erreur de troncature sur le terme en Δt est nettement plus petite que dans les méthodes implicite et explicite. Elle exprime en effet la dérivée par rapport au temps t à l’aide de différences centrées de pas $\frac{\Delta t}{2}$ au lieu de la faire à l’aide de différences à droite ou à gauche de pas Δt (Fig.3.6).

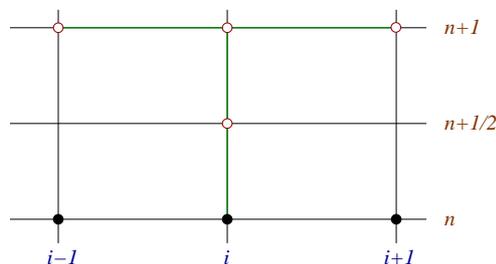


Fig. 3.6: *Schéma de Crank-Nicholson*.

- Cette méthode converge avec une erreur de discrétisation en $O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$.
- Pour $\lambda = \frac{1}{\sqrt{20}}$, on démontre que l’erreur est en $O(\Delta x^6)$.
- Ce schéma est *inconditionnellement stable*.

Une forme plus générale de l'équation (3.17) s'écrit :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = (1 - \theta) \left[\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right] + \theta \left[\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] \quad (3.18)$$

avec $0 \leq \theta \leq 1$. Cette méthode est complètement explicite pour $\theta = 0$ et partiellement implicite pour $0 < \theta < 1$. Pour $\theta = 1$, elle devient complètement implicite et pour $\theta = 1/2$, on obtient la méthode de Crank-Nicholson qui présente en générale des solutions raisonnablement stables et précises.

3.7 Application de la méthode explicite à l'équation de diffusion

L'équation de la chaleur discrétisée avec le schéma explicite (3.15) peut se mettre sous la forme :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) T_i^n + \lambda T_{i+1}^n \quad (3.19)$$

Etudions maintenant la consistance et la stabilité de ce schéma :

3.7.1 Consistance

Les approximations des dérivées première et seconde sont :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$f = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Appliquons les opérateurs discret \mathcal{D} et continu \mathcal{L} à l'équation f :

$$|Df - \mathcal{L}f| = \left| \left[\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) - \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \right] - \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \right|$$

$$|Df - \mathcal{L}f| = |O(\Delta t) + O(\Delta x^2)| = O(\Delta t + \Delta x^2)$$

Si $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$ alors $O(\Delta t + \Delta x^2) \rightarrow 0 \implies$ le schéma est consistant avec l'EDP.

3.7.2 Stabilité

Pour étudier la stabilité, utilisons l'analyse de *Von-Neumann* :

On suppose que la solution est de la forme : $T(x, t) = \psi(t) e^{j\beta x}$, on a alors :

$$\begin{aligned} T_i^n &= \psi(t) e^{j\beta x} & T_{i-1}^n &= \psi(t) e^{j\beta(x-\Delta x)} \\ T_i^{n+1} &= \psi(t + \Delta t) e^{j\beta x} & T_{i+1}^n &= \psi(t) e^{j\beta(x+\Delta x)} \end{aligned}$$

En remplaçant ces termes dans l'équation (3.19) et en simplifiant par $e^{j\beta x}$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \psi(t + \Delta t) &= \lambda \psi(t) e^{-j\beta \Delta x} + (1 - 2\lambda) \psi(t) + \lambda \psi(t) e^{j\beta \Delta x} \\ \frac{\psi(t+\Delta t)}{\psi(t)} &= \lambda (e^{j\beta \Delta x} + e^{-j\beta \Delta x}) + (1 - 2\lambda) = 2\lambda \cos(\beta \Delta x) + (1 - 2\lambda) \end{aligned}$$

D'où le facteur d'amplification :

$$\xi = 1 - 2\lambda (1 - \cos(\beta \Delta x)) \tag{3.20}$$

$$|\xi| \leq 1 \implies -1 \leq \xi \leq +1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 2\lambda (1 - \cos(\beta \Delta x)) \geq -1 \\ 1 - 2\lambda (1 - \cos(\beta \Delta x)) \leq 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 1 - 4\lambda \sin^2(\frac{\beta \Delta x}{2}) \geq -1 \\ 1 - 4\lambda \sin^2(\frac{\beta \Delta x}{2}) \leq 1 \end{array} \right.$$

Etant donné que $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} > 0$ alors la deuxième équation est toujours vérifiée $\forall \lambda$.

La première équation nous donne la condition :

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

qui est la condition de stabilité de ce schéma. On dira alors qu'il est *conditionnellement stable*.

C'est à ce niveau que ce pose la difficulté car le choix du pas de temps est strictement lié au pas d'espace et doit donc obligatoirement satisfaire la condition : $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2}$.

3.8 Application de la méthode implicite à l'équation de diffusion

L'équation de la chaleur discrétisée avec le schéma implicite (3.16) peut se mettre sous la forme :

$$T_i^n = -\lambda T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda) T_i^{n+1} - \lambda T_{i+1}^{n+1} \quad (3.21)$$

Etudions maintenant la consistance et la stabilité de ce schéma :

3.8.1 Consistance

Les approximations des dérivées première et seconde sont :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$f = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Appliquons les opérateurs discret \mathcal{D} et continu \mathcal{L} à l'équation f :

$$|Df - \mathcal{L}f| = \left| \left[\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) - \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \right] - \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \right|$$

$$|Df - \mathcal{L}f| = |O(\Delta t) + O(\Delta x^2)| = O(\Delta t + \Delta x^2)$$

Si $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$ alors $O(\Delta t + \Delta x^2) \rightarrow 0 \implies$ le schéma est consistant avec l'EDP.

3.8.2 Stabilité

Pour étudier la stabilité, utilisons l'analyse de *Von-Neumann* :

On suppose que la solution est de la forme : $T(x, t) = \psi(t) e^{j\beta x}$, on a alors :

$$T_i^n = \psi(t) e^{j\beta x} \quad T_{i-1}^{n+1} = \psi(t + \Delta t) e^{j\beta(x-\Delta x)}$$

$$T_i^{n+1} = \psi(t + \Delta t) e^{j\beta x} \quad T_{i+1}^{n+1} = \psi(t + \Delta t) e^{j\beta(x+\Delta x)}$$

En remplaçant ces termes dans l'équation (3.21) et en simplifiant par $e^{j\beta x}$, nous aurons :

$$\psi(t) = -\lambda \psi(t + \Delta t) e^{-j\beta \Delta x} + (1 + 2\lambda) \psi(t + \Delta t) - \lambda \psi(t + \Delta t) e^{j\beta \Delta x}$$

$$\psi(t) = -2\lambda \cos(\beta \Delta x) \psi(t + \Delta t) + (1 + 2\lambda) \psi(t + \Delta t)$$

$$\frac{\psi(t)}{\psi(t+\Delta t)} = 1 + 2\lambda (1 - \cos(\beta \Delta x)) = 1 + 4\lambda \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)$$

D'où le facteur d'amplification :

$$\xi = \frac{1}{1 + 4\lambda \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)} \quad (3.22)$$

$\forall \Delta x$ et $\forall \Delta t$, nous avons toujours $\forall \lambda > 0$: $|\xi| \leq 1$.

On dira alors que ce schéma est *inconditionnellement stable*.

3.9 Application de la méthode de Crank-Nicholson à l'équation de diffusion

L'équation de la chaleur discrétisée avec le schéma de Crank-Nicholson (3.17) peut se mettre sous la forme :

$$-\lambda T_{i-1}^{n+1} + 2(1 + \lambda) T_i^{n+1} - \lambda T_{i+1}^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + 2(1 - \lambda) T_i^n + \lambda T_{i+1}^n \quad (3.23)$$

3.9.1 Consistance

La démonstration sort du cadre de ce cours, de même que celle de la formule (3.17).

3.9.2 Stabilité

Pour étudier la stabilité, utilisons l'analyse de *Von-Neumann* :

On suppose que la solution est de la forme : $T(x, t) = \psi(t) e^{j\beta x}$, on a alors :

$$\begin{aligned} T_i^n &= \psi(t) e^{j\beta x} & T_{i-1}^n &= \psi(t) e^{j\beta(x-\Delta x)} & T_{i+1}^n &= \psi(t) e^{j\beta(x+\Delta x)} \\ T_i^{n+1} &= \psi(t + \Delta t) e^{j\beta x} & T_{i-1}^{n+1} &= \psi(t + \Delta t) e^{j\beta(x-\Delta x)} & T_{i+1}^{n+1} &= \psi(t + \Delta t) e^{j\beta(x+\Delta x)} \end{aligned}$$

En remplaçant ces termes dans l'équation (3.23) et en simplifiant par $e^{j\beta x}$, nous aurons :

$$\psi(t+\Delta t) [2(1+\lambda) - \lambda (e^{-j\beta\Delta x} + e^{j\beta\Delta x})] = \psi(t) [2(1-\lambda) + \lambda (e^{-j\beta\Delta x} + e^{j\beta\Delta x})]$$

En divisant par $\psi(t)$ et en introduisant le facteur d'amplification :

$$\xi [2(1+\lambda) - 2\lambda \cos(\beta\Delta x)] = 2(1-\lambda) + 2\lambda \cos(\beta\Delta x)$$

$$\xi [2 + 2\lambda(1 - \cos(\beta\Delta x))] = 2 - 2\lambda(1 - \cos(\beta\Delta x))$$

$$\xi [2 + 4\lambda \sin^2(\frac{\beta\Delta x}{2})] = 2 - 4\lambda \sin^2(\frac{\beta\Delta x}{2})$$

D'où le facteur d'amplification :

$$\xi = \frac{1 - 2\lambda \sin^2(\frac{\beta\Delta x}{2})}{1 + 2\lambda \sin^2(\frac{\beta\Delta x}{2})} \quad (3.24)$$

$\forall \Delta x$ et $\forall \Delta t$, nous avons toujours $\forall \lambda \geq 0$: $|\xi| \leq 1$.

On dira alors que ce schéma est *inconditionnellement stable*.

3.10 Formulation matricielle du schéma explicite appliqué à l'équation de diffusion

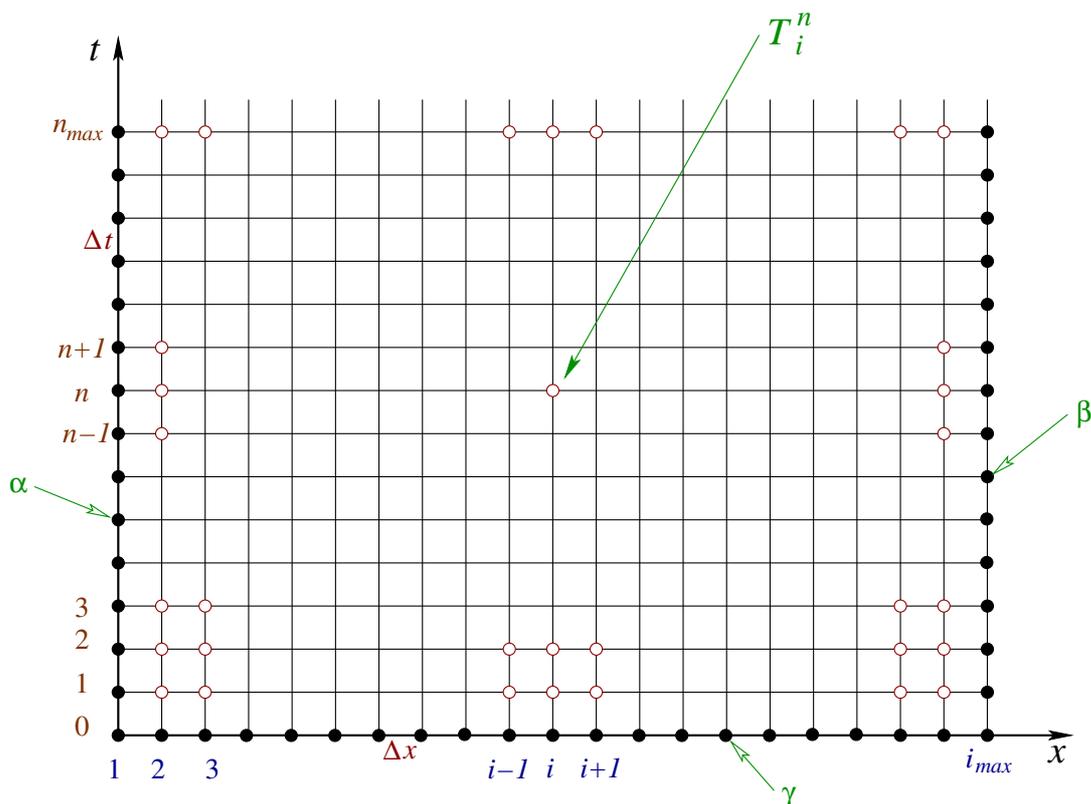
Reprenons notre problème discrétisé par la méthode explicite (3.19) avec les (C.L) définies dans le problème continu (2.3) :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) T_i^n + \lambda T_{i+1}^n$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, i_{max}$$

La discrétisation du milieu est faite selon la figure (Fig.3.7) ci-dessous : chaque ligne représente le problème unidimensionnel (1D) au pas temps correspondant.

Dans ce cas, nous avons l'abscisse et l'ordonnée de chaque nœud :


 Fig. 3.7: *Discrétisation du domaine pour l'équation de la chaleur.*

$$x_i = (i - 1) \Delta x \quad , \quad t^n = n \Delta t$$

- Conditions aux limites (C.L) :

$$\begin{cases} T_1^n = \alpha = 0 \\ T_{i_{max}}^n = \beta = 0 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{max}$$

- Conditions initiales (C.I) :

$$T_i^0 = \gamma = 1 \quad , \quad i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1$$

Pour tout point intérieur au domaine T_i^n , on utilise l'équation discrétisée avec :

$$n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1$$

Discrétisons maintenant l'équation aux pas de temps 0 et 1 avant d'aboutir à la formulation matricielle finale :

$$- \quad n = 0 : \quad \boxed{T_i^1 = \lambda T_{i-1}^0 + (1 - 2\lambda) T_i^0 + \lambda T_{i+1}^0}$$

$$\Delta t = \frac{5}{1000}, \quad \Delta x = \frac{2}{10} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.125$$

Choisissons aussi comme nombre de divisions maximal spatial : $i_{max} = 11$ et temporel : $n_{max} = 15$.

Nous aurons alors la discrétisation suivante (Fig.3.8) du domaine spatio-temporel :

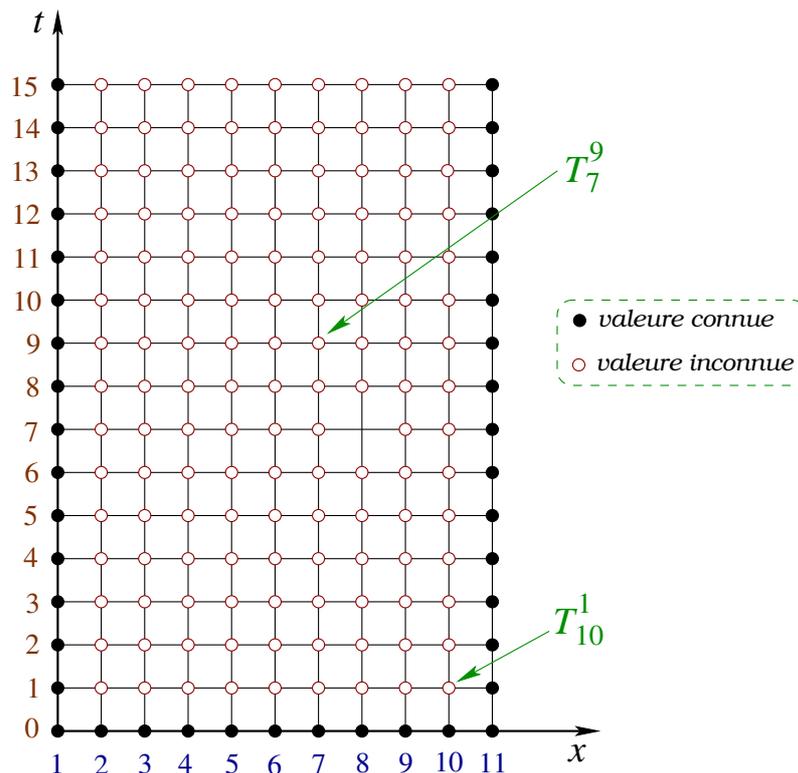


Fig. 3.8: *Discrétisation du domaine spatio-temporel.*

Ecrire un programme avec le logiciel de calcul symbolique *wxMaxima* pour résoudre ce problème et tracer les courbes nécessaires de la distribution de température à travers cette barre.

Ce programme doit être structuré de la manière suivante :

- Initialisation.
- Données.
- Calculs intermédiaires.
- Conditions aux limites et initiale.
- Boucle principale.
- Résultats numériques.
- Tracé des courbes.

Changer les valeurs de Δt et Δx pour voir leurs effets sur la stabilité de la solution.

3.13 Cas des conditions aux limites du 2^{ème} type

Dans le cas d'un flux imposé aux bornes du domaine, des considérations spéciales doivent être prises puisque dans ce cas, la discrétisation comprends les points situés aux limites du domaine (Fig.3.9). Une manière simple de traiter ce problème est d'utiliser un schéma décentré comme approximation aux bornes.

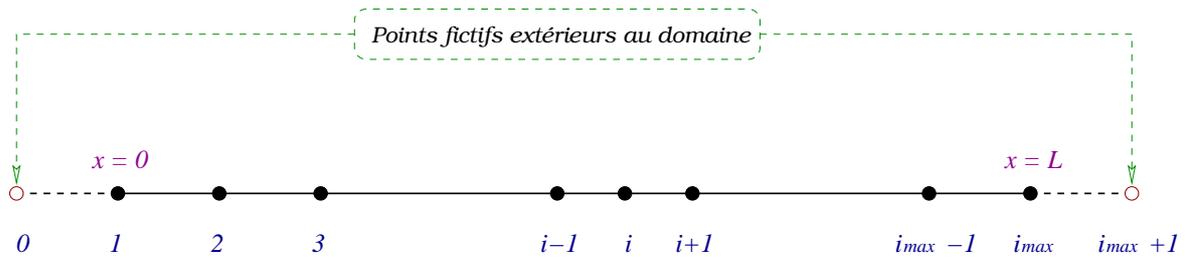


Fig. 3.9: *Conditions aux limites de type Neumann.*

- Conditions aux limites (C.L) :

Dans le domaine continu :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha \quad \text{et/ou} \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = \beta$$

ce qui correspond dans le domaine discrétisé à :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i=1} = \alpha \quad \text{et/ou} \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i=i_{max}} = \beta$$

En considérant par exemple le schéma explicite c-à-d que les variables sont évaluées au temps connu n , nous aurons d'après les différentes possibilités des tableaux (3.1. à 3.5) :

- **Au premier ordre :**

- A gauche, on choisi un schéma décentré avant :

$$\alpha = \frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1^n = T_2^n - \alpha \Delta x}$$

- A droite on choisi un schéma décentré arrière :

$$\beta = \frac{T_{i_{max}}^n - T_{i_{max}-1}^n}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_{i_{max}}^n = \beta \Delta x + T_{i_{max}-1}^n}$$

- **Au second ordre :**

- A gauche, on choisi un schéma décentré avant :

$$\alpha = \frac{-T_3^n + 4T_2^n - 3T_1^n}{2\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1^n = \frac{1}{3} (4T_2^n - T_3^n - 2\alpha \Delta x)}$$

ou un schéma centré en faisant intervenir des points fictifs :

$$\alpha = \frac{T_2^n - T_0^n}{2\Delta x} \Rightarrow \boxed{T_0^n = T_2^n - 2\alpha\Delta x}.$$

- A droite on choisi un schéma décentré arrière :

$$\beta = \frac{3T_{i_{max}}^n - 4T_{i_{max}-1}^n + T_{i_{max}-2}^n}{2\Delta x} \Rightarrow \boxed{T_{i_{max}}^n = \frac{1}{3}(4T_{i_{max}-1}^n - T_{i_{max}-2}^n + 2\beta\Delta x)}.$$

ou un schéma centré en faisant intervenir des points fictifs :

$$\beta = \frac{T_{i_{max}+1}^n - T_{i_{max}-1}^n}{2\Delta x} \Rightarrow \boxed{T_{i_{max}+1}^n = T_{i_{max}-1}^n + 2\beta\Delta x}.$$

3.13.1 Cas de l'approximation centrée

En appliquant par exemple le schéma centré successivement aux schémas explicite et implicite de l'équation de la chaleur, nous aurons :

- Schéma explicite :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) T_i^n + \lambda T_{i+1}^n$$

Ce schéma nous indique que la matrice est tridiagonale et que pour les noeuds internes les coefficients de cette matrice sont : λ , $(1 - 2\lambda)$ et λ . Il reste à déterminer ceux de la première et la dernière ligne en fonction des (C.L).

- A gauche : $T_1^{n+1} = \lambda T_0^n + (1 - 2\lambda) T_1^n + \lambda T_2^n$

$$T_1^{n+1} = \lambda(T_2^n - 2\alpha\Delta x) + (1 - 2\lambda) T_1^n + \lambda T_2^n$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1^{n+1} + 2\lambda\alpha\Delta x = (1 - 2\lambda) T_1^n + 2\lambda T_2^n}$$

- A droite : $T_{i_{max}}^{n+1} = \lambda T_{i_{max}-1}^n + (1 - 2\lambda) T_{i_{max}}^n + \lambda T_{i_{max}+1}^n$

$$T_{i_{max}}^{n+1} = \lambda T_{i_{max}-1}^n + (1 - 2\lambda) T_{i_{max}}^n + \lambda(T_{i_{max}-1}^n + 2\beta\Delta x)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{i_{max}}^{n+1} - 2\lambda\beta\Delta x = 2\lambda T_{i_{max}-1}^n + (1 - 2\lambda) T_{i_{max}}^n}$$

D'où la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_1 + 2\lambda\alpha\Delta x \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{i_{max}-1} \\ T_{i_{max}} - 2\lambda\beta\Delta x \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} (1 - 2\lambda) & 2\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & 2\lambda & (1 - 2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \end{bmatrix}^n \quad (3.27)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, i_{max}$$

On remarque que la dimension de la matrice a augmenté par rapport à celle déterminée avec la (C.L) de Dirichlet (3.25).

- Schéma implicite :

$$T_i^n = -\lambda T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda) T_i^{n+1} - \lambda T_{i+1}^{n+1}$$

Ce schéma nous indique que la matrice est tridiagonale et que pour les noeuds internes les coefficients de cette matrice sont : $-\lambda$, $(1 + 2\lambda)$ et $-\lambda$. Il reste à déterminer ceux de la première et la dernière ligne en fonction des (C.L).

- A gauche : $T_1^n = -\lambda T_0^{n+1} + (1 + 2\lambda) T_1^{n+1} - \lambda T_2^{n+1}$

$$T_1^n = -\lambda (T_2^{n+1} - 2\alpha \Delta x) + (1 + 2\lambda) T_1^{n+1} - \lambda T_2^{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1^n - 2\lambda\alpha\Delta x = (1 + 2\lambda) T_1^{n+1} - 2\lambda T_2^{n+1}}$$

- A droite : $T_{i_{max}}^n = -\lambda T_{i_{max}-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda) T_{i_{max}}^{n+1} - \lambda T_{i_{max}+1}^{n+1}$

$$T_{i_{max}}^n = -\lambda T_{i_{max}-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda) T_{i_{max}}^{n+1} - \lambda (T_{i_{max}-1}^{n+1} + 2\beta \Delta x)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{i_{max}}^n + 2\lambda\beta\Delta x = -2\lambda T_{i_{max}-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda) T_{i_{max}}^{n+1}}$$

D'où la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_1 - 2\lambda\alpha\Delta x \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{i_{max}-1} \\ T_{i_{max}} + 2\lambda\beta\Delta x \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (1 + 2\lambda) & -2\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & (1 + 2\lambda) & -\lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\lambda & (1 + 2\lambda) & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -2\lambda & (1 + 2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \end{bmatrix}^{n+1} \quad (3.28)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, i_{max}$$

On remarque, dans ce cas aussi, que la dimension de la matrice a augmenté par rapport à celle déterminée avec la (C.L) de Dirichlet (3.26).

Puisque la matrice est tridiagonale, alors elle peut être facilement résolue avec la factorisation LU (ou *Cholesky*).

3.13.2 Cas de l'approximation décentrée d'ordre 1

Considérons maintenant, toujours pour le cas de l'équation de la chaleur discrétisée par les schémas explicite et implicite d'Euler, le cas de l'approximation décentrée d'ordre 1 utilisée pour discrétiser les conditions aux limites de type Neumann (CLN) :

- Schéma explicite :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) T_i^n + \lambda T_{i+1}^n$$

Ce schéma nous indique que la matrice est tridiagonale et que pour les nœuds internes les coefficients de cette matrice sont : λ , $(1 - 2\lambda)$ et λ . Il reste à déterminer ceux de la première et la dernière ligne en fonction des (C.L).

- A gauche : $T_2^{n+1} = \lambda T_1^n + (1 - 2\lambda) T_2^n + \lambda T_3^n$

on utilise dans ce cas, l'approximation décentrée avant, nous aurons alors :

$$T_2^{n+1} = \lambda(T_2^n - \alpha \Delta x) + (1 - 2\lambda) T_2^n + \lambda T_3^n$$

$$\Rightarrow \boxed{T_2^{n+1} + \lambda \alpha \Delta x = (1 - \lambda) T_2^n + \lambda T_3^n}$$

- A droite : $T_{i_{max}-1}^{n+1} = \lambda T_{i_{max}-2}^n + (1 - 2\lambda) T_{i_{max}-1}^n + \lambda T_{i_{max}}^n$

on utilise dans ce cas, l'approximation décentrée arrière, nous aurons alors :

$$T_{i_{max}-1}^{n+1} = \lambda T_{i_{max}-2}^n + (1 - 2\lambda) T_{i_{max}-1}^n + \lambda (T_{i_{max}-1}^n + \beta \Delta x)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{i_{max}-1}^{n+1} - \lambda \beta \Delta x = \lambda T_{i_{max}-2}^n + (1 - \lambda) T_{i_{max}-1}^n}$$

D'où la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_2 + \lambda\alpha\Delta x \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{i_{max}-2} \\ T_{i_{max}-1} - \lambda\beta\Delta x \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} (1-\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda & (1-2\lambda) & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & (1-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \end{bmatrix}^n \quad (3.29)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1$$

On remarque que la dimension de la matrice est inférieure à celle déterminée avec l'approximation centrée.

- Schéma implicite :

$$T_i^n = -\lambda T_{i-1}^{n+1} + (1+2\lambda) T_i^{n+1} - \lambda T_{i+1}^{n+1}$$

Ce schéma nous indique que la matrice est tridiagonale et que pour les nœuds internes les coefficients de cette matrice sont : $-\lambda$, $(1+2\lambda)$ et $-\lambda$. Il reste à déterminer ceux de la première et la dernière ligne en fonction des (C.L).

- A gauche : $T_2^n = -\lambda T_1^{n+1} + (1+2\lambda) T_2^{n+1} - \lambda T_3^{n+1}$

on utilise dans ce cas, l'approximation décentrée avant, nous aurons alors :

$$T_2^n = -\lambda (T_2^{n+1} - \alpha \Delta x) + (1+2\lambda) T_2^{n+1} - \lambda T_3^{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_2^n - \lambda \alpha \Delta x = (1+\lambda) T_2^{n+1} - \lambda T_3^{n+1}}$$

- A droite : $T_{i_{max}-1}^n = -\lambda T_{i_{max}-2}^{n+1} + (1+2\lambda) T_{i_{max}-1}^{n+1} - \lambda T_{i_{max}}^{n+1}$

on utilise dans ce cas, l'approximation décentrée arrière, nous aurons alors :

$$T_{i_{max}-1}^n = -\lambda T_{i_{max}-2}^{n+1} + (1+2\lambda) T_{i_{max}-1}^{n+1} - \lambda (T_{i_{max}-1}^{n+1} + \beta \Delta x)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{i_{max}-1}^n + \lambda \beta \Delta x = -\lambda T_{i_{max}-2}^{n+1} + (1+\lambda) T_{i_{max}-1}^{n+1}}$$

D'où la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_2 - \lambda\alpha\Delta x \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{i_{max}-2} \\ T_{i_{max}-1} + \lambda\beta\Delta x \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (1+\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \end{bmatrix}^{n+1} \quad (3.30)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1$$

On remarque, dans ce cas aussi, que la dimension de la matrice est inférieure à celle déterminée avec l'approximation centrée.

3.13.3 Cas de l'approximation décentrée d'ordre 2

Considérons maintenant, toujours pour le cas de l'équation de la chaleur discrétisée par les schémas explicite et implicite d'Euler, le cas de l'approximation décentrée d'ordre 2 utilisée pour discrétiser les conditions aux limites de type Neumann (CLN) :

- Schéma explicite :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) T_i^n + \lambda T_{i+1}^n$$

Ce schéma nous indique que la matrice est tridiagonale et que pour les nœuds internes les coefficients de cette matrice sont : λ , $(1 - 2\lambda)$ et λ . Il reste à déterminer ceux de la première et la dernière ligne en fonction des (C.L).

- A gauche : $T_2^{n+1} = \lambda T_1^n + (1 - 2\lambda) T_2^n + \lambda T_3^n$

on utilise dans ce cas, l'approximation décentrée avant, nous aurons alors :

$$T_2^{n+1} = \frac{\lambda}{3} (4T_2^n - T_3^n - 2\alpha\Delta x) + (1 - 2\lambda) T_2^n + \lambda T_3^n$$

$$\Rightarrow \boxed{T_2^{n+1} + \frac{2}{3}\lambda\alpha\Delta x = (1 - \frac{2}{3}\lambda) T_2^n + \frac{2}{3}\lambda T_3^n}$$

- A droite : $T_{i_{max}-1}^{n+1} = \lambda T_{i_{max}-2}^n + (1 - 2\lambda) T_{i_{max}-1}^n + \lambda T_{i_{max}}^n$

on utilise dans ce cas, l'approximation décentrée arrière, nous aurons alors :

$$T_{i_{max}-1}^{n+1} = \lambda T_{i_{max}-2}^n + (1 - 2\lambda) T_{i_{max}-1}^n + \frac{\lambda}{3} (4 T_{i_{max}-1}^n - T_{i_{max}-2}^n + 2\beta \Delta x)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{i_{max}-1}^{n+1} - \frac{2}{3}\lambda\beta\Delta x = \frac{2}{3}\lambda T_{i_{max}-2}^n + (1 - \frac{2}{3}\lambda) T_{i_{max}-1}^n}$$

D'où la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_2 + \frac{2}{3}\lambda\alpha\Delta x \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{i_{max}-2} \\ T_{i_{max}-1} - \frac{2}{3}\lambda\beta\Delta x \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} (1 - \frac{2}{3}\lambda) & \frac{2}{3}\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{2}{3}\lambda & (1 - \frac{2}{3}\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \end{bmatrix}^n \quad (3.31)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1$$

On remarque que la dimension de la matrice est inférieure à celle déterminée avec l'approximation centrée.

- Schéma implicite :

$$T_i^n = -\lambda T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda) T_i^{n+1} - \lambda T_{i+1}^{n+1}$$

Ce schéma nous indique que la matrice est tridiagonale et que pour les nœuds internes les coefficients de cette matrice sont : $-\lambda$, $(1 + 2\lambda)$ et $-\lambda$. Il reste à déterminer ceux de la première et la dernière ligne en fonction des (C.L).

- A gauche : $T_2^n = -\lambda T_1^{n+1} + (1 + 2\lambda) T_2^{n+1} - \lambda T_3^{n+1}$

on utilise dans ce cas, l'approximation décentrée avant, nous aurons alors :

$$T_2^n = -\frac{\lambda}{3} (4 T_2^{n+1} - T_3^{n+1} - 2\alpha \Delta x) + (1 + 2\lambda) T_2^{n+1} - \lambda T_3^{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_2^n - \frac{2}{3}\lambda\alpha\Delta x = (1 + \frac{2}{3}\lambda) T_2^{n+1} - \frac{2}{3}\lambda T_3^{n+1}}$$

- A droite : $T_{i_{max}-1}^n = -\lambda T_{i_{max}-2}^{n+1} + (1 + 2\lambda) T_{i_{max}-1}^{n+1} - \lambda T_{i_{max}}^{n+1}$

on utilise dans ce cas, l'approximation décentrée arrière, nous aurons alors :

$$T_{i_{max}-1}^n = -\lambda T_{i_{max}-2}^{n+1} + (1 + 2\lambda) T_{i_{max}-1}^{n+1} - \frac{\lambda}{3} (4 T_{i_{max}-1}^{n+1} - T_{i_{max}-2}^{n+1} + 2\beta \Delta x)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{i_{max}-1}^n + \frac{2}{3}\lambda\beta\Delta x = -\frac{2}{3}\lambda T_{i_{max}-2}^{n+1} + (1 + \frac{2}{3}\lambda) T_{i_{max}-1}^{n+1}}$$

D'où la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_2 - \frac{2}{3}\lambda\alpha\Delta x \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{i_{max}-2} \\ T_{i_{max}-1} + \frac{2}{3}\lambda\beta\Delta x \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (1 + \frac{2}{3}\lambda) & -\frac{2}{3}\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & (1 + 2\lambda) & -\lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\lambda & (1 + 2\lambda) & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{2}{3}\lambda & (1 + \frac{2}{3}\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \end{bmatrix}^{n+1} \quad (3.32)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1$$

On remarque, dans ce cas aussi, que la dimension de la matrice est inférieure à celle déterminée avec l'approximation centrée

3.14 Equations non linéaires

Considérons l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.33)$$

où la vitesse de convection $u(T)$ et le coefficient de diffusion (diffusivité thermique) $\alpha(T)$ dépendent de la température T .

3.14.1 Discrétisation par un schéma explicite

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u_i^n \cdot \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = \alpha_i^n \cdot \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.34)$$

Les coefficients non-linéaires sont simplement évalués au nœud de base (i, n) où T_i^n est connue, donc u_i^n et α_i^n aussi. L'équation (3.34) peut être facilement résolue pour T_i^{n+1} car les coefficients non-linéaires ne posent aucune complication numérique. C'est le cas typique de tous les schémas explicites.

3.14.2 Discrétisation par un schéma implicite

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u_i^{n+1} \cdot \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = \alpha_i^{n+1} \cdot \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (3.35)$$

Dans ce cas, les coefficients non-linéaires posent de sérieux problèmes d'ordre numérique. u_i^{n+1} et α_i^{n+1} dépendent de T_i^{n+1} qui est inconnu. L'équation (3.35) appliquée à chaque nœud du maillage donne un système non-linéaire d'équations couplées. Ce système peut être résolu en retardant ("lagging") les coefficients non-linéaires (c-à-d on pose : $u_i^{n+1} = u_i^n$ et $\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n$) et par itérations en utilisant la méthode de Newton ou par linéarisation temporelle.

3.15 Problèmes multidimensionnels

Considérons l'équation de diffusion linéaire bidimensionnelle :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.36)$$

3.15.1 Discrétisation par un schéma explicite

La discrétisation de l'équation (3.36) par un schéma explicite donne :

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right] \quad (3.37)$$

On peut montrer que ce schéma est conditionnellement stable avec la condition :

$$\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (3.38)$$

Si $\Delta x = \Delta y$ alors cette condition de stabilité sera $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4}$ qui est encore plus restrictive que le cas unidimensionnel ($\lambda \leq \frac{1}{2}$), ce qui fait que cette méthode devient moins pratique.

L'équation (3.37) peut être résolue directement pour $T_{i,j}^{n+1}$ et aucune complexité numérique supplémentaire ne sera rajouté à cause du terme supplémentaire. De même pour le cas 3D où on rajoute encore le terme discrétisé correspondant à $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ sans aucun problème d'ordre numérique. Ceci est le cas typique de tous les schémas explicites.

On montre que ce schéma est conditionnellement stable avec la condition :

$$\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (3.39)$$

Si $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ alors cette condition de stabilité sera $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{6}$ qui est encore plus restrictive que le cas bidimensionnel.

3.15.2 Discrétisation par un schéma implicite

La discrétisation de l'équation (3.36) par un schéma implicite donne :

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right] \quad (3.40)$$

Ce schéma est inconditionnellement stable. En appliquant l'équation (3.40) en chaque nœud du maillage, on obtient une matrice bande pentadiagonale (5) qui nécessite beaucoup d'efforts de calcul.

La méthode SOR peut être appliquée pour les problèmes 2D, mais cette approche est assez lourde pour les nœuds 3D. Les méthodes ADI et AFI "*Approximation-Factorization-Implicite*" peuvent être utilisées pour réduire la matrice bande en deux (ou 3 pour les problèmes 3D) systèmes de matrices tridiagonales qui peuvent être résolus successivement par l'algorithme de Thomas.

3.16 Equation de Laplace

Dans le domaine de l'énergétique, l'équation de Laplace est souvent rencontré en mécanique des fluides dans les écoulements potentiels (irrotationnels) et en transfert thermique dans la conduction dans un solide par exemple.

Soit par exemple à résoudre un problème régi par l'équation de Laplace et modélisant le transfert thermique à travers une plaque rectangulaire. Cette équation s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3.41)$$

Nous passons du domaine continu au domaine discret en divisant le premier en un ensemble de mailles aussi petites que l'on peut (Fig.3.10).

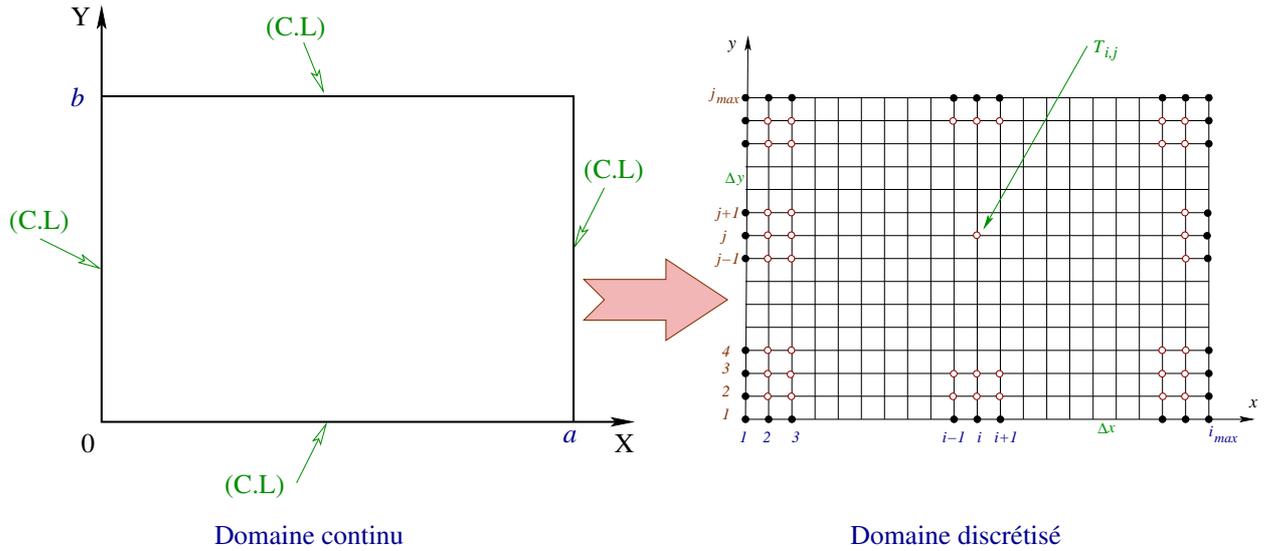


Fig. 3.10: *Discrétisation du domaine pour l'équation de Laplace.*

3.16.1 Discrétisation par la formule à 5 points (Runge 1908)

L'équation (3.41) est discrétisée par l'approximation centrée d'ordre 2 en espace $O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$ de la manière suivante :

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (3.42)$$

On posant : $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ nous pouvons calculer les températures nodales par :

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + \beta^2 (T_{i,j-1} + T_{i,j+1})}{2(1 + \beta^2)} \quad (3.43)$$

et l'équation discrétisée s'écrit :

$$-2(1 + \beta^2)T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + \beta^2 (T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) = 0 \quad (3.44)$$

L'étude de la consistance de ce schéma s'effectue de la même manière que pour l'équation de diffusion. La convergence sera réalisée quand la différence E_{ij} entre la solution calculée T_{ij} et la solution exacte \bar{T}_{ij} tend vers 0 quand Δx et Δy tendent vers 0 (c-à-d en rendant la maillage de plus en plus fin).

Pour simplifier, on prend souvent $\Delta x = \Delta y$ et donc $\beta = 1$. L'équation (3.43) se réduit à :

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{4} \quad (3.45)$$

et l'équation discrétisée s'écrit :

$$-4T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} = 0 \quad (3.46)$$

La représentation schématique de ce schéma est (Fig.3.11) :

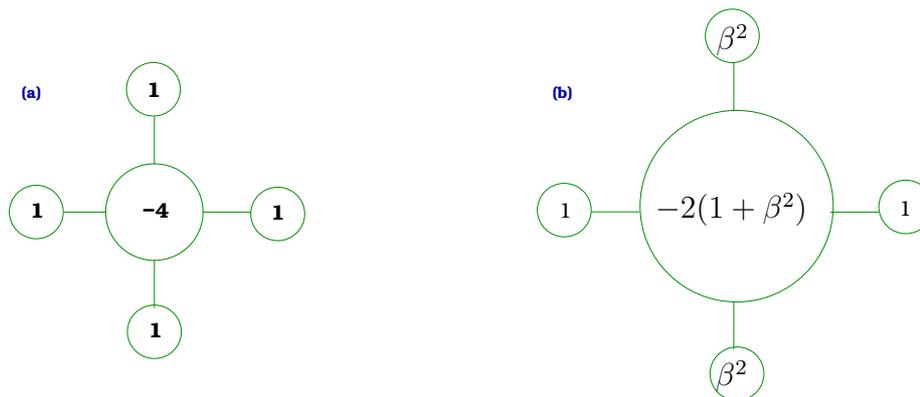


Fig. 3.11: *Schéma cellulaire de la formulation à 5 points* : (a) $\beta = 1$, (b) $\beta \neq 1$.

Exemple 1 :

Soit à déterminer les températures nodales dans la plaque carrée soumise aux conditions aux limites de Dirichlet indiquées sur la figure (Fig.3.12).

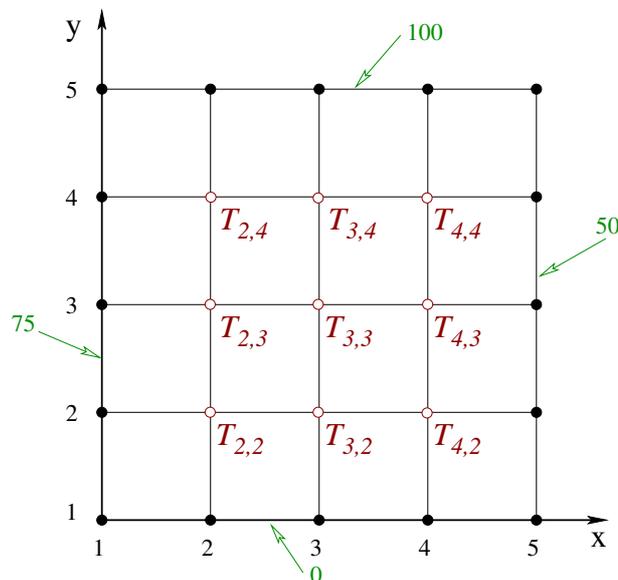


Fig. 3.12: *Equation de Laplace. Exemple 1.*

Prenons 4 divisions selon X , d'où un nombre de nœuds : $N_x = 5$.

Prenons 4 divisions selon Y , d'où un nombre de nœuds : $N_y = 5$.

Nombre d'équations du système à résoudre : $N = (N_x - 2) \times (N_y - 2) = 9$.

Puisque $\Delta x = \Delta y$, alors $\beta = 1$ et on applique alors la formule (3.45) à chaque nœud interne du maillage, nous aurons le système de 9 équations à 9 inconnues suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -4T_{2,2} + T_{1,2} + T_{3,2} + T_{2,1} + T_{2,3} = 0 \\ -4T_{3,2} + T_{2,2} + T_{4,2} + T_{3,1} + T_{3,3} = 0 \\ -4T_{4,2} + T_{3,2} + T_{5,2} + T_{4,1} + T_{4,3} = 0 \\ -4T_{2,3} + T_{1,3} + T_{3,3} + T_{2,2} + T_{2,4} = 0 \\ -4T_{3,3} + T_{2,3} + T_{4,3} + T_{3,2} + T_{3,4} = 0 \\ -4T_{4,3} + T_{3,3} + T_{5,3} + T_{4,2} + T_{4,4} = 0 \\ -4T_{2,4} + T_{1,4} + T_{3,4} + T_{2,3} + T_{2,5} = 0 \\ -4T_{3,4} + T_{2,4} + T_{4,4} + T_{3,3} + T_{3,5} = 0 \\ -4T_{4,4} + T_{3,4} + T_{5,4} + T_{4,3} + T_{4,5} = 0 \end{array} \right. \text{ avec les (C.L.) : } \left\{ \begin{array}{l} T_{2,1} = T_{3,1} = T_{4,1} = 0 \\ T_{1,2} = T_{1,3} = T_{1,4} = 75 \\ T_{5,2} = T_{5,3} = T_{5,4} = 50 \\ T_{2,5} = T_{3,5} = T_{4,5} = 100 \end{array} \right.$$

La forme matricielle $A.T = B$ de ce système s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \\ T_{4,3} \\ T_{2,4} \\ T_{3,4} \\ T_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75 \\ 0 \\ -50 \\ -75 \\ 0 \\ -50 \\ -175 \\ -100 \\ -150 \end{bmatrix}$$

La solution numérique est déterminée en utilisant le logiciel de calcul *wxMaxima* :

$$T_{2,2} = 42.85, \quad T_{3,2} = 33.26, \quad T_{4,2} = 33.93, \quad T_{2,3} = 63.17, \quad T_{3,3} = 56.25,$$

$$T_{4,3} = 52.45, \quad T_{2,4} = 78.57, \quad T_{3,4} = 76.11, \quad T_{4,4} = 69.64.$$

Exemple 2 :

Ecrire la forme matricielle $A.T = B$ du système à résoudre pour le problème de la figure (Fig.3.12) en utilisant le schéma donné par la relation (3.43) et en supposant les (C.L) inconnues .

En suivant la même démarche que pour l'exemple 1 et en posant $\gamma = -2(1 + \beta^2)$,

nous aurons :

$$\begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 1 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^2 & 0 & 0 & \gamma & 1 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 & 1 & \gamma & 1 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 1 & \gamma & 0 & 0 & \beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 1 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \\ T_{4,3} \\ T_{2,4} \\ T_{3,4} \\ T_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{1,2} - \beta^2 T_{2,1} \\ -\beta^2 T_{3,1} \\ -T_{5,2} - \beta^2 T_{4,1} \\ -T_{1,3} \\ 0 \\ -T_{5,3} \\ -T_{1,4} - \beta^2 T_{2,5} \\ -\beta^2 T_{3,5} \\ -T_{5,4} - \beta^2 T_{4,5} \end{bmatrix}$$

La matrice A que nous avons obtenu est dite *matrice bande symétrique*.

Exemple 3 :

Ecrire la forme matricielle $A.T = B$ pour le problème de la figure (Fig.3.13) et en utilisant le schéma donné par la relation (3.43).

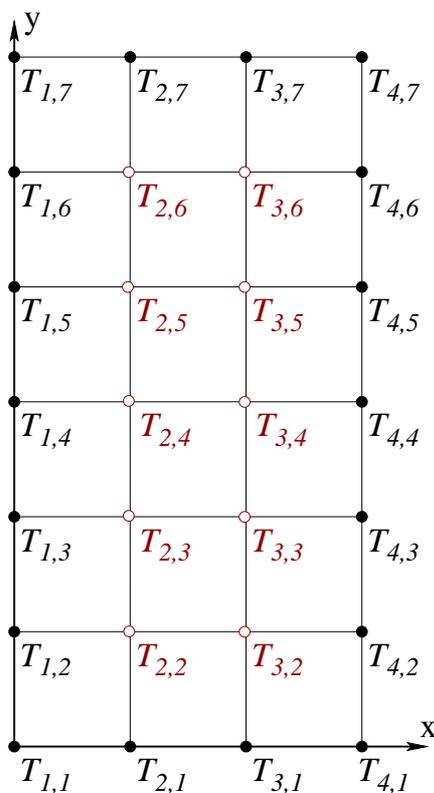


Fig. 3.13: *Equation de Laplace. Exemple 3.*

En suivant la même démarche que pour l'exemple 1 et en posant $\gamma = -2(1 + \beta^2)$,

nous aurons :

$$\begin{bmatrix} \gamma & 1 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^2 & 0 & \gamma & 1 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 1 & \gamma & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 & \gamma & 1 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 1 & \gamma & 0 & \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & \gamma & 1 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 1 & \gamma & 0 & \beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 1 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \\ T_{2,4} \\ T_{3,4} \\ T_{2,5} \\ T_{3,5} \\ T_{2,6} \\ T_{3,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{1,2} - \beta^2 T_{2,1} \\ -T_{4,2} - \beta^2 T_{3,1} \\ -T_{1,3} \\ -T_{4,3} \\ -T_{1,4} \\ -T_{4,4} \\ -T_{1,5} \\ -T_{4,5} \\ -T_{1,6} - \beta^2 T_{2,7} \\ -T_{4,6} - \beta^2 T_{3,7} \end{bmatrix}$$

3.16.2 Conditions limites de Dirichlet variables

Dans ce cas, l'un des cotés de la plaque (ou bien tous) est soumis à une température variable (CLDV) régie par une fonction quelconque (polynomiale, sinusoïdale, logarithmique, ...etc).

Exemple 4 :

Reprenons le même exemple 1 de la figure (Fig.3.12) mais en supposant que la température du côté supérieur n'est pas constante et qu'elle est donnée par la relation $T(x) = 2.10^4 x^2$. Les dimensions de la plaque étant de $(12 \times 12) \text{ cm}^2$, ce qui nous donne un pas axial $\Delta x = 3 \text{ cm}$. Dans ce cas les nouvelles (C.L) seront :

$$(C.L) : \begin{cases} T_{2,1} = T_{3,1} = T_{4,1} & = 0 \\ T_{1,2} = T_{1,3} = T_{1,4} & = 75 \\ T_{5,2} = T_{5,3} = T_{5,4} & = 50 \\ T_{2,5} = 18, \quad T_{3,5} = 72, \quad T_{4,5} & = 162 \end{cases}$$

avec la (CLDV) calculée comme suit :

$$T_{i,5} = T(x_i) = 2.10^4 x_i^2 \quad \text{où} \quad x_i = (i - 1) \Delta x \quad \text{avec} \quad (i = 2, 3, 4)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} T_{2,5} = 2.10^4 \Delta x^2 = 2.10^4 (3.10^{-2})^2 & = 18 \\ T_{3,5} = 2.10^4 (2 \Delta x)^2 = 2.10^4 (6.10^{-2})^2 & = 72 \\ T_{4,5} = 2.10^4 (3 \Delta x)^2 = 2.10^4 (9.10^{-2})^2 & = 162 \end{cases}$$

et la nouvelle forme matricielle de ce problème s'écrira :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \\ T_{4,3} \\ T_{2,4} \\ T_{3,4} \\ T_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75 \\ 0 \\ -50 \\ -75 \\ 0 \\ -50 \\ -93 \\ -72 \\ -212 \end{bmatrix}$$

3.16.3 Méthodes de résolution

Les méthodes utilisées pour la résolution de ce genre de systèmes sont les méthodes *directes* et *indirectes* (ou *itératives*).

- **Méthodes directes** : Elimination de Gauss, Algorithme de Thomas, Cholesky, ...etc. Ces méthodes consomment beaucoup de temps, les erreurs d'arrondi augmentent avec la taille du système et deviennent catastrophiques !. Elles souffrent beaucoup du problème de stockage des éléments nuls qui occupent inutilement la mémoire, elle conviennent donc pour les systèmes de faible taille.
- **Méthodes itératives** : Jacobi, Gauss-Siedel, SOR, ADI, ...etc. Dans ces méthodes, les erreurs d'arrondi sont corrigées à chaque itération et elles utilisent uniquement les éléments non nuls donc pas de problème de mémoire et de ce fait conviennent bien aux systèmes larges. Les méthodes recommandées sont dans l'ordre : SOR et ADI en premier, Gauss-Siedel en second et enfin Jacobi qui converge plus lentement.

Remarques :

- La méthode d'élimination de Gauss nécessite un nombre de multiplication égal à : $N_m = \frac{1}{3} N^3 + N^2 - \frac{1}{3} N$ soit 321 multiplications pour notre exemple où $N = 9$. Si ce chiffre est doublé ($N = 18$) alors $N_m = 2262$.
- Pour un maillage de (5×7) nœuds, c-à-d 15 inconnues, la matrice correspondante contient 225 éléments dont seulement 59 différents de zéro, soit 26 %.
- Pour un maillage de (9×13) nœuds, c-à-d 77 inconnues, la matrice correspondante contient 5929 éléments dont seulement 169 différents de zéro, soit 2.8 %.

3.16.4 Conditions aux limites de Neumann

Considérons que la plaque présente par exemple un plan de symétrie vertical (Fig.3.14). Donc aucun transfert de chaleur ne s'effectue à travers ce plan et il n'y aura donc aucun gradient de température c-à-d : $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{AA'} = 0$. Nous aurons alors d'après cette figure :

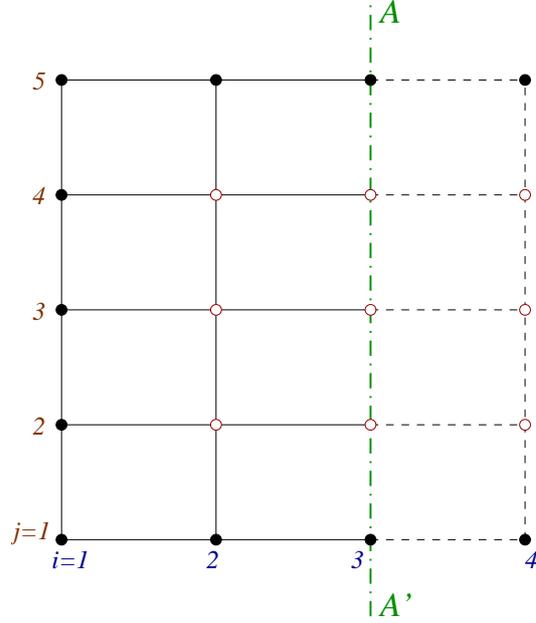


Fig. 3.14: *Equation de Laplace. (C.L) de Neumann.*

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{3,j} = 0 \quad (j = 2, 3, 4) \quad (3.47)$$

Ecrivons la formulation à 5 points pour tous les points appartenant à l'axe AA' c-à-d de coordonnées $(3,j)$, d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{3,j} = T_{2,j} + T_{4,j} + \beta^2 (T_{3,j-1} + T_{3,j+1}) \quad (j = 2, 3, 4) \quad (3.48)$$

Remarquons que les $T_{4,j}$ sont en dehors du domaine de calcul. Pour les calculer, on utilisera l'équation (3.47) en la discrétisant par un schéma centré de la manière suivante :

$$\alpha = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{3,j} = \frac{T_{4,j} - T_{2,j}}{2 \Delta x} + O(\Delta x^2)$$

d'où l'on tire :

$$T_{4,j} = T_{2,j} + 2 \alpha \Delta x \quad (3.49)$$

En remplaçant (3.49) dans (3.48) nous aurons les 3 équations :

$$2(1 + \beta^2) T_{3,j} = 2T_{2,j} + \beta^2 (T_{3,j-1} + T_{3,j+1}) + 2 \alpha \Delta x \quad (j = 2, 3, 4) \quad (3.50)$$

Dans notre cas particulier $\alpha = 0$, alors la relation (3.50) devient :

$$2(1 + \beta^2) T_{3,j} = 2T_{2,j} + \beta^2 (T_{3,j-1} + T_{3,j+1}) \quad (j = 2, 3, 4) \quad (3.51)$$

Généralisons maintenant l'équation (3.50) dans le cas où la condition de Neumann (CLN) est prescrite sur l'un des cotés d'une plaque rectangulaire, les autres cotés étant soumis à des conditions de Dirichlet (CLD). Cette (CLN) sera discrétisée par des schémas d'ordre 1 et 2. Cette condition sera discrétisée ci-dessous par des schémas d'ordre 1 et 2.

a- Discrétisation par un schéma centré

CLN à gauche : d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{1,j} = T_{0,j} + T_{2,j} + \beta^2 (T_{1,j-1} + T_{1,j+1})$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{1,j} = \frac{T_{2,j} - T_{0,j}}{2\Delta x} \implies T_{0,j} = T_{2,j} - 2\alpha \Delta x$$

$$2(1 + \beta^2) T_{1,j} = 2T_{2,j} + \beta^2 (T_{1,j-1} + T_{1,j+1}) - 2\alpha \Delta x \quad (j = 2, 3, \dots, j_{max} - 1) \quad (3.52)$$

CLN à droite : d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{i_{max},j} = T_{i_{max}-1,j} + T_{i_{max}+1,j} + \beta^2 (T_{i_{max},j-1} + T_{i_{max},j+1})$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i_{max},j} = \frac{T_{i_{max}+1,j} - T_{i_{max}-1,j}}{2\Delta x} \implies T_{i_{max}+1,j} = T_{i_{max}-1,j} + 2\alpha \Delta x$$

$$2(1 + \beta^2) T_{i_{max},j} = 2T_{i_{max}-1,j} + \beta^2 (T_{i_{max},j-1} + T_{i_{max},j+1}) + 2\alpha \Delta x \quad (j = 2, 3, \dots, j_{max} - 1) \quad (3.53)$$

CLN en bas : d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{i,1} = T_{i-1,1} + T_{i+1,1} + \beta^2 (T_{i,0} + T_{i,2})$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,1} = \frac{T_{i,2} - T_{i,0}}{2\Delta y} \implies T_{i,0} = T_{i,2} - 2\alpha \Delta y$$

$$2(1 + \beta^2) T_{i,1} = T_{i-1,1} + T_{i+1,1} + 2\beta^2 (T_{i,2} - \alpha \Delta y) \quad (i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1) \quad (3.54)$$

CLN en haut : d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{i,j_{max}} = T_{i-1,j_{max}} + T_{i+1,j_{max}} + \beta^2 (T_{i,j_{max}-1} + T_{i,j_{max}+1})$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,j_{max}} = \frac{T_{i,j_{max}+1} - T_{i,j_{max}-1}}{2 \Delta y} \implies T_{i,j_{max}+1} = T_{i,j_{max}-1} + 2 \alpha \Delta y$$

$$2(1 + \beta^2) T_{i,j_{max}} = T_{i-1,j_{max}} + T_{i+1,j_{max}} + 2 \beta^2 (T_{i,j_{max}-1} + \alpha \Delta y) \quad (i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1) \quad (3.55)$$

b- Discrétisation par des schémas décentrés d'ordre 1

CLN à gauche : d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{2,j} = T_{1,j} + T_{3,j} + \beta^2 (T_{2,j-1} + T_{2,j+1})$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{1,j} = \frac{T_{2,j} - T_{1,j}}{\Delta x} \implies T_{1,j} = T_{2,j} - \alpha \Delta x$$

$$(1 + 2 \beta^2) T_{2,j} = T_{3,j} + \beta^2 (T_{2,j-1} + T_{2,j+1}) - \alpha \Delta x \quad (j = 2, 3, \dots, j_{max} - 1) \quad (3.56)$$

CLN à droite : d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{i_{max}-1,j} = T_{i_{max}-2,j} + T_{i_{max},j} + \beta^2 (T_{i_{max}-1,j-1} + T_{i_{max}-1,j+1})$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i_{max},j} = \frac{T_{i_{max},j} - T_{i_{max}-1,j}}{\Delta x} \implies T_{i_{max},j} = T_{i_{max}-1,j} + \alpha \Delta x$$

$$(1 + 2 \beta^2) T_{i_{max}-1,j} = T_{i_{max}-2,j} + \beta^2 (T_{i_{max}-1,j-1} + T_{i_{max}-1,j+1}) + \alpha \Delta x \quad (j = 2, 3, \dots, j_{max} - 1) \quad (3.57)$$

CLN en bas : d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{i,2} = T_{i-1,2} + T_{i+1,2} + \beta^2 (T_{i,1} + T_{i,3})$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,1} = \frac{T_{i,2} - T_{i,1}}{\Delta y} \implies T_{i,1} = T_{i,2} - \alpha \Delta y$$

$$(2 + \beta^2) T_{i,2} = T_{i-1,2} + T_{i+1,2} + \beta^2 (T_{i,3} - \alpha \Delta y) \quad (i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1) \quad (3.58)$$

CLN en haut : d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{i,j_{max}-1} = T_{i-1,j_{max}-1} + T_{i+1,j_{max}-1} + \beta^2 (T_{i,j_{max}-2} + T_{i,j_{max}})$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,j_{max}} = \frac{T_{i,j_{max}} - T_{i,j_{max}-1}}{\Delta y} \implies T_{i,j_{max}} = T_{i,j_{max}-1} + \alpha \Delta y$$

$$(2 + \beta^2) T_{i,j_{max}-1} = T_{i-1,j_{max}-1} + T_{i+1,j_{max}-1} + \beta^2 (T_{i,j_{max}-2} + \alpha \Delta y) \quad (i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1) \quad (3.59)$$

c- Discrétisation par des schémas décentrés d'ordre 2

CLN à gauche : d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{2,j} = T_{1,j} + T_{3,j} + \beta^2 (T_{2,j-1} + T_{2,j+1})$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{1,j} = \frac{-T_{3,j} + 4T_{2,j} - 3T_{1,j}}{2\Delta x} \implies T_{1,j} = \frac{1}{3} (4T_{2,j} - T_{3,j} - 2\alpha \Delta x)$$

$$2(1 + 3\beta^2) T_{2,j} = 2T_{3,j} + 3\beta^2 (T_{2,j-1} + T_{2,j+1}) - 2\alpha \Delta x \quad (j = 2, 3, \dots, j_{max} - 1) \quad (3.60)$$

CLN à droite : d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{i_{max}-1,j} = T_{i_{max}-2,j} + T_{i_{max},j} + \beta^2 (T_{i_{max}-1,j-1} + T_{i_{max}-1,j+1})$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i_{max},j} = \frac{3T_{i_{max},j} - 4T_{i_{max}-1,j} + T_{i_{max}-2,j}}{2\Delta x}$$

$$\implies T_{i_{max},j} = \frac{1}{3} (4T_{i_{max}-1,j} - T_{i_{max}-2,j} + 2\alpha \Delta x)$$

$$2(1 + 3\beta^2) T_{i_{max}-1,j} = 2T_{i_{max}-2,j} + 3\beta^2 (T_{i_{max}-1,j-1} + T_{i_{max}-1,j+1}) + 2\alpha \Delta x \quad (j = 2, 3, \dots, j_{max} - 1) \quad (3.61)$$

CLN en bas : d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{i,2} = T_{i-1,2} + T_{i+1,2} + \beta^2 (T_{i,1} + T_{i,3})$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,1} = \frac{-T_{i,3} + 4T_{i,2} - 3T_{i,1}}{2\Delta y} \implies T_{i,1} = \frac{1}{3} (4T_{i,2} - T_{i,3} - 2\alpha \Delta y)$$

$$2(3 + \beta^2) T_{i,2} = 3(T_{i-1,2} + T_{i+1,2}) + 2\beta^2 (T_{i,3} - \alpha \Delta y) \quad (i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1) \quad (3.62)$$

CLN en haut : d'après (3.43) nous aurons :

$$2(1 + \beta^2) T_{i,j_{max}-1} = T_{i-1,j_{max}-1} + T_{i+1,j_{max}-1} + \beta^2 (T_{i,j_{max}-2} + T_{i,j_{max}})$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,j_{max}} = \frac{3T_{i,j_{max}} - 4T_{i,j_{max}-1} + T_{i,j_{max}-2}}{2\Delta y}$$

$$\implies T_{i,j_{max}} = \frac{1}{3} (4T_{i,j_{max}-1} - T_{i,j_{max}-2} + 2\alpha \Delta y)$$

$$2(3 + \beta^2) T_{i,j_{max}-1} = 3(T_{i-1,j_{max}-1} + T_{i+1,j_{max}-1}) + 2\beta^2 (T_{i,j_{max}-2} + \alpha \Delta y) \quad (i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1) \quad (3.63)$$

Exemple :

Soit une plaque carrée de 15 cm de côté et de faible épaisseur de telle sorte qu'on puisse négliger le transfert de chaleur dans cette direction. La plaque est soumise à une température nulle sur les côtés gauche et bas, à 100 °C par le haut et isolée sur le côté droit. On prendra $N_x = N_y = 4$ et on discrétisera la CLN par une approximation centrée.

La formulation à 5 points avec $\beta = 1$ (puisque $\Delta x = \Delta y$) appliquée aux 4 nœuds intérieurs nous donne quatre équations mais avec 6 inconnues, les deux équations supplémentaires sont obtenues par l'équation (3.53) appliquée aux nœuds internes du bords droit. Nous aurons donc dans l'ordre :

$$\begin{cases} -4T_{2,2} + T_{3,2} + T_{2,3} = 0 \\ -4T_{3,2} + T_{4,2} + T_{2,2} + T_{3,3} = 0 \\ -4T_{4,2} + 2T_{3,2} + T_{4,3} = 0 \\ -4T_{2,3} + T_{3,3} + 100 + T_{2,2} = 0 \\ -4T_{3,3} + T_{4,3} + T_{2,3} + 100 + T_{3,2} = 0 \\ -4T_{4,3} + 2T_{3,3} + T_{4,2} + 100 = 0 \end{cases}$$

La forme matricielle $A.T = B$ de ce système s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \\ T_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

La solution numérique est déterminée en utilisant le logiciel de calcul *wxMaxima* :

$$T_{2,2} = 17.37, \quad T_{3,2} = 25.75, \quad T_{4,2} = 28.08, \quad T_{2,3} = 43.73, \quad T_{3,3} = 57.57, \quad T_{4,3} = 60.81.$$

Exercice :

Que devient cette forme matricielle si on discrétise la CLN par des approximations décentrées d'ordre 1 et 2 ?

Solution :

- Pour l'approximation décentrée arrière d'ordre 1 :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

La solution numérique est déterminée en utilisant le logiciel de calcul *wxMaxima* :

$$T_{2,2} = 16.84, \quad T_{3,2} = 24.21, \quad T_{2,3} = 43.15, \quad T_{3,3} = 55.79.$$

- Pour l'approximation décentrée arrière d'ordre 2 :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \\ -300 \end{bmatrix}$$

La solution numérique est déterminée en utilisant le logiciel de calcul *wxMaxima* :

$$T_{2,2} = 17.56, \quad T_{3,2} = 26.27, \quad T_{2,3} = 43.97, \quad T_{3,3} = 58.34.$$

Remarque :

Si nous utilisons, dans cet exemple, des approximations décentrées avant, nous aurons alors 2 équations supplémentaires à ajouter et les matrices obtenues seront d'ordre 6 comme pour le cas de l'approximation centrée.

3.16.5 Equation de Poisson

L'équation de Poisson est l'équation *non homogène* de l'équation de Laplace. On la rencontre dans les problèmes de diffusion de la masse, de diffusion de la chaleur (conduction), d'écoulement de fluides incompressibles, ...etc.

Considérons par exemple notre plaque rectangulaire de conductivité thermique k avec une source de chaleur \dot{Q} (résistance par exemple) au milieu. L'EDP représentant ce problème est :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\dot{Q}}{k} \quad (3.64)$$

En discrétisant cette équation par un schéma à 5 points, on aura :

$$-2(1 + \beta^2) T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + \beta^2 (T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) + \Delta x^2 \left(\frac{\dot{Q}_{i,j}}{k} \right) = 0 \quad (3.65)$$

Si $\beta = 1$ c-à-d $\Delta x = \Delta y$ alors (3.65) devient :

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} + \Delta x^2 \left(\frac{Q_{i,j}}{k}\right)}{4} \quad (3.66)$$

et l'équation discrétisée s'écrit :

$$-4T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} + \Delta x^2 \left(\frac{Q_{i,j}}{k}\right) = 0 \quad (3.67)$$

L'équation de Poisson peut se résoudre de la même manière que l'équation de Laplace et tout ce que nous avons dit pour cette dernière est applicable à l'équation de Poisson.

Exemple :

Soit une plaque rectangulaire ($k = 0.4 \text{ J/cm.s.}^\circ\text{C}$) de 1.5 cm de hauteur de 1 cm de largeur et de faible épaisseur de telle sorte que l'on puisse négliger le transfert de chaleur dans cette direction. La plaque est soumise à une température nulle sur tous ces cotés et chauffée en son milieu par une résistance développant un flux de chaleur de $400 \text{ J/cm}^3.\text{s}$. En utilisant le logiciel wxMaxima et en écrivant un programme avec un maillage de 20×30 , nous obtenons la répartition des isothermes à l'intérieur de la plaque (Fig.3.15).

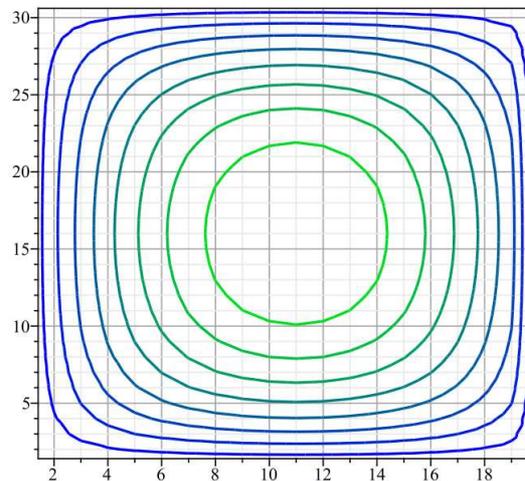


Fig. 3.15: *Résolution de l'équation de Poisson. Répartition des isothermes.*

3.16.6 Méthode d'ordre élevé

Parmi les méthodes d'ordre élevés, on distingue principalement la *formulation à 9 points* (Annexe A) précise au second ordre ($O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$) :

$$T_{i-1,j-1} + T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j+1} + T_{i+1,j+1} + \frac{2(5 - \beta^2)}{1 + \beta^2} (T_{i-1,j} + T_{i+1,j}) + \dots$$

$$\dots \frac{2(5\beta^2 - 1)}{1 + \beta^2} (T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) - 20 T_{i,j} = 0 \quad (3.68)$$

Si $\beta = 1$ c-à-d $\Delta x = \Delta y$ alors (3.68) devient précise au quatrième ordre ($O(\Delta x^4)$) et sa représentation schématique est donné par la figure (Fig.3.16).

$$-20 T_{i,j} + 4(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) + T_{i-1,j-1} + T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j+1} + T_{i+1,j+1} = 0 \quad (3.69)$$

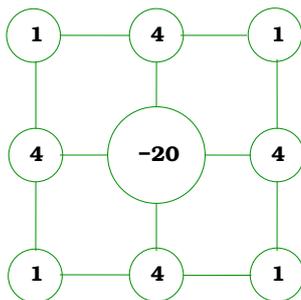


Fig. 3.16: *Représentation schématique de la formulation à 9 points ($\beta = 1$).*

Exemple 1 :

Soit à déterminer la forme matricielle du problème de la figure (Fig.3.17).

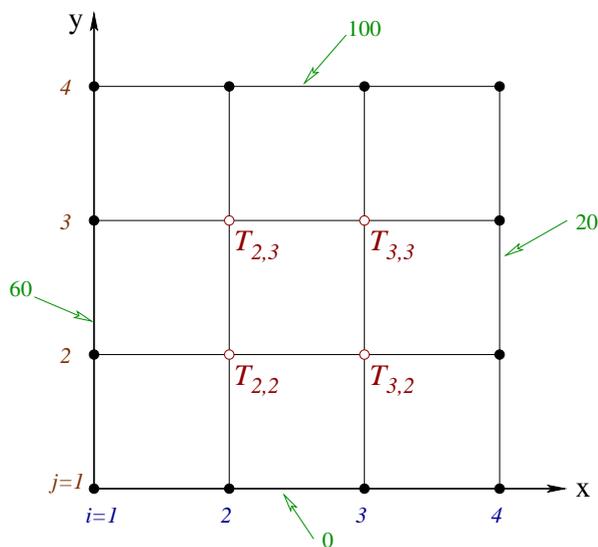


Fig. 3.17: *Formulation à 9 points. Exemple 1.*

Nombre de nœuds selon X : $N_x = 4$.

Nombre de nœuds selon Y : $N_y = 4$.

Nombre d'équations du système à résoudre : $N = (N_x - 2) \times (N_y - 2) = 4$.

En appliquant la formule (3.69) à chaque nœud interne du maillage, nous aurons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -20 T_{2,2} + T_{1,1} + T_{3,1} + T_{1,3} + T_{3,3} + 4 (T_{1,2} + T_{3,2} + T_{2,1} + T_{2,3}) = 0 \\ -20 T_{3,2} + T_{2,1} + T_{4,1} + T_{2,3} + T_{4,3} + 4 (T_{2,2} + T_{4,2} + T_{3,1} + T_{3,3}) = 0 \\ -20 T_{2,3} + T_{1,2} + T_{3,2} + T_{1,4} + T_{3,4} + 4 (T_{1,3} + T_{3,3} + T_{2,2} + T_{2,4}) = 0 \\ -20 T_{3,3} + T_{2,2} + T_{4,2} + T_{2,4} + T_{4,4} + 4 (T_{2,3} + T_{4,3} + T_{3,2} + T_{3,4}) = 0 \end{cases}$$

avec les (C.L.) :

$$\begin{cases} T_{2,1} = T_{3,1} = 0 \\ T_{1,2} = T_{1,3} = 60 \\ T_{4,2} = T_{4,3} = 20 \\ T_{2,4} = T_{3,4} = 100 \end{cases} \quad \text{et aux coins :} \quad \begin{cases} T_{1,1} = 0.5 (0 + 60) = 30 \\ T_{4,1} = 0.5 (0 + 20) = 10 \\ T_{1,4} = 0.5 (60 + 100) = 80 \\ T_{4,4} = 0.5 (100 + 20) = 60 \end{cases}$$

La forme matricielle $A.T = B$ de ce système s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} -20 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -330 \\ -110 \\ -880 \\ -660 \end{bmatrix}$$

La solution numérique est déterminée en utilisant le logiciel de calcul *wxMaxima* :
 $T_{2,2} = 37.14$, $T_{3,2} = 26.66$, $T_{2,3} = 63.33$, $T_{3,3} = 52.86$.

Exemple 2 :

Déterminer la forme matricielle du problème de la figure (3.12) et comparer les résultats entre les deux schémas.

Exercice :

1. Pour le problème de l'exemple 1, comparer les résultats obtenus avec les schémas à 5 points et à 9 points avec la solution exacte. Dresser un tableau avec les pourcentages relatifs à chaque solution.
2. Comparer les précisions des schémas à 9 points pour $\beta = 1$ et pour $\beta \neq 1$.

3.16.7 Cas du domaine non rectangulaire

Toutes les méthodes qui ont été présentées jusqu'ici ne concernent que les domaines physiques rectangulaires et les maillages rectangulaires. Plusieurs simplifications résultent de ce choix :

- Les nœuds du maillage coïncident avec les limites du domaine physique, donc les (C.L) peuvent être appliquées.
- Le maillage est uniforme et orthogonal, donc l'approximation des dérivées partielles par différences finies est précise.

- L'espace du maillage adjacent aux limites du domaine est uniforme et orthogonal.

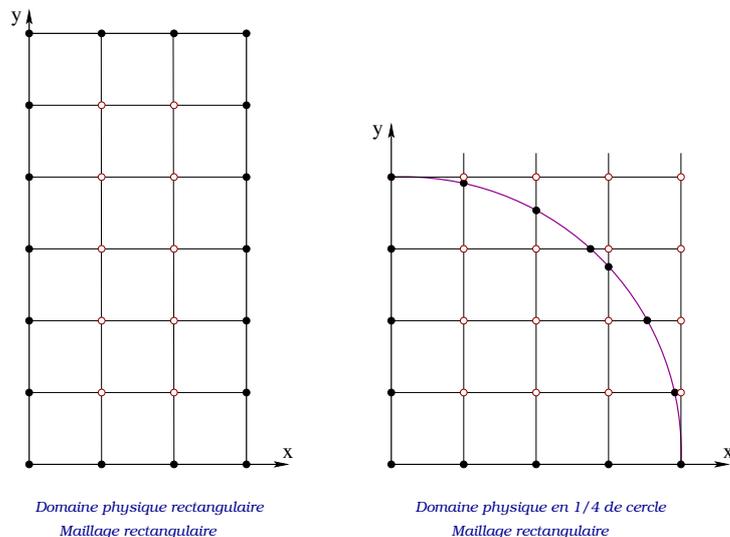


Fig. 3.18: **Domaine physique non rectangulaire.**

- L'espace du maillage adjacent à la limite du quart de cercle n'est pas uniforme. Evidemment, une nouvelle approche en différences finies est nécessaire.

Il existe plusieurs approches pour modéliser les domaines physiques non rectangulaires :

1. Limite physique approximative : raffiner au maximum le maillage afin de faire coïncider les nœuds avec les limites du domaine physique.

Cette approche n'est pas recommandée.

2. Changement de coordonnées (cylindriques ou sphériques).
3. Approximation par différences finies non uniforme.
4. Transformation des espaces (Fig.3.19).

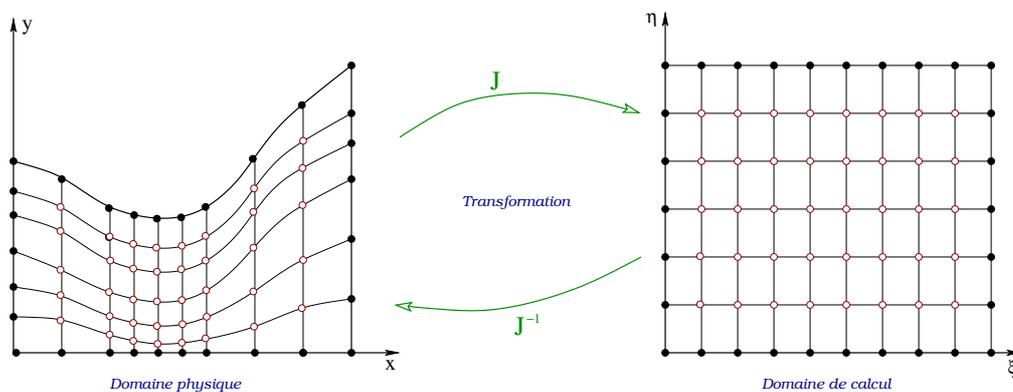


Fig. 3.19: **Transformation du domaine physique.**

3.16.8 Equation non-linéaire et problème tridimensionnel

- Les équations de Laplace et de Poisson déjà considérées sont des EDP linéaires. Par conséquent, les équations aux différences qui en découlent sont linéaires.

Quand une EDP non linéaire est résolue par différences finies, il en résulte un système d'équations aux différences non linéaire. On utilise alors deux procédures pour sa résolution :

- Méthode itérative : \rightarrow linéarisation \rightarrow S.O.R. (en $2D$ et $3D$).
- Méthode de Newton : \rightarrow perturbation \rightarrow système linéaire \rightarrow Jacobi, Gauss-Siedel, S.O.R.

- Les problèmes tridimensionnels ($3D$) peuvent être résolus de la même manière que les problèmes $2D$. La seule difficulté est liée à la grande dimension (taille) du système obtenu en $3D$.

- La meilleure solution pour les EDP elliptiques $2D$ ou $3D$ linéaires ou non est l'utilisation de la *méthode multi-maillage* (*Multigrid Method* : Brandt 1977).

3.17 Equation d'onde

L'équation d'onde est rencontrée dans les problèmes d'ingénierie sous deux formes :

- Dans les domaines de vibrations et de champ acoustique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.70)$$

u : amplitude de l'onde ; c : vitesse de propagation de l'onde.

- Dans les domaines de mécanique des fluides et de transferts thermiques :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.71)$$

u : vitesse de convection.

3.17.1 Résolution de l'équation d'onde

La résolution de l'équation (3.70) peut se faire en la transformant en un système d'équations couplées de type (3.71) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

Soit le problème mathématique avec ses (C.L) défini par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \quad (3.73)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 & , & u(x, 0) = f(x) \\ u(\pi, t) = 0 & , & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

3.17.1.1 Discrétisation

L'équation (3.73) est discrétisée par exemple par un schéma centré d'ordre 2 en temps et en espace de la manière suivante :

$$\frac{u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

en posant : $\lambda = c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 = C^{te}$, nous aurons l'équation discrétisée suivante :

$$u_i^{n+1} = 2(1 - \lambda) u_i^n + \lambda (u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) - u_i^{n-1} \quad (3.74)$$

C'est un schéma à trois étapes temporelles ($n - 1, n, n + 1$), nous devons donc calculer u_i^{-1} afin d'initialiser la procédure de calcul. Pour cela, utilisons la (C.I) de Neumann et exprimons là par un schéma aux différences centré du 2^{nd} ordre :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2 \Delta t} = g(x_i) \implies u_i^{-1} = u_i^1 - 2 \Delta t g(x_i)$$

Ecrivons maintenant l'équation (3.74) au pas de temps 0 :

$$u_i^1 = 2(1 - \lambda) u_i^0 + \lambda (u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0) - u_i^{-1}$$

En utilisant la (C.I) $u_i^0 = f(x_i)$ et en remplaçant u_i^{-1} par sa valeur, nous aurons :

$$u_i^1 = (1 - \lambda) f(x_i) + \frac{\lambda}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})] + \Delta t g(x_i) \quad (3.75)$$

Maintenant, nous pouvons calculer toutes les valeurs de l'équation (3.74) en utilisant les (C.L) suivantes : $u_1^n = 0$ et $u_{imax}^n = 0$.

3.17.1.2 Stabilité

Pour étudier la stabilité, utilisons l'analyse de *Von-Neumann* :

On suppose que la solution est de la forme : $u(x, t) = \psi(t) e^{j\beta x}$, on a alors :

$$u_i^n = \psi(t) e^{j\beta x} \quad u_i^{n+1} = \psi(t + \Delta t) e^{j\beta x} \quad u_i^{n-1} = \psi(t - \Delta t) e^{j\beta x}$$

$$u_{i-1}^n = \psi(t) e^{j\beta(x-\Delta x)} \quad u_{i+1}^n = \psi(t) e^{j\beta(x+\Delta x)}$$

Le facteur d'amplification ξ est donné par :

$$\xi = \frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = \frac{\psi(t)}{\psi(t - \Delta t)} \quad (3.76)$$

En remplaçant ces termes dans l'équation (3.74) et en simplifiant par $e^{j\beta x}$, nous aurons :

$$\psi(t + \Delta t) = 2(1 - \lambda)\psi(t) + \lambda(e^{-j\beta\Delta x} + e^{j\beta\Delta x})\psi(t) - \psi(t - \Delta t)$$

$$\xi = 2(1 - \lambda) + 2\lambda \cos(\beta\Delta x) - \frac{1}{\xi} \iff \xi^2 - 2[1 - \lambda(1 - \cos(\beta\Delta x))]\xi + 1 = 0$$

$$\xi^2 - 2\left[1 - 2\lambda \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\right]\xi + 1 = 0$$

On posant : $k = 1 - 2\lambda \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)$ nous aurons l'équation :

$$\xi^2 - 2k\xi + 1 = 0 \text{ dont les solutions sont : } \xi_{1,2} = k \pm \sqrt{k^2 - 1}$$

Ce facteur d'amplification devant satisfaire la condition : $|\xi| \leq 1$, nous aurons alors la conditions de stabilité suivante : $\lambda \leq 1$.

3.17.1.3 Autres schémas de discrétisation

a- Schéma explicite d'Euler :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.77)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (3.78)$$

Les deux schémas (3.77) et (3.78) sont précis d'ordre 1 (ordre minimum dans l'équation discrétisée) et sont tous les deux *inconditionnellement instables*.

b- Schéma explicite Upwind :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (c > 0) \quad (3.79)$$

Le schéma (3.79) est précis d'ordre 1 et est *conditionnellement stable* : $0 \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

Il peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) & (c > 0) \\ u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) & (c < 0) \end{cases} \quad (3.80)$$

c- Schéma explicite de Lax :

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} = 0 \quad (3.81)$$

Ce schéma est précis d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace et il est *conditionnellement stable* : $|c \frac{\Delta t}{\Delta x}| \leq 1$.

Il existe aussi les schémas de Lax-Wendroff précis d'ordre 2 et les schémas de Lax-Wendroff à deux étapes précis aussi d'ordre 2 mais spécialement pour les équations non-linéaires.

d- Schéma explicite de Leapfrog :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2 \Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} = 0 \quad (3.82)$$

Ce schéma est précis d'ordre 2 en temps et en 2 espace et il est *conditionnellement stable* : $|c \frac{\Delta t}{\Delta x}| \leq 1$.

e- Schéma implicite d'Euler :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} = 0 \quad (3.83)$$

Ce schéma est précis d'ordre 1 et il est *inconditionnellement stable*.

Il existe aussi plusieurs autres schémas de discrétisation tels que le schéma explicite de Mac-Cormack (prédicteur-correcteur) utilisée pour les EDP non-linéaires rencontrées en mécanique des fluides par exemple ; le schéma Upwind du 2nd ordre, le schéma trapézoïdal, le schéma de Rusanov et celui de Runge-Kutta.

3.17.2 Méthodes de résolution

Comme les matrices trouvées pour ce genre de problèmes sont souvent creuses, alors les méthodes de résolution utilisées sont dans l'ordre décroissant :

S.O.R.(meilleur), Gauss-siedel (préférée), Jacobi (plus simple) et enfin celle d'élimination de Gauss.

3.18 Exercices

3-01 : Parmi les schémas ci-dessous, dire lequel est explicite ou implicite :

1. $T_i^{n+1} - T_i^n + \lambda(T_i^n - T_{i-1}^n) = 0.$
2. $T_i^{n+1} - T_i^n + \lambda(T_{i+1}^n - T_{i-1}^{n+1}) = 0.$
3. $T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0.$
4. $T_i^{n+1} - 2(1 - \lambda)T_i^n - \lambda(T_{i+1}^n - T_{i-1}^n) + T_i^{n-1} = 0.$
5. $u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_{i-1}^{n+1} = 0.$
6. $2u_{i,j} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 0.$
7. $T_i^{n+1} - T_i^{n-1} + \lambda(T_{i+1}^n - T_{i-1}^n) = 0.$

3-02 : Dans l'équation de la chaleur, discrétiser :

1. Le terme temporel par une approximation décentrée avant d'ordre 2.
2. Le terme temporel par une approximation décentrée arrière d'ordre 1.
3. Le terme temporel par une approximation centrée d'ordre 2.
4. Le terme spatial par une approximation décentrée arrière d'ordre 2.

3-03 : La discrétisation de l'équation d'onde donne :

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

1. Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.
2. Déterminer le facteur d'amplification de ce schéma ($\lambda = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$).

3-04 : Discrétiser l'équation de la chaleur par :

1. Une approximation centrée d'ordre 2 en temps et en espace.
2. Une approximation décentrée avant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.
3. Une approximation décentrée arrière d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.
4. Une approximation centrée d'ordre 2 en temps et décentrée avant d'ordre 1 en espace.

3-05 : Soit le schéma de discrétisation de l'équation de la chaleur :

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\frac{1}{3} (T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) + \frac{2}{3} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) \right]$$

1. Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.
2. Déterminer le facteur d'amplification de ce schéma ($\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).

3-06 : Considérons l'équation de Laplace en deux dimensions.

En discrétisant le terme en x par une approximation décentrée arrière d'ordre 1, le terme en y par une approximation décentrée avant d'ordre 2 et en posant $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, donner le schéma de discrétisation (équation) et dessiner les cellules correspondantes pour β quelconque et pour $\beta = 2$.

3-07 : Considérons l'équation de la chaleur unidimensionnelle.

1. Classer cette EDP en justifiant votre réponse.
2. Cette équation est discrétisée par le schéma de Crank-Nicholson. Ecrire l'équation discrétisée et dire si ce schéma est explicite ou implicite.
3. Déterminer son facteur d'amplification (on posera $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).

3-08 : Considérons l'équation de Laplace appliquée à une plaque rectangulaire.

1. En posant $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, retrouver le schéma à 5 points.
2. Cette plaque est soumise à 100°C en bas, 20°C à gauche, 40°C à droite et 10°C en haut. Elle est discrétisée par 4 divisions selon X et 5 selon Y .
3. Dessiner les cellules correspondantes à ce schéma pour $\beta = 2$.
4. Ecrire les équations nécessaires à la résolution de ce problème.
5. Déterminer la forme matricielle du problème $A.T = B$.

3-09 : La discrétisation l'équation de la chaleur par la méthode de Richardson donne :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

1. Ce schéma est-il implicite ou explicite ? Justifier.
2. Déterminer le facteur d'amplification de ce schéma ($\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).

3. Etudier sa stabilité.

Pour rendre ce schéma stable, on utilise le schéma de Dufort-Frankel :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{T_{i-1}^n - (T_i^{n+1} - T_i^{n-1}) + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

1. Ce schéma est-il implicite ou explicite ?
2. Déterminer son facteur d'amplification.

3-10 : Discrétiser l'équation d'onde par :

1. Une approximation centrée d'ordre 2 en temps et en espace.
2. Une approximation décentrée arrière d'ordre 1 en temps et décentrée avant d'ordre 2 en espace.

3-11 : Considérons l'équation de Laplace en deux dimensions.

En discrétisant le terme en x par une approximation décentrée arrière d'ordre 2, le terme en y par une approximation centrée et en posant $\beta = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$, donner le schéma de discrétisation (équation) et dessiner les cellules correspondantes pour $\beta = 1$ et pour $\beta = 2$.

3-12 : Soit le schéma de discrétisation suivant :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = 2 \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

1. Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.
2. Etudier sa stabilité (on posera : $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).

3-13 : Considérons l'équation de Laplace en deux dimensions.

Soit une plaque rectangulaire discrétisée par 3 divisions selon X et 4 selon Y . En appliquant le schéma à 5 points et en posant $\beta = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$, déterminer la forme matricielle du problème $A.T = B$ (les conditions de Dirichlet étant connues).

3-14 : Soient les deux EDP suivantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

1. Discrétiser l'équation de la chaleur par une approximation décentrée arrière d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.
2. Discrétiser l'équation d'onde par une approximation centrée en temps et décentrée avant d'ordre 2 en espace.

3-15 : Soit l'EDP ci-dessous :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

En discrétisant tous les termes par des approximations centrées et en posant $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, donner le schéma de discrétisation (équation) et dessiner les cellules correspondantes pour β et Δx quelconques ainsi que pour $\beta = 1$ et $\Delta x = 1$.

Cette équation est appliquée à une plaque rectangulaire soumise à 100°C en bas, 20°C à gauche, 40°C à droite et 10°C en haut. Cette plaque est discrétisée par 5 divisions selon X et 3 selon Y .

- Ecrire les équations nécessaires à la résolution de ce problème ($\beta = 1$ et $\Delta x = 1$).
- Déterminer la forme matricielle du problème $A.T = B$.

3-16 : Soit l'équation de la chaleur discrétisée par les trois approximations suivantes :

1. $\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0.$
2. $\frac{T_i^n - T_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{T_i^n - 2T_{i+1}^n + T_{i+2}^n}{\Delta x^2} = 0.$
3. $\frac{3T_i^n - 4T_i^{n-1} + T_i^{n-2}}{2\Delta t} + \frac{T_{i-3}^n - 4T_{i-2}^n + 5T_{i-1}^n - 2T_i^n}{\Delta x^2} = 0.$

Donner, pour chaque équation, le type d'approximation choisie pour chaque terme.

3-17 : La discrétisation de l'équation de convection

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

par le schéma de Leapfrog donne :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

1. Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.
2. Quelle est sa précision ? Justifier.
3. Déterminer son facteur d'amplification.

3-18 : Discrétiser l'équation de la chaleur 2D par un schéma explicite centré d'ordre 2 en temps et en espace, ensuite par un schéma implicite décentré arrière d'ordre 1 en temps et décentré avant d'ordre 1 en espace.

3-19 : Soit l'équation de la chaleur 1D définie par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$T(0, t) = \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = \beta, \quad T(x, 0) = \gamma$$

En considérant le schéma explicite d'Euler et en discrétisant la (C.L) par une approximation décentrée arrière d'ordre 1, déterminer la forme matricielle de ce problème.

3-20 : Déterminer la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à une plaque ($N_x = N_y = 4$) en utilisant le schéma à 5 points et en discrétisant la (C.L) de Neumann par une approximation centrée. On donne :

$$T_g = 10^\circ\text{C}, \quad T_d = 30^\circ\text{C}, \quad T_b = 10^\circ\text{C}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_h = 0.$$

3-21 : Déterminer la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à une plaque ($N_x = N_y = 4$) en utilisant le schéma à 9 points et en discrétisant les (C.L) de Neumann par des approximations décentrées d'ordre 1. On donne :

$$T_b = 100^\circ\text{C}, \quad T_h = 40^\circ\text{C}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_g = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_d = 0.$$

3-22 : Discrétiser l'équation de la chaleur 2D par un schéma implicite centré d'ordre 2 en temps et en espace, ensuite par un schéma explicite décentré avant d'ordre 1 en temps et décentré arrière d'ordre 1 en espace.

3-23 : Soit l'équation de la chaleur 1D définie par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \alpha, \quad T(L, t) = \beta, \quad T(x, 0) = \gamma$$

En considérant le schéma explicite d'Euler et en discrétisant la (C.L) par une approximation décentrée avant d'ordre 1, déterminer la forme matricielle de ce problème.

3-24 : Déterminer la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à une plaque ($N_x = N_y = 4$) en utilisant le schéma à 9 points et en discrétisant les (C.L) de Neumann par des approximations centrées. On donne :

$$T_b = 100^\circ\text{C}, \quad T_h = 40^\circ\text{C}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_g = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_d = 0.$$

3-25 : Soit l'équation de la chaleur 1D définie par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \alpha, \quad T(L, t) = \beta, \quad T(x, 0) = \gamma$$

En considérant le schéma explicite d'Euler et en discrétisant la (C.L) par une approximation décentrée avant d'ordre 2, déterminer la forme matricielle de ce problème.

3-26 : Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque schématisée en dessous en utilisant le schéma à 9 points et en discrétisant la (C.L) de Neumann par :

1. une approximations décentrée d'ordre 1.
2. une approximations décentrée d'ordre 2.
3. une approximations centrée.

On donne :

$$T_1 = 40^\circ\text{C}, \quad T_2 = 20^\circ\text{C}, \quad T_3 = 100^\circ\text{C}, \quad \alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_g = 10^\circ\text{C}/\text{cm}, \quad \Delta x = 0.2 \text{ cm}.$$

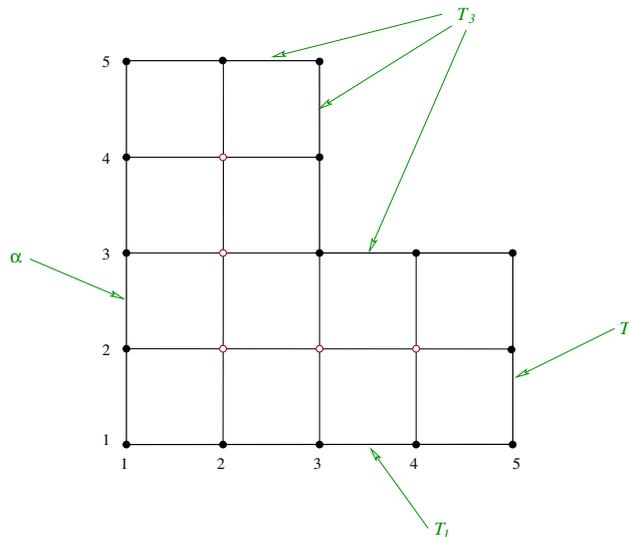


Fig. 3.20: **Exo-3-26.**

3-27 : Déterminer la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à une plaque ($N_x = N_y = 4$) en utilisant le schéma à 5 points et en discrétisant les (C.L) de Neumann par des approximations centrées. On donne :

$$T_b = 100^\circ\text{C}, \quad T_h = 40^\circ\text{C}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_g = 10, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_d = 20, \quad \Delta x = 2.$$

3-28 : Soit l'équation de la chaleur 1D définie par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = \beta, \quad T(x, 0) = \gamma$$

En considérant le schéma explicite d'Euler et en discrétisant les (C.L) par des approximations décentrées d'ordre 1, déterminer la forme matricielle de ce problème.

3-29 : Déterminer la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à une plaque ($N_x = N_y = 4$) en utilisant le schéma à 9 points et en discrétisant les (C.L) de Neumann par des approximations centrées. On donne :

$$T_b = 100^\circ\text{C}, \quad T_h = 40^\circ\text{C}, \quad \frac{\partial T}{\partial x}|_g = 10, \quad \frac{\partial T}{\partial x}|_d = 20, \quad \Delta x = 1.$$

3-30 : Soit l'équation de la chaleur 1D définie par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = \beta, \quad T(x, 0) = \gamma$$

En considérant successivement les schémas implicite et explicite d'Euler et en discrétisant les (C.L) par des approximations décentrées d'ordre 2, déterminer les formes matricielles de ces problèmes.

3-31 : Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque schématisée en dessous en utilisant le schéma à 5 points et en discrétisant la (C.L) de Neumann par une approximations centrée. On donne :

$$T_1 = 40^\circ\text{C}, \quad T_2 = 20^\circ\text{C}, \quad T_3 = 100^\circ\text{C}, \quad \alpha = \frac{\partial T}{\partial x}|_g = 0.$$

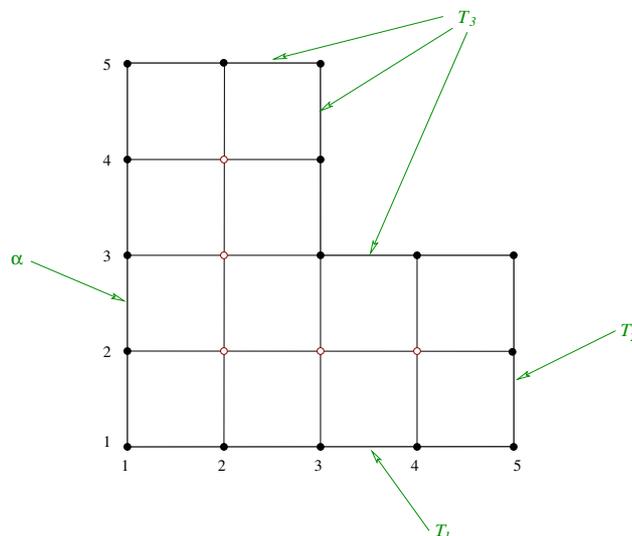


Fig. 3.21: **Exo-3-31.**

3-32 : Soit une barre, de longueur L et de très faible section, soumise aux conditions α et β respectivement à ses extrémités gauche et droite. Ce phénomène est régi par l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - 3 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

1. Classifier cette EDP en justifiant votre réponse.
2. Discrétiser le terme temporel par une approximation décentrée avant d'ordre 1 et le terme spatial par une approximation centrée au temps n .
3. En posant $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, écrire l'équation discrétisée et justifier si le schéma obtenu est explicite ou implicite.
4. Etudier la stabilité de ce schéma en utilisant le critère de Von-Neumann.
5. En supposant que α et β sont des conditions de Dirichlet, déterminer la forme matricielle du problème (préciser les bornes pour i et n).
6. En suppose maintenant que α est une condition de Neumann ($\alpha = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}$). En discrétisant cette condition par une approximation décentrée avant d'ordre 1, déterminer la nouvelle forme matricielle du problème (préciser les bornes pour i et n).

3-33 : Soit l'EDP suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial T}{\partial x} + 2 \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

1. Classifier cette EDP en justifiant votre réponse.
2. Discrétiser tous les termes par des approximations centrées.
3. En posant $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, écrire l'équation discrétisée.
4. Dessiner les cellules correspondantes pour β et Δx quelconques ainsi que pour $\beta = 2$ et $\Delta x = 1/2$.
5. Cette équation est appliquée à une plaque rectangulaire soumise à 100°C en bas, 20°C à gauche, 40°C à droite et 10°C en haut. En discrétisant cette plaque par 4 divisions selon X et 3 selon Y :
 - (a) Ecrire les équations nécessaires à la résolution de ce problème ($\beta = 2$ et $\Delta x = 1/2$).
 - (b) Déterminer la forme matricielle du problème $A.T = B$.
6. En suppose maintenant une condition de Neumann ($\alpha = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_g = 10$). En discrétisant cette condition par une approximation centrée, déterminer la nouvelle forme matricielle du problème.

3-34 : Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque schématisée en dessous en utilisant le schéma à 5 points et en discrétisant les (C.L) de Neumann par une approximations décentrées d'ordre 1. On donne :

$$T_1 = 100^\circ\text{C}, \quad T_2 = 20^\circ\text{C}, \quad T_3 = 10^\circ\text{C}, \quad T_4 = 40^\circ\text{C},$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_d = 2y + 10^\circ\text{C}/\text{cm}, \quad \beta = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_h = 3x + 10^\circ\text{C}/\text{cm}, \quad \Delta x = 2\text{ cm}, \quad \Delta y = 2\text{ cm}.$$

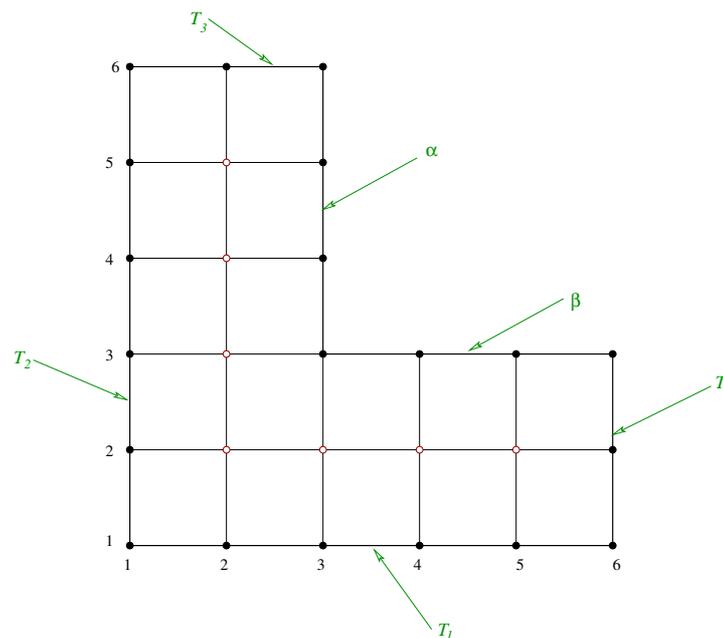


Fig. 3.22: **Exo-3-34**.

3-35 : Même exercice que **3-34** mais avec le schéma à 9 points au lieu du schéma à 5 points.

3-36 : En appliquant le schéma de discrétisation à 5 points à l'équation de Laplace pour la plaque schématisée ci-dessous, déterminer la matrice A et le vecteur B du système obtenu : $A.T = B$.

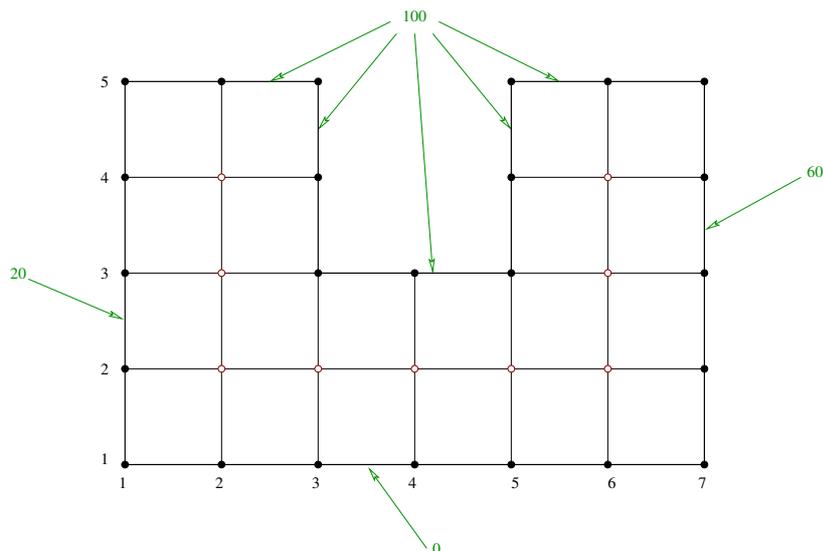


Fig. 3.23: **Exo-3-36.**

3-37 : En appliquant le schéma de discrétisation à 5 points à l'équation de Laplace pour la plaque schématisée ci-dessous, déterminer la matrice A et le vecteur B du système obtenu : $A.T = B$.

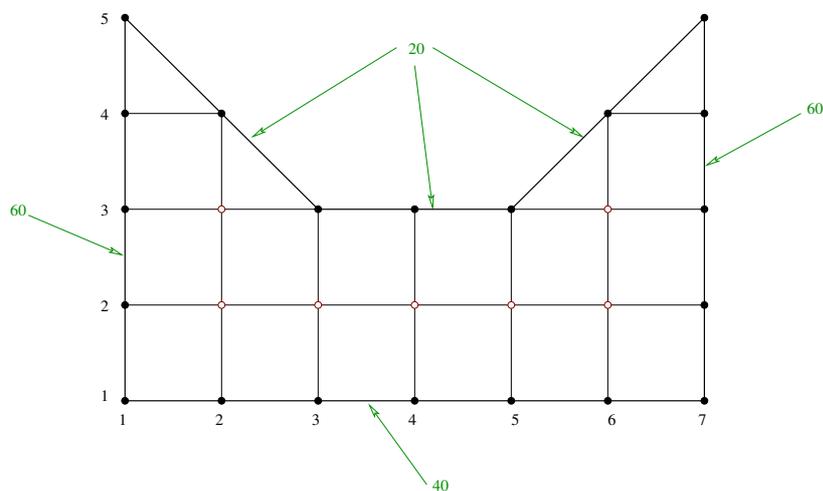


Fig. 3.24: **Exo-3-37.**

3-38 : Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque schématisée en dessous en utilisant le schéma à 5 points et en discrétisant les (C.L) de Neumann par une approximations décentrées d'ordre 1. On donne :

$$T_1 = 10^\circ\text{C}, \quad T_2 = 50^\circ\text{C}, \quad T_3 = 30^\circ\text{C}, \quad T_4 = 100^\circ\text{C},$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_d = 5^\circ\text{C}/\text{cm}, \quad \beta = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_h = 20^\circ\text{C}/\text{cm}, \quad \Delta x = 2\text{ cm}, \quad \Delta y = 1\text{ cm}.$$

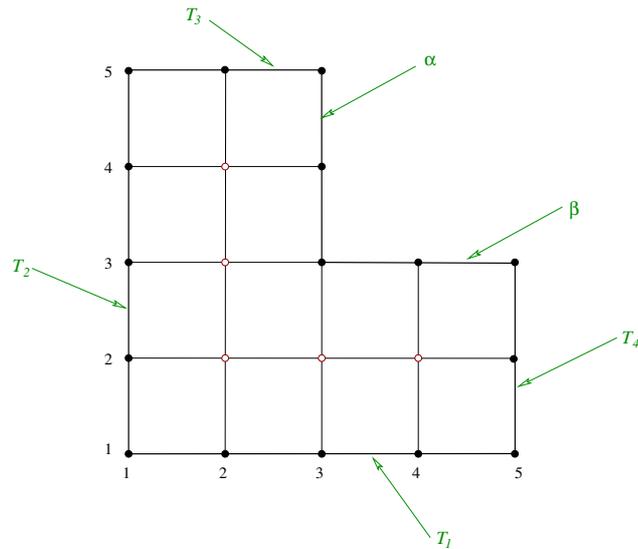


Fig. 3.25: **Exo-3-38.**

3-39 : Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque ci-dessous en utilisant le schéma à 9 avec $\beta = 1$. On donne :

$$T_1 = 10^\circ\text{C}, \quad T_2 = 100^\circ\text{C}, \quad T_3 = 2 \cdot 10^4 x^2, \quad T_4 = 20^\circ\text{C}, \quad T_5 = 10^\circ\text{C}, \quad T_6 = 10^4 y^2, \\ \Delta x = 2 \text{ cm}.$$

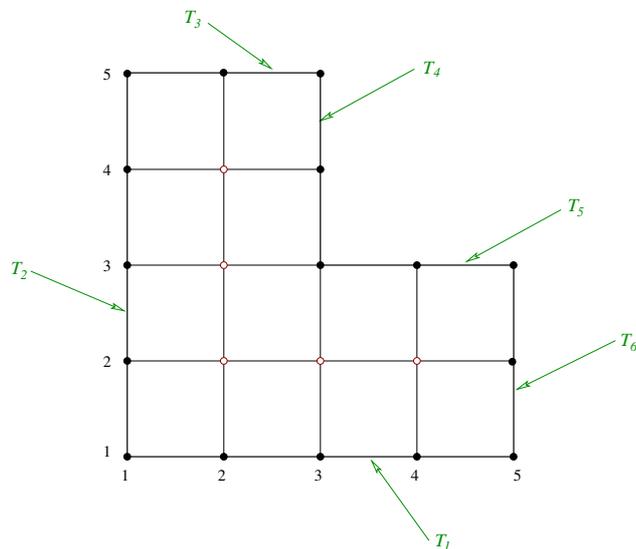


Fig. 3.26: **Exo-3-39.**

3-40 : Même problème que 3-39 avec les données suivantes :

$$T_1 = 5 \cdot 10^5 x^2, \quad T_2 = 3 \cdot 10^5 y^2, \quad T_3 = 60^\circ\text{C}, \quad T_4 = 30^\circ\text{C}, \quad T_5 = 10^\circ\text{C}, \quad T_6 = 100^\circ\text{C}, \\ \Delta x = 3 \text{ cm}.$$

3-41 : Quelle est la nature de l'EDP suivante : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial y} = 0$.

Cette EDP est discrétisée par les trois schémas suivants :

1. $\frac{2T_{i,j} - 5T_{i+1,j} + 4T_{i+2,j} - T_{i+3,j}}{\Delta x^2} - \frac{4T_{i,j+1} - 3T_{i,j} - T_{i,j+2}}{2\Delta y} = 0.$
2. $\frac{T_{i,j} - 2T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y} = 0.$
3. $\frac{2T_{i,j} - T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\Delta y} = 0.$

Donner, pour chaque équation, le type d'approximation choisie pour chaque terme.

3-42 : Soit le schéma de discrétisation suivant :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = (1 - \theta) \left[\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right] + \theta \left[\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right]$$

où θ est une constante comprise entre 0 et 1.

1. Déterminer son facteur d'amplification (prendre : $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).
2. Etudier sa stabilité pour les cas où $\theta = 0$, $\theta = 1/2$ et $\theta = 1$.

3-43 : Soit le schéma de discrétisation de l'équation de la chaleur :

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\lambda}{3} (T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) + \frac{\lambda}{3} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)$$

1. Déterminer son facteur d'amplification en appliquant l'analyse de Von-Neumann.
2. Etudier sa stabilité sachant que $\lambda > 0$.

3-44 : En utilisant le schéma à 9 points, déterminer la forme matricielle $A.T = B$ pour l'équation de Laplace appliquée à une plaque rectangulaire de (24×18) cm² discrétisée par 4 divisions selon x et 3 selon y . Les deux conditions de Neumann seront discrétisées par des approximations décentrées d'ordre 1.

On donne : Les températures en °C et les gradients en °C/cm.

$$T_b = 200x + 10, \quad T_g = 300y + 20, \quad T_h = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right| = 5, \quad T_d = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right| = 10.$$

3-45 : Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque (54×12) cm² ci-dessous en utilisant le schéma à 5 avec $\beta = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$. On donne :

$$T_0 = 10^\circ\text{C}, \quad T_1 = 50^\circ\text{C}, \quad T_2 = 20^\circ\text{C}, \quad T_3 = 10^3 x^2, \quad T_4 = 2.10^3 y.$$

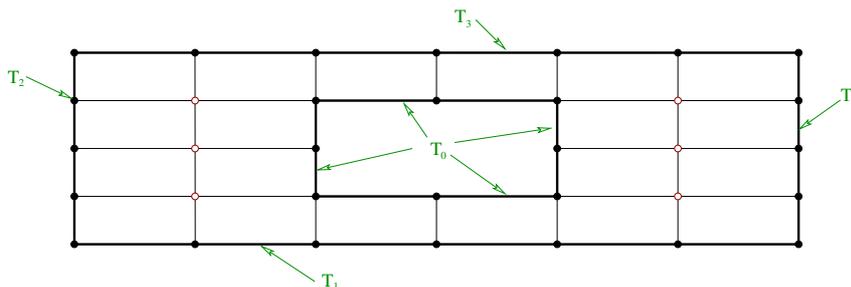


Fig. 3.27: **Exo-3-45.**

3-46 : Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque ci-dessous en utilisant le schéma à 5 avec $\beta = 1$. On donne :

$$T_1 = 10^\circ\text{C}, \quad T_2 = 100^\circ\text{C}, \quad T_3 = 2 \cdot 10^4 x^2, \quad T_4 = 20^\circ\text{C}, \quad T_5 = 10^\circ\text{C}, \quad T_6 = 10^4 y^2,$$

$$\Delta x = 2 \text{ cm}.$$

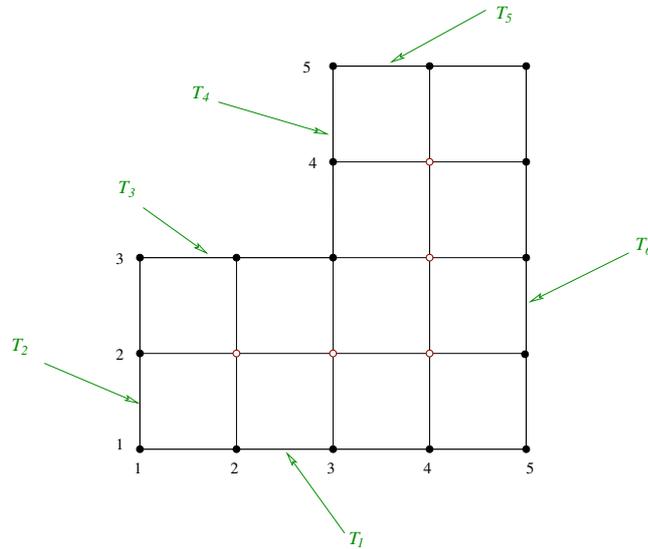


Fig. 3.28: **Exo-3-46**.

3-47 : Considérer l'équation de Laplace en deux dimensions et obtenir le schéma à 5 points en fonction de $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Obtenir la forme matricielle en appliquant ce schéma à la plaque de l'exercice 3-45 pour $\beta = 1$. On donne :

$$T_0 = 10^\circ\text{C}, \quad T_1 = 50^\circ\text{C}, \quad T_2 = 20^\circ\text{C}, \quad T_3 = 40^\circ\text{C}, \quad T_4 = 60^\circ\text{C}.$$

Méthode des Volumes Finis

Dans le but de simuler les écoulements de fluides, de transferts thermiques ainsi que d'autres phénomènes physiques relatifs, il est nécessaire de décrire la physique associée par des termes mathématiques. La grande partie des phénomènes qui nous intéressent sont gouvernés par des principes de conservation et sont régis par les EDP exprimant ces principes. Par exemple, les équations de quantité de mouvement expriment la conservation de la quantité de mouvement, l'équation d'énergie exprime la conservation de l'énergie totale, ...etc.

Dans ce paragraphe, nous allons faire ressortir l'équation de conservation typique et examiner ces propriétés mathématiques.

4.1 Equations de conservation

Les équations typiques qui décrivent la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, d'énergie ou des espèces chimiques sont écrites en fonction de *quantités spécifiques* c-à-d des quantités exprimées par unité de masse. Considérons la quantité spécifique ϕ qui peut être soit la quantité de mouvement par unité de masse, soit l'énergie par unité de masse ou autre. Considérons un volume de contrôle (*v.c*) de dimensions Δx , Δy et Δz (Fig.4.1).

Nous voulons exprimer les variations de la quantité spécifique ϕ dans le volume de contrôle (*v.c*) en fonction du temps. Supposons que ϕ est gouvernée par le principe de conservation qui stipule que : L'accumulation de ϕ dans le (*v.c*) pendant le temps Δt est égale au flux net de ϕ dans le (*v.c*) augmenté de la génération net de ϕ à l'intérieur du (*v.c*). En traduisant ce principe nous aurons sous forme mathématique :

$$(\rho \phi \Delta v)_{t+\Delta t} - (\rho \phi \Delta v)_t = (J_x - J_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z \Delta t + (J_y - J_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z \Delta t \dots \\ \dots + (J_z - J_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y \Delta t + S \Delta v \Delta t$$

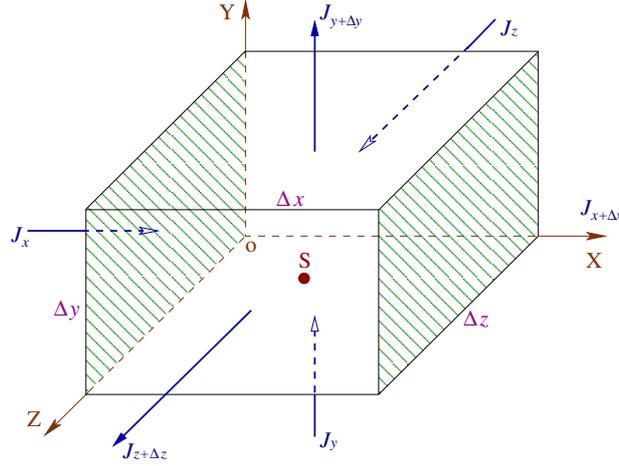


Fig. 4.1: **Equations de conservation.**

S représente le terme source (terme de génération) de ϕ par unité de volume et par unité de temps.

Pour les phénomènes physiques qui nous intéressent, la quantité ϕ est transportée par deux mécanismes primaires : la *diffusion* due à la collision des molécules et la *convection* due au mouvement du fluide. Dans beaucoup de cas, les flux diffusif et convectif s'écrivent par exemple selon l'axe X :

— Flux diffusif : $J_{diff} = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}$

— Flux convectif : $J_{conv} = \rho u \phi$

— Flux net : $J_x = (\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x})_x$ et $J_{x+\Delta x} = (\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x})_{x+\Delta x}$

où Γ est une caractéristique du fluide, $(\rho u)_x$ est le flux massique à travers la face x ($v.c$) et u la composante du champ de vitesse donné par : $\vec{q} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$.

En divisant l'équation de conservation par $(\Delta v \Delta t)$, on obtient :

$$\frac{(\rho \phi)_{t+\Delta t} - (\rho \phi)_t}{\Delta t} = \frac{J_x - J_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{J_y - J_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{J_z - J_{z+\Delta z}}{\Delta z} + S$$

et en prenant les limites quand $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ et Δt tendent vers 0, on aura :

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} = -\frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{\partial J_y}{\partial y} - \frac{\partial J_z}{\partial z} + S$$

ou encore en développant :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \phi) = \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}) + S \quad (4.1)$$

et sous forme vectorielle compacte :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q} \phi) = \vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \phi) + S \quad (4.2)$$

L'équation (4.2) est la *forme conservative* des équations gouvernantes pour les écoulements de fluides, les transferts thermiques et de masse ainsi que d'autres équations de transport.

L'équation (4.1) peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S \quad (4.3)$$

En l'absence du terme source et en mode stationnaire, la divergence du flux est nulle :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (4.4)$$

où :

$$\vec{J} = J_x \vec{i} + J_y \vec{j} + J_z \vec{k}$$

Considérons maintenant certains cas spécifiques de l'équation de conservation de ϕ .

1- *Equation de conservation de la masse* : En posant $\phi = 1$ et $S = 0$ l'équation (4.2) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = 0 \quad (4.5)$$

2- *Equation d'énergie* : Soit h l'enthalpie spécifique, k la conductivité thermique. En posant $\phi = h$, $\Gamma = \frac{k}{C_p}$ et $S = S_h$ l'équation (4.2) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q} h) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k}{C_p} \vec{\nabla} h \right) + S_h \quad (4.6)$$

3- *Equation de quantité de mouvement* : En posant $\phi = u$, $\Gamma = \mu$ et $S = -\frac{\partial P}{\partial x} + S_x$ l'équation (4.2) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q} u) = \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} u) - \frac{\partial P}{\partial x} + S_x \quad (4.7)$$

Cette équation est celle de quantité de mouvement pour un fluide Newtonien selon l'axe X , S_x contient les parties du tenseur des contraintes qui n'apparaissent pas directement dans le terme de diffusion et $\frac{\partial P}{\partial x}$ est le gradient de pression selon l'axe X .

De même, nous pouvons aussi écrire l'équation de transport des espèces chimiques d'un mélange, ...etc.

L'équation (4.2) est appelée *équation générale de transport scalaire* et elle peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \text{div} . (\rho \vec{q} \phi) = \text{div} . (\Gamma \overrightarrow{\text{grad}} \phi) + S \quad (4.8)$$

Exemples :

1- *Equation de diffusion (Elliptique) :*

obtenue pour $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et $\vec{q} = \vec{0} \implies \vec{\nabla} . (\Gamma \vec{\nabla} \phi) + S = 0$.

selon l'axe X (1D) on aura : $\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) + S = 0$.

si $\phi = T$, $\Gamma = \frac{k}{C_p}$ on obtient l'équation de la chaleur unidimensionnelle stationnaire :

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x}) + S = 0$ et si $k = C^{te}$ et $C_p = C^{te}$ alors cette équation devient :

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{S}{\rho} = 0$$

2- *Equation de la chaleur (parabolique) :*

même problème que l'exemple 1 mais instationnaire : $\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x}) + S$.

si $\rho = C^{te}$, $k = C^{te}$ et $C_p = C^{te}$ alors cette équation devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{S}{\rho}$$

3- *Equation d'onde (Hyperbolique) :*

obtenue pour $S = 0$, $\Gamma = 0$, $\phi = u$ et $\vec{q} = C^{te} = c$.

où u et c sont respectivement l'amplitude et la célérité de l'onde.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c u) = 0$$

si $\rho = C^{te}$ alors cette équation devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Remarque :

Dans la majorité des problèmes rencontrés en ingénierie, l'équation (4.8) peut avoir un comportement mixte : le terme de diffusion tend à la rendre elliptique, les termes instationnaire et convectif tendant à la rendre parabolique ou hyperbolique.

4.2 Equation de diffusion

Dans ce paragraphe, nous allons tourner notre attention vers un processus important qu'on appelle *diffusion*.

Les opérateurs de diffusion sont commun en transferts de chaleur, de masse et de quantité de mouvement et peuvent aussi être utilisés pour modéliser l'électrostatique, le rayonnement ainsi que d'autre phénomènes physiques.

Nous considérons la discrétisation et la solution de l'équation scalaire de transport pour les problèmes de diffusion stationnaires et instationnaires.

4.2.1 Problème de diffusion unidimensionnel

La méthode des volumes finis (MVF) ou encore méthode des volumes de contrôles (*v.c*) divise le domaine d'étude en un nombre fini de cellules ou (*v.c*) à travers lesquels la conservation de ϕ est respectée.

Examinons le processus de discrétisation à travers l'équation de diffusion 1D avec terme source :

$$\frac{d}{dx}(\Gamma \frac{d\phi}{dx}) + S = 0 \quad (4.9)$$

Considérons un maillage unidimensionnel avec des mailles (cellules) comme indiqué sur la figure (Fig.4.2). Les valeurs discrètes de ϕ sont stockées aux centres des mailles et représentées par W , P et E . Les faces de la maille sont notées w et e .

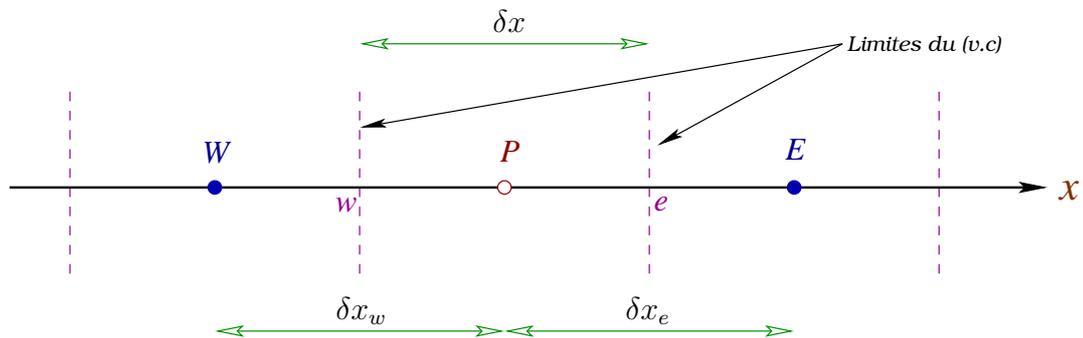


Fig. 4.2: *Disposition du (v.c) 1D.*

Considérons la maille associée avec le nœud P . Commençons par intégrer l'équation (4.9) à travers le (*v.c*), nous aurons :

$$\begin{aligned} \int_{(vc)} \left[\frac{d}{dx}(\Gamma \frac{d\phi}{dx}) + S \right] dv = 0 &\implies \int_{(vc)} \frac{d}{dx}(\Gamma \frac{d\phi}{dx}) dv + \int_{(vc)} S dv = 0 \implies \\ \int_w^e \frac{d}{dx}(\Gamma \frac{d\phi}{dx}) A dx + \int_w^e S A dx = 0 &\implies \\ \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \int_w^e S A dx = 0 &\quad (4.10) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant supposer un profil de ϕ décrivant sa variation entre les nœuds centraux (entre W et P et entre P et E). Si nous supposons une variation

linéaire de ϕ , nous pouvons alors exprimer les dérivées aux interfaces du (v.c) (Annexe B) et l'équation (4.10) devient :

$$\frac{\Gamma_e A_e (\phi_E - \phi_P)}{\delta x_e} - \frac{\Gamma_w A_w (\phi_P - \phi_W)}{\delta x_w} + \bar{S} A \delta x = 0 \quad (4.11)$$

où : $\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2}$ et $\Gamma_w = \frac{\Gamma_P + \Gamma_W}{2}$

\bar{S} étant la moyenne de S dans le (v.c).

Dans les situations pratiques, le terme source peut être une fonction de la variable dépendante ϕ . Dans ces cas, la (MVF) utilise une approximation linéaire de ce terme de la forme :

$$\bar{S} \Delta v = S_u + S_P \phi_P \quad (4.12)$$

On dit que le terme source est *linéarisé* (nous verrons par la suite sa forme générale).

En substituant (4.12) dans (4.11) et en regroupant les termes, nous aurons :

$$\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e} - S_P \right) \phi_P = \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w} \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e} \right) \phi_E + S_u \quad (4.13)$$

Remarque :

On note que l'équation (4.13) n'est pas totalement exacte à cause de l'approximation linéaire de ϕ entre les noeuds.

L'équation (4.13) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad (4.14)$$

avec :

$$a_W = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w}; \quad a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e}; \quad a_P = a_W + a_E - S_P$$

Des équations identiques à (4.14) peuvent être établies pour l'ensemble des mailles du domaine excepté ceux des mailles situées sur les limites du domaine. Ces dernières devront être traitées différemment en fonction du type de C.L. (*Dirichlet*, *Neumann* ou *mixte*). Ceci qui nous conduira à un système d'équations algébriques dont le nombre est égal à celui des noeuds centraux et qui pourra être résolu par exemple par une méthode itérative.

Remarques :

On note les points suivants pour le processus de discrétisation :

1. On commence par écrire le principe de conservation à travers la maille (cellule ou *v.c*) qui nous conduit aux valeurs de ϕ qui satisfont cette conservation. De ce fait, la *conservation* est satisfaite pour chaque maille du maillage.
2. La conservation ne garantit pas la précision. La solution pour ϕ peut être non précise mais conservative.
3. La quantité $-\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_e$ est le flux diffusif à travers la face *e*. L'équilibre dans la maille est écrit en fonction des flux à travers ses faces. Le gradient de ϕ doit donc être évalué sur les faces de la maille.
4. Les profils supposés pour ϕ et *S* ne sont pas nécessairement identiques.

4.2.2 Exemple 1 : Equation de diffusion 1D

Calculer la répartition de la température stationnaire à travers la barre *AB* de longueur $L = 0,5\text{ m}$, de section $A = 0,01\text{ m}^2$, de conductivité thermique $k = 1000\text{ W/m}^\circ\text{C}$ et soumise à ses extrémités aux températures $T_A = 100^\circ\text{C}$ et $T_B = 500^\circ\text{C}$ (Fig.4.3).

Solution :

L'équation à discrétiser est la suivante : $\frac{d}{dx}(k \frac{dT}{dx}) = 0$

Divisons notre barre en 5 parties égales, donc $\delta x = 0,1\text{ m}$.

Nous avons d'après les données : $k_w = k_e = k$, $\delta x_w = \delta x_e = \delta x$ et $A_w = A_e = A$.

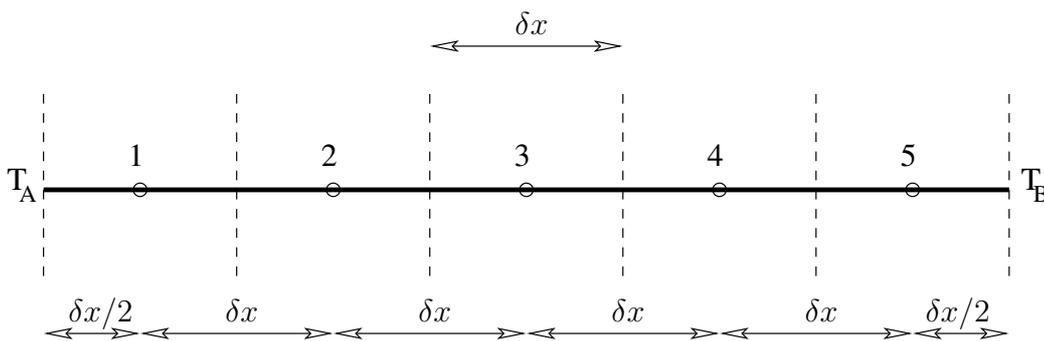


Fig. 4.3: **Exemple 1 : Equation de diffusion 1D.**

Noeuds internes : d'après l'équation (4.14) on aura : $a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$ avec :

$$a_W = \frac{kA}{\delta x}; \quad a_E = \frac{kA}{\delta x}; \quad a_P = \frac{2kA}{\delta x} \implies S_P = (a_W + a_E) - a_P = 0; \quad S_u = 0$$

Cette équation s'applique pour les nœuds 2, 3 et 4. Les nœuds 1 et 5 sont des nœuds limites et devront être traités différemment.

Nœud 1 : En intégrant l'équation à travers le (v.c) entourant le nœud 1 on aura d'après (4.11) :

$$\frac{kA(T_E - T_P)}{\delta x} - \frac{kA(T_P - T_A)}{\delta x/2} = 0 \implies 3 \frac{kA}{\delta x} T_P = 0 T_W + \frac{kA}{\delta x} T_E + 2 \frac{kA}{\delta x} T_A$$

et en comparant avec (4.14) on aura :

$$a_W = 0; \quad a_E = \frac{kA}{\delta x}; \quad a_P = 3 \frac{kA}{\delta x} \implies S_P = -2 \frac{kA}{\delta x}; \quad S_u = 2 \frac{kA}{\delta x} T_A$$

ici $P = 1$ et $E = 2$.

Nœud 5 : En intégrant l'équation à travers le (v.c) entourant le nœud 5 on aura d'après (4.11) :

$$\frac{kA(T_B - T_P)}{\delta x/2} - \frac{kA(T_P - T_W)}{\delta x} = 0 \implies 3 \frac{kA}{\delta x} T_P = \frac{kA}{\delta x} T_W + 0 T_E + 2 \frac{kA}{\delta x} T_B$$

et en comparant avec (4.14) on aura :

$$a_W = \frac{kA}{\delta x}; \quad a_E = 0; \quad a_P = 3 \frac{kA}{\delta x} \implies S_P = -2 \frac{kA}{\delta x}; \quad S_u = 2 \frac{kA}{\delta x} T_B$$

ici $P = 5$ et $W = 4$.

$$\frac{kA}{\delta x} = \frac{1000.0,01}{0,1} = 100.$$

Nous aurons alors le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} 300 T_1 = 100 T_2 + 200 T_A \\ 200 T_2 = 100 T_3 + 100 T_1 \\ 200 T_3 = 100 T_4 + 100 T_2 \\ 200 T_4 = 100 T_5 + 100 T_3 \\ 300 T_5 = 100 T_4 + 200 T_B \end{cases}$$

La forme matricielle $A.T = B$ de ce système s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} -300 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & -200 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -200 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & -200 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & -300 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.10^4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10^5 \end{bmatrix}$$

La solution numérique est déterminée en utilisant le logiciel de calcul *Maple* :

$$T_1 = 140 \text{ °C}; \quad T_2 = 220 \text{ °C}; \quad T_3 = 300 \text{ °C}; \quad T_4 = 380 \text{ °C}; \quad T_5 = 460 \text{ °C}.$$

Exercice :

Résoudre ce problème avec *Maple* et tracer la solution en la comparant avec la solution exacte.

4.2.3 Exemple 2 : Equation de diffusion 1D avec terme source

Calculer la répartition de la température stationnaire à travers la plaque (Fig.4.4) de longueur $L = 2\text{ cm}$, de section $A = 1\text{ m}^2$, de conductivité thermique $k = 0,5\text{ W/m}^\circ\text{C}$ et soumise à ses extrémités aux températures $T_A = 100^\circ\text{C}$ et $T_B = 200^\circ\text{C}$ et à une source de chaleur $q = 1000\text{ kW/m}^3$.

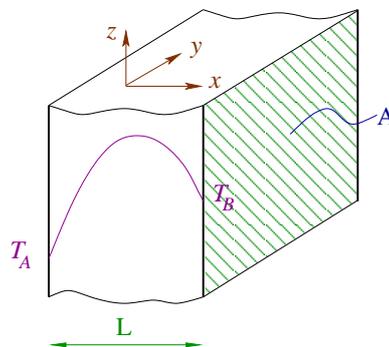


Fig. 4.4: *Exemple 2 : Equation de diffusion 1D avec terme source.*

Solution :

L'équation à discrétiser est la suivante : $\frac{d}{dx}(k \frac{dT}{dx}) + q = 0$

Divisons notre barre en 5 parties égales, donc $\delta x = 0,004\text{ m}$.

Nous avons d'après les données : $k_w = k_e = k$, $\delta x_w = \delta x_e = \delta x$ et $A_w = A_e = A$.

Nœuds internes : d'après l'équation (4.14) on aura : $a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u$

avec : $a_W = \frac{kA}{\delta x}$; $a_E = \frac{kA}{\delta x}$; $a_P = 2 \frac{kA}{\delta x} \implies S_P = 0$; $S_u = q A \delta x$

Cette équation s'applique pour les nœuds 2, 3 et 4. Les nœuds 1 et 5 sont des nœuds limites et devront être traités différemment.

Nœud 1 : En intégrant l'équation à travers le (v.c) entourant le nœud 1 on aura d'après (4.11) :

$$\frac{kA(T_E - T_P)}{\delta x} - \frac{kA(T_P - T_A)}{\delta x/2} + qA\delta x = 0 \implies 3 \frac{kA}{\delta x} T_P = 0 T_W + \frac{kA}{\delta x} T_E + 2 \frac{kA}{\delta x} T_A + qA\delta x$$

et en comparant avec (4.14) on aura :

$$a_W = 0; \quad a_E = \frac{kA}{\delta x}; \quad a_P = 3 \frac{kA}{\delta x} \implies S_P = -2 \frac{kA}{\delta x}; \quad S_u = 2 \frac{kA}{\delta x} T_A + q A \delta x$$

ici $P = 1$ et $E = 2$.

Nœud 5 : En intégrant l'équation à travers le (v.c) entourant le nœud 5 on aura d'après (4.11) :

$$\frac{kA(T_B - T_P)}{\delta x/2} - \frac{kA(T_P - T_W)}{\delta x} + q A \delta x = 0 \implies 3 \frac{kA}{\delta x} T_P = \frac{kA}{\delta x} T_W + 0 T_E + 2 \frac{kA}{\delta x} T_B + q A \delta x$$

et en comparant avec (4.14) on aura :

$$a_W = \frac{kA}{\delta x}; \quad a_E = 0; \quad a_P = 3 \frac{kA}{\delta x} \implies S_P = -2 \frac{kA}{\delta x}; \quad S_u = 2 \frac{kA}{\delta x} T_B + q A \delta x$$

ici $P = 5$ et $W = 4$.

$$\frac{kA}{\delta x} = \frac{0,5.1}{0,004} = 125 \text{ et } q A \delta x = 10^6.1.0,004 = 4000.$$

Nous aurons alors le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} 375 T_1 = 125 T_2 + 4000 + 250 T_A \\ 250 T_2 = 125 T_1 + 125 T_3 + 4000 \\ 250 T_3 = 125 T_2 + 125 T_4 + 4000 \\ 250 T_4 = 125 T_3 + 125 T_5 + 4000 \\ 375 T_5 = 125 T_4 + 4000 + 250 T_B \end{cases}$$

La forme matricielle $A.T = B$ de ce système s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} -375 & 125 & 0 & 0 & 0 \\ 125 & -250 & 125 & 0 & 0 \\ 0 & 125 & -250 & 125 & 0 \\ 0 & 0 & 125 & -250 & 125 \\ 0 & 0 & 0 & 125 & -375 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29.10^3 \\ -4000 \\ -4000 \\ -4000 \\ -54.10^3 \end{bmatrix}$$

La solution numérique est déterminée en utilisant le logiciel de calcul *Maple* :

$$T_1 = 150 \text{ °C}; \quad T_2 = 218 \text{ °C}; \quad T_3 = 254 \text{ °C}; \quad T_4 = 258 \text{ °C}; \quad T_5 = 230 \text{ °C}.$$

Exercice :

Résoudre ce problème avec *Maple* et tracer la solution en la comparant avec la solution exacte.

4.2.4 Exemple 3 : Equation de diffusion 1D avec convection à la surface et bord isolé

Calculer la répartition de la température stationnaire d'une ailette cylindrique de section uniforme A , de longueur $L = 1\text{ m}$ et conductivité thermique k , exposée à un flux de chaleur de température ambiante $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, soumise à une température $T_B = 100^\circ\text{C}$ sur son bord gauche et isolée sur son bord droit (Fig.4.5).

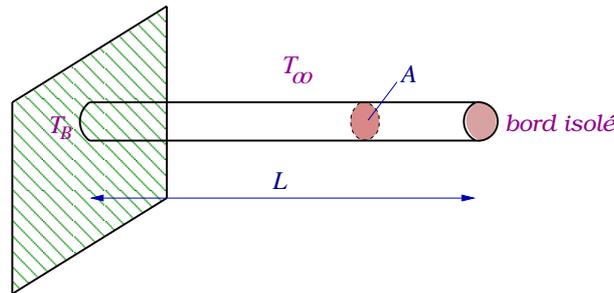


Fig. 4.5: *Exemple 3 : Equation de diffusion 1D, convection en surface et bord isolé.*

Solution :

Divisons notre barre en 5 parties égales, donc $\delta x = 0,2\text{ m}$.

Nous avons d'après les données : $k_w = k_e = k$, $\delta x_w = \delta x_e = \delta x$ et $A_w = A_e = A$.

L'équation à discrétiser est la suivante : $\frac{d}{dx}(k A \frac{dT}{dx}) - h P (T - T_\infty) = 0$

h étant le coefficient de transfert convectif et P le périmètre de l'ailette.

En la divisant par $k A$ et en posant $n^2 = \frac{h P}{k A}$ cette équation devient :

$$\frac{d}{dx}(\frac{dT}{dx}) - n^2 (T - T_\infty) = 0$$

Le 1^{er} terme de cette équation est traité de la même manière que les exemples 1 et 2.

Le 2nd terme est évalué en supposant que le terme source est constant pour chaque (v.c), donc :

$$\int_{(v.c)} \left[\frac{d}{dx}(\frac{dT}{dx}) \right] dv - \int_{(v.c)} n^2 (T_P - T_\infty) dv = 0$$

$$\implies \left(A \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(A \frac{dT}{dx} \right)_w - [n^2 (T_P - T_\infty)] A \delta x = 0$$

$$\implies \left[\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] - [n^2 (T_P - T_\infty)] \delta x = 0$$

$$\implies \left(\frac{2}{\delta x} + n^2 \delta x \right) T_P = \frac{1}{\delta x} T_W + \frac{1}{\delta x} T_E + n^2 \delta x T_\infty$$

et en comparant avec (4.14) on aura :

$$a_W = \frac{1}{\delta x}; \quad a_E = \frac{1}{\delta x}; \quad a_P = \frac{2}{\delta x} + n^2 \delta x \implies S_P = -n^2 \delta x; \quad S_u = n^2 \delta x T_\infty$$

Nœud 1 : La face ouest du (*v.c*) qui entoure le nœud 1 est soumise à une C.L de type Dirichlet et donc elle est traitée de la même manière que pour l'exemple 1.

$$\left[\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - \left(\frac{T_P - T_B}{\delta x/2} \right) \right] - [n^2 (T_P - T_\infty)] \delta x = 0$$

$$\implies \left(\frac{3}{\delta x} + n^2 \delta x \right) T_P = 0 T_W + \frac{1}{\delta x} T_E + n^2 \delta x T_\infty + \frac{2}{\delta x} T_B$$

et en comparant avec (4.14) on aura :

$$a_W = 0; \quad a_E = \frac{1}{\delta x}; \quad a_P = \frac{3}{\delta x} + n^2 \delta x \implies S_P = -n^2 \delta x - \frac{2}{\delta x}; \quad S_u = n^2 \delta x T_\infty + \frac{2}{\delta x} T_B$$

ici $P = 1$ et $E = 2$.

Nœud 5 : La face est du (*v.c*) qui entoure le nœud 5 est soumise à une C.L de type Neumann, c'est à dire à un flux qui est dans ce cas nul (face isolée), donc :

$$\left[0 - \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] - [n^2 (T_P - T_\infty)] \delta x = 0$$

$$\implies \left(\frac{1}{\delta x} + n^2 \delta x \right) T_P = \frac{1}{\delta x} T_W + 0 T_E + n^2 \delta x T_\infty$$

et en comparant avec (4.14) on aura :

$$a_W = \frac{1}{\delta x}; \quad a_E = 0; \quad a_P = \frac{1}{\delta x} + n^2 \delta x \implies S_P = -n^2 \delta x; \quad S_u = n^2 \delta x T_\infty$$

ici $P = 5$ et $W = 4$.

En prenant $\frac{1}{\delta x} = 5$ et $n^2 = 25$, nous aurons alors le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} 20 T_1 = 5 T_2 + 5 T_\infty + 10 T_B \\ 15 T_2 = 5 T_1 + 5 T_3 + 5 T_\infty \\ 15 T_3 = 5 T_2 + 5 T_4 + 5 T_\infty \\ 15 T_4 = 5 T_3 + 5 T_5 + 5 T_\infty \\ 10 T_5 = 5 T_4 + 5 T_\infty \end{cases}$$

La forme matricielle $A.T = B$ de ce système s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} -20 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -15 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1100 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

La solution numérique est déterminée en utilisant le logiciel de calcul *Maple* :

$$T_1 = 64, 22^\circ\text{C}; T_2 = 36, 91^\circ\text{C}; T_3 = 26, 50^\circ\text{C}; T_4 = 22, 60^\circ\text{C}; T_5 = 21, 30^\circ\text{C}.$$

Exercice :

Résoudre ce problème avec *Maple* et tracer la solution en la comparant avec la solution exacte.

Comparer ensuite les solutions avec 5 (*v.c*) et avec 10 (*v.c*).

4.2.5 Problème de diffusion bidimensionnel

Considérons l'équation de diffusion stationnaire 2D en coordonnées rectangulaires avec terme source :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}) + S = 0 \quad (4.15)$$

Intégrons cette équation à travers le (*v.c*) entourant le point P (Fig.4.6), nous aurons :

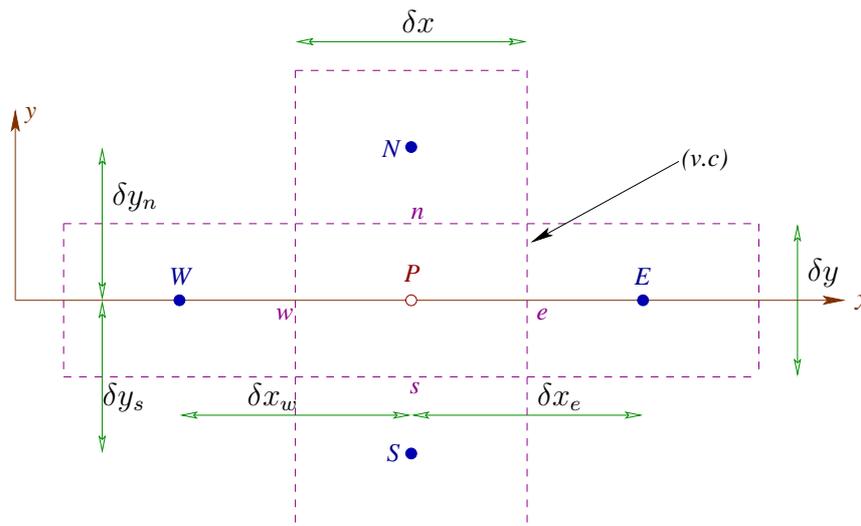


Fig. 4.6: *Disposition du (v.c) 2D.*

$$\int_{(vc)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}) + S \right] dv = 0$$

$$\begin{aligned}
 &\implies \int_{(vc)} \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) dv + \int_{(vc)} \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}) dv + \int_{(vc)} S dv = 0 \\
 &\implies \int_w^e \frac{d}{dx} (\Gamma \frac{d\phi}{dx}) A dx + \int_s^n \frac{d}{dy} (\Gamma \frac{d\phi}{dy}) A dy + \bar{S} \Delta v = 0 \\
 &\implies \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \Big|_w^e + \Gamma A \frac{d\phi}{dy} \Big|_s^n + \bar{S} \delta x \delta y \delta z = 0 \\
 &\implies \Gamma_e A_e \frac{d\phi}{dx} \Big|_e - \Gamma_w A_w \frac{d\phi}{dx} \Big|_w + \Gamma_n A_n \frac{d\phi}{dy} \Big|_n - \Gamma_s A_s \frac{d\phi}{dy} \Big|_s + \bar{S} \delta x \delta y \delta z = 0 \\
 &\implies \frac{\Gamma_e A_e (\phi_E - \phi_P)}{\delta x_e} - \frac{\Gamma_w A_w (\phi_P - \phi_W)}{\delta x_w} + \frac{\Gamma_n A_n (\phi_N - \phi_P)}{\delta y_n} - \frac{\Gamma_s A_s (\phi_P - \phi_S)}{\delta y_s} + S_u + S_P \phi_P = 0
 \end{aligned}$$

et en réarrangeant les termes, nous aurons :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_s} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_n} - S_P \right) \phi_P &= \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w} \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e} \right) \phi_E \dots \\
 \dots + \left(\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_s} \right) \phi_S + \left(\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_n} \right) \phi_N + S_u & \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Cette équation peut aussi se mettre sous la forme :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + S_u \quad (4.17)$$

avec :

$$a_W = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w}; \quad a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e}; \quad a_S = \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_s}; \quad a_N = \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_n}; \quad a_P = a_W + a_E + a_S + a_N - S_P$$

ou encore sous forme plus compacte :

$$\begin{cases} a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_u \\ a_P = \sum_{nb} a_{nb} - S_P \end{cases} \quad (4.18)$$

avec : $nb = \{W, E, S, N\}$.

Remarques :

- Les équations que nous venons d'établir s'appliquent uniquement aux nœuds internes. Les extrémités doivent toujours être traitées à part.
- Si $S_P = 0$ alors on aura : $a_P = \sum_{nb} a_{nb} \implies \sum_{nb} \left(\frac{a_{nb}}{a_P} \right) = 1$.

- Si $S_u = 0$ alors on aura : $\phi_P = \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb}}{a_P}$. Puisque ϕ_P est la somme pondérée des valeurs de voisins, elle est toujours bornée par ces valeurs.
 - Si $S \neq 0$, ϕ_P n'est pas nécessairement bornée par les valeurs de ses voisins et peut sortir de ces limites et c'est parfaitement logique. Ce dépassement est dicté par les valeurs de S_u et S_P par rapport aux a_{nb} .
- Les aires des facettes sont données par : $A_e = A_w = \delta y \cdot \delta z$ et $A_s = A_n = \delta x \cdot \delta z$. δz étant l'épaisseur de la plaque.
- L'équation discrétisée exprime l'équilibre entre les flux et le terme source. De ce fait, la conservation à travers chaque (*v.c*) est garantie. Cependant, la conservation totale dans le domaine de calcul n'est pas garantie du fait que le transfert diffusif d'une maille entre dans la maille suivante. Par exemple, en écrivant l'équilibre pour E nous devons assurer que le flux utilisé dans la face e est bien \vec{J}_e et qu'il soit discrétisé exactement comme indiqué plus haut.
 - Les coefficients a_P et a_{nb} sont tous de même signe. Dans notre cas, ils sont tous positifs et ceci a un sens physique. Si par exemple la température en E augmente, on s'attend à ce que celle de P augmente et ne diminue pas.
 - Dans l'équation linéarisée du terme source, nous avons imposé que S_P soit négatif. Ceci aussi a un sens physique. Si, par exemple, S est une source de chaleur, nous ne voudrions pas avoir la situation où quant T augmente, S augmente indéfiniment. Nous contrôlons alors cette situation avec le schéma numérique en imposant que S_P soit maintenu négatif.

Exemple :

Soit une plaque bidimensionnelle ($0, 3 \times 0, 4 \text{ m}^2$) d'épaisseur 1 cm et de conductivité thermique $1000 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. La face Ouest reçoit un flux constant égal à 500 kW/m^2 et les cotés Est et Sud sont isolés (Fig.4.7). La face Nord est maintenue à une température de 100°C . En utilisant un maillage uniforme avec $\Delta x = \Delta y = 0,1 \text{ m}$, calculer la distribution de la température dans cette plaque. En négligeant le transfert thermique selon l'axe Z , l'équation utilisée sera donc l'équation (4.15) sans terme source :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0$$

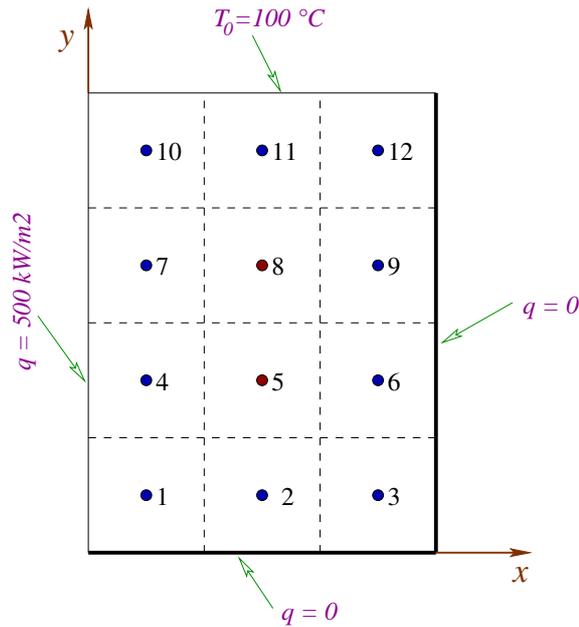


Fig. 4.7: *Exemple 2D.*

Solution :

- Noeuds internes (5 et 8) :

$$A_w = A_e = \Delta y \cdot e = 0,1 \cdot 0,01 = 10^{-3} \text{ m}^2.$$

$$A_s = A_n = \Delta x \cdot e = 0,1 \cdot 0,01 = 10^{-3} \text{ m}^2.$$

$$A_w = A_e = A_s = A_n = A \quad \text{et} \quad k_w = k_e = k_s = k_n = k.$$

$$a_W = a_E = a_S = a_N = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{10^3 \cdot 10^{-3}}{0,1} = 10.$$

$$S_u = 0; \quad a_P = 40 \quad \Rightarrow \quad S_P = 0 \quad \text{et} \quad a_P T_P = \sum_{nb} a_{nb} T_{nb} \quad \text{d'où les équations :}$$

$$\begin{cases} 40 T_5 = 10 T_4 + 10 T_6 + 10 T_2 + 10 T_8 & (5) \\ 40 T_8 = 10 T_7 + 10 T_9 + 10 T_5 + 10 T_{11} & (8) \end{cases}$$

- Noeud 11 :

$$a_N = 0; \quad a_W = a_E = a_S = 10;$$

$$a_P = 50 \quad \Rightarrow \quad S_P = -20; \quad S_u = 2 \frac{kA}{\Delta x} T_0 = 2000 \quad \text{d'où l'équation :}$$

$$50 T_{11} = 10 T_{10} + 10 T_{12} + 10 T_8 + 2000 \quad (11)$$

- Noeud 2 :

$$a_S = 0; \quad a_E = a_W = a_N = 10; \quad a_P = 30 \quad \Rightarrow \quad S_P = 0; \quad S_u = 0 \quad \text{d'où l'équation :}$$

$$30 T_2 = 10 T_1 + 10 T_3 + 10 T_5 \quad (2)$$

- Noeuds (4 et 7) :

$$a_W = 0; \quad a_E = a_S = a_N = 10;$$

$a_P = 30 \implies S_P = 0; \quad S_u = q A = 500$ d'où les équations :

$$\begin{cases} 30 T_4 = 10 T_1 + 10 T_5 + 10 T_7 + 500 & (4) \\ 30 T_7 = 10 T_4 + 10 T_8 + 10 T_{10} + 500 & (7) \end{cases}$$

- Nœuds (6 et 9) :

$a_E = 0; \quad a_W = a_S = a_N = 10;$

$a_P = 30 \implies S_P = 0; \quad S_u = 0$ d'où les équations :

$$\begin{cases} 30 T_6 = 10 T_3 + 10 T_5 + 10 T_9 & (6) \\ 30 T_9 = 10 T_6 + 10 T_8 + 10 T_{12} & (9) \end{cases}$$

- Nœud 3 :

$a_E = a_S = 0; \quad a_W = a_N = 10; \quad a_P = 20 \implies S_P = 0; \quad S_u = 0$

d'où l'équation :

$$20 T_3 = 10 T_2 + 10 T_6 \quad (3)$$

- Nœud 10 :

$a_W = a_N = 0; \quad a_E = a_S = 10; \quad a_P = 40 \implies S_P = -20;$

$S_u = 2 \frac{kA}{\Delta x} T_0 + q A = 2500$ d'où l'équation :

$$40 T_{10} = 10 T_7 + 10 T_{11} + 2500 \quad (10)$$

- Nœud 1 :

$a_W = a_S = 0; \quad a_E = a_N = 10; \quad a_P = 20 \implies S_P = 0; \quad S_u = 500$ d'où l'équation :

$$20 T_1 = 10 T_2 + 10 T_4 + 500 \quad (1)$$

- Nœud 12 :

$a_E = a_N = 0; \quad a_W = a_S = 10; \quad a_P = 40 \implies S_P = -20; \quad S_u = 2000$ d'où l'équation :

$$40 T_{12} = 10 T_9 + 10 T_{11} + 2000 \quad (12)$$

En mettant les équations dans l'ordre (1) à (12), nous aurons la forme matricielle

$A.T = B$ de ce système :

$$\begin{bmatrix}
 -20 & 10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 10 & -30 & 10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 10 & -20 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 10 & 0 & 0 & -30 & 10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 10 & 0 & 10 & -40 & 10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 10 & 0 & 10 & -30 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & -30 & 10 & 0 & 10 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 10 & -40 & 10 & 0 & 10 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 10 & -30 & 0 & 0 & 10 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & -40 & 10 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 10 & -50 & 10 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 10 & -40
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -500 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \\ 0 \\ -2500 \\ -2000 \\ -2000 \end{bmatrix}$$

En utilisant le logiciel de calcul *Maple*, nous aurons la solution numérique :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260,036 \\ 227,798 \\ 212,164 \\ 242,274 \\ 211,195 \\ 196,529 \\ 205,591 \\ 178,178 \\ 166,229 \\ 146,322 \\ 129,696 \\ 123,981 \end{bmatrix}$$

Remarque :

La compréhension de ce problème 2D dépend fortement de celles des problèmes 1D étudiés dans les exemples (1 à 3) et les résultats trouvés dans ces derniers peuvent directement être appliqués pour ce problème.

4.2.6 Problème tridimensionnel

Considérons l'équation de diffusion stationnaire 3D en coordonnées rectangulaires avec terme source :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}) + S = 0 \quad (4.19)$$

L'intégration de cette équation à travers le (v.c) englobant le nœuds interne P ne pose aucune difficulté par rapport au problème 2D et nous aurons alors :

$$\Gamma_e A_e \frac{d\phi}{dx}|_e - \Gamma_w A_w \frac{d\phi}{dx}|_w + \Gamma_n A_n \frac{d\phi}{dy}|_n - \Gamma_s A_s \frac{d\phi}{dy}|_s + \Gamma_t A_t \frac{d\phi}{dz}|_t - \Gamma_b A_b \frac{d\phi}{dz}|_b + \bar{S} \delta x \delta y \delta z = 0$$

Les indices b et t étant successivement pour “*Bottom*” (bas) et “*Top*” (Haut).

En approximant les dérivées et en réarrangeant les termes, nous aurons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_s} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_n} + \frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_b} + \frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_t} - S_P \right) \phi_P &= \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w} \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e} \right) \phi_E \cdots \\ \cdots + \left(\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_s} \right) \phi_S + \left(\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_n} \right) \phi_N + \left(\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_b} \right) \phi_B + \left(\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_t} \right) \phi_T + S_u &\quad (4.20) \end{aligned}$$

Cette équation peut aussi se mettre sous la forme :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T + S_u \quad (4.21)$$

avec :

$$a_W = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w}; \quad a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e}; \quad a_S = \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_s}; \quad a_N = \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_n}; \quad a_B = \frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_b}; \quad a_T = \frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_t};$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T - S_P$$

et sous forme compacte :

$$\begin{cases} a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_u \\ a_P = \sum_{nb} a_{nb} - S_P \end{cases} \quad (4.22)$$

avec : $nb = \{W, E, S, N, B, T\}$.

4.2.7 Problèmes symétriques

Pas encore implémenté!

4.2.8 Règles de base à satisfaire

La MVF est basée sur les règles suivantes :

Règle N°1 : Règle de l'unicité des flux aux interfaces :

Les flux sortant d'un ($v.c$) par une face doit être le même que celui entrant par la face du ($v.c$) voisin.

Règle N°2 : Règle des coefficients positifs :

Les coefficients a_P et a_{nb} doivent toujours être positifs.

Règle N°3 : Règle de la pente négative :

Pour le terme source, nous devons toujours avoir $S_P \leq 0$.

Règle N°4 : Règle de la somme des coefficients :

Nous avons dans le cas d'absence du terme source : $a_P = \sum_{nb} a_{nb}$

et d'une manière générale, lorsqu'il y a un terme source : $a_P \geq \sum_{nb} a_{nb}$.

4.3 Problème de convection-diffusion

Considérons le problème conducto-convectif unidimensionnel (Fig.4.8) dont l'équation peut être déduite de l'équation générale de transport (4.8) :

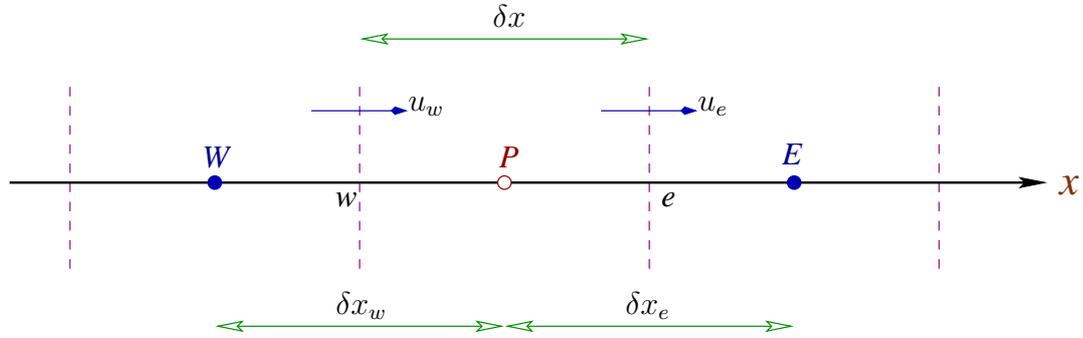


Fig. 4.8: **Problème conducto-convectif 1D.**

$$\frac{d}{dx} (\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (4.23)$$

Puisqu'il y a mouvement alors l'équation de continuité est toujours satisfaite :

$$\frac{d}{dx} (\rho u) = 0 \quad (4.24)$$

L'intégration des équations (4.23) et (4.24) à travers le (v.c) nous donne :

$$\begin{cases} (\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w &= (\Gamma A \frac{d\phi}{dx})_e - (\Gamma A \frac{d\phi}{dx})_w \\ (\rho u A)_e - (\rho u A)_w &= 0 \end{cases}$$

En supposant un profil linéaire pour le terme diffusif nous aurons les équations simplifiées suivantes :

$$\begin{cases} F_e \phi_e - F_w \phi_w &= D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \\ F_e - F_w &= 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

avec :

$$F_w = \rho_w u_w A_w; \quad F_e = \rho_e u_e A_e; \quad D_w = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w}; \quad D_e = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e}$$

$F = \rho u A$: correspond au débit massique et peut être *positif* ou *négatif*.

$D = \frac{\Gamma A}{\delta x}$: correspond à la diffusion de chaleur ou de matière ($\Gamma = \frac{k}{C_p}, \mu, \dots$) et doit être *positif*.

Le problème posé ici est la détermination des variables ϕ aux niveaux des interfaces, c'est-à-dire : ϕ_w et ϕ_e ?

Nous allons donner les différents schémas utilisés dans la littérature afin d'approximer le terme convectif aux interfaces du (*v.c*).

4.3.1 Schéma centré

L'approximation du terme convectif par un schéma centré est donnée par :

$$\begin{cases} \phi_w &= \frac{1}{2}(\phi_W + \phi_P) \\ \phi_e &= \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_E) \end{cases} \quad (4.26)$$

En remplaçant ce schéma dans (4.25), nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{F_e}{2} (\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2} (\phi_W + \phi_P) &= D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \\ \implies [(D_w - \frac{F_w}{2}) + (D_e + \frac{F_e}{2})] \phi_P &= (D_w + \frac{F_w}{2}) \phi_W + (D_e - \frac{F_e}{2}) \phi_E \\ \implies [(D_w + \frac{F_w}{2}) + (D_e - \frac{F_e}{2}) + (F_e - F_w)] \phi_P &= (D_w + \frac{F_w}{2}) \phi_W + (D_e - \frac{F_e}{2}) \phi_E \end{aligned}$$

qui toujours s'écrit sous la forme :

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_u = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$$

avec :

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}; \quad a_E = D_e - \frac{F_e}{2}; \quad a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w); \quad S_p = F_w - F_e; \quad S_u = 0$$

Inconvénients :

Ce schéma est limité à des faibles valeurs du rapport $\frac{|F|}{D}$ (sinon on perd la dominance de la diagonale de la matrice) :

$$\frac{|F|}{D} = P_e = \frac{\rho u \delta x}{\Gamma} < 2$$

$\frac{|F|}{D}$ représente soit le nombre de Peclet en transfert thermique soit le nombre de Reynolds en écoulement de fluide. Il représente donc l'importance de la convection par rapport à la diffusion.

Pour montrer cet inconvénient, examinons l'exemple simple suivant :

Supposons que $F_w = F_e = 4$ et $D_w = D_e = 1$, ce qui nous donne un nombre de Peclet égal à 4 et les coefficients $a_W = 3$, $a_E = -1$ et $a_P = 2$.

— Si $\phi_W = 100$ et $\phi_E = 200$ alors nous aurons : $\phi_P = \frac{3 \cdot 100 - 200}{2} = 50!$

— Si $\phi_W = 200$ et $\phi_E = 100$ alors nous aurons : $\phi_P = \frac{3 \cdot 200 - 100}{2} = 250!$

Ces valeurs sont en dehors de l'intervalle dans lequel la solution devrait y être c-à-d [100, 200]. Dans cet exemple, la règle des coefficients positifs est violée.

4.3.2 Schéma décentré (Upwind)

Ce schéma propose que la valeur à l'interface soit prise égale à celle de l'amont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_w = \phi_W \text{ si } F_w > 0 \\ \phi_w = \phi_P \text{ si } F_w < 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_e = \phi_P \text{ si } F_e > 0 \\ \phi_e = \phi_E \text{ si } F_e < 0 \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Soit $[a, b] = \max(a, b)$ le schéma Upwind se résume alors à :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_w \phi_w = [F_w, 0] \phi_W - [-F_w, 0] \phi_P \\ F_e \phi_e = [F_e, 0] \phi_P - [-F_e, 0] \phi_E \end{array} \right. \quad (4.28)$$

En remplaçant ce schéma dans (4.25), l'équation discrétisée s'écrit alors :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$$

avec :

$$a_W = D_w + [F_w, 0]; \quad a_E = D_e + [-F_e, 0]; \quad a_P = D_w + [-F_w, 0] + D_e + [F_e, 0]; \quad S_p = 0; \quad S_u = 0$$

Inconvénients :

Ce schéma est non approprié pour les faibles valeurs du rapport $\frac{|F|}{D} = |P_e|$.

La diffusion est surestimée pour les grandes valeurs de $\frac{|F|}{D}$ (normalement $\frac{d\phi}{dx} \rightarrow 0$).

4.3.3 Schéma exponentiel

L'intégration de l'équation (4.23) pour $0 \leq x \leq L$ avec les conditions aux limites $\phi_0 = \phi(x=0)$ et $\phi_L = \phi(x=L)$ nous donne :

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(\frac{F}{D} x) - 1}{\exp(\frac{F}{D} L) - 1} = \frac{\exp(P_e \frac{x}{L}) - 1}{\exp(P_e) - 1} \quad (4.29)$$

avec : $P_e = \frac{\rho u L}{\Gamma}$

Nous pouvons alors représenter les variations de $\phi(x)$ pour différentes valeurs de $\frac{F}{D}$.

- Pour $\frac{F}{D} = 0 \implies u = 0$ donc pas de terme convectif (problème de diffusion pur),
 $\implies \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \implies \phi$ a un profil linéaire.

- Pour les valeurs élevées et positives de $\frac{F}{D}$, les valeurs de ϕ sont proches de ϕ_0 .

- Pour les valeurs élevées et négatives de $\frac{F}{D}$, les valeurs de ϕ sont proches de ϕ_L .

L'intégration de l'équation (4.23) sur le (vc) nous donne :

$$F_e \left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(P_{ee}) - 1} \right) - F_w \left(\phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{\exp(P_{ew}) - 1} \right) = 0 \quad (4.30)$$

L'équation discrétisée s'écrit alors :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$$

avec :

$$a_W = \frac{F_w \exp(\frac{F_w}{D_w})}{\exp(\frac{F_w}{D_w}) - 1}; \quad a_E = \frac{F_e}{\exp(\frac{F_e}{D_e}) - 1}; \quad a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

Inconvénients :

- Lorsque $|P_e|$ prend des valeurs élevées alors $\frac{d\phi}{dx} = 0$ à $x = \frac{L}{2}$ donc pas de diffusion, alors qu'avec un schéma Upwind, un profil linéaire est utilisé pour la diffusion. Donc la diffusion est surestimée.

- Le schéma paraît approprié mais n'est pas assez utilisé car d'une part, le calcul des exponentielles revient très cher numériquement et, d'autre part, le schéma n'est pas exact pour les situations 2D et 3D avec terme source.

4.3.4 Schéma Hybride

C'est un schéma ayant la qualité du schéma exponentiel mais avec des expressions simples dont le calcul n'est pas cher (expressions algébriques).

- Ce schéma est identique au schéma centré si : $|P_e| \leq 2$.

- Ce schéma est identique au schéma décentré (Upwind) si : $|P_e| > 2$.

Inconvénients :

L'erreur est maximale au voisinage de $|P_e| \simeq 2$.

4.3.5 Schéma Power Law

La loi en puissance ou polynomiale améliore l'enveloppe de la variation exponentielle. Ce schéma est recommandé pour les situations de convection-diffusion.

4.3.6 Forme générale

On combine les différents schémas en une seule forme compacte :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$$

avec :

$$a_W = D_w A (|P_{ew}|) + [F_w, 0]; \quad a_E = D_e A (|P_{ee}|) + [-F_e, 0]; \quad a_P = a_W + a_E - S_P$$

où $A (|P_e|)$ qui prendra une fonction selon le schéma choisi :

Schéma	$A (P_e)$
Centré	$1 - 0.5 P_e $
Upwind	1
Hybride	$[0, 1 - 0.5 P_e]$
Exponentiel	$\frac{ P_e }{\exp(P_e)-1}$
Power Law	$[0, (1 - 0.1 P_e)^5]$

Tab. 4.1: *Fonction à prendre pour $A (|P_e|)$.*

4.3.7 Exemple 1 : Schéma centré

La propriété ϕ est transportée par convection-diffusion à travers le domaine 1D (Fig.4.9). L'équation gouvernante est l'équation (4.23) avec les conditions aux limites $\phi_0 = \phi(x = 0) = 1$ et $\phi_L = \phi(x = L) = 0$. En utilisant 5 (v.c) égaux et le schéma centré pour la convection et la diffusion calculer la distribution de $\phi(x)$ dans les cas suivants :

- a)- $u = 0, 1 \text{ m/s}$; b)- $u = 2, 5 \text{ m/s}$;

et comparer le résultat avec la solution analytique :

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(\rho u x / \Gamma) - 1}{\exp(\rho u L / \Gamma) - 1}$$

c)- Recalculer la solution pour $u = 2,5 \text{ m/s}$ avec 20 (v.c) et comparer le résultat avec la solution analytique.

On donne : $L = 1 \text{ m}$; $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$; $\Gamma = 0,1 \text{ kg/m.s}$; $\Delta x = 0,2 \text{ m}$; $A = 1 \text{ m}^2$;

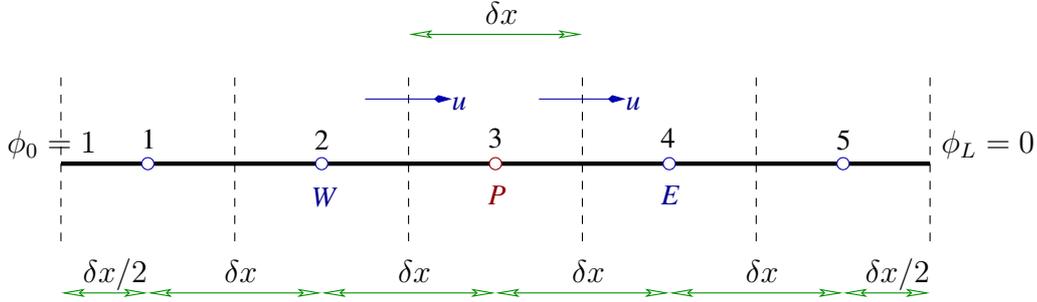


Fig. 4.9: **Exemple 1 : Schéma centré.**

Solution :

1^{er} cas :

$$F_w = F_e = F = \rho u A = 1.0, 1.1 = 0, 1.$$

$$D_w = D_e = D = \frac{\Gamma A}{\Delta x} = \frac{0,1.1}{0,2} = 0, 5. \text{ Donc : } \frac{F}{D} = 0, 2.$$

- Nœuds internes (2, 3 et 4) :

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} = D + \frac{F}{2} = 0, 5 + 0, 05 = 0, 55.$$

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} = D - \frac{F}{2} = 0, 5 - 0, 05 = 0, 45.$$

$$a_P = D + \frac{F}{2} + D - \frac{F}{2} = 2D = 2.0, 5 = 1 \implies S_P = 0, 55 + 0, 45 - 1 = 0.$$

$$S_u = 0.$$

En appliquant : $a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$, nous aurons les équations :

$$\begin{cases} \phi_2 = 0, 55 \phi_1 + 0, 45 \phi_3 & (2) \\ \phi_3 = 0, 55 \phi_2 + 0, 45 \phi_4 & (3) \\ \phi_4 = 0, 55 \phi_3 + 0, 45 \phi_5 & (4) \end{cases}$$

- Nœud gauche (1) :

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

$$\implies F \left(\frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) - F \phi_0 = D (\phi_E - \phi_P) - 2D (\phi_P - \phi_0)$$

$$\implies \left(3D + \frac{F}{2} \right) \phi_P = 0 \phi_W + \left(D - \frac{F}{2} \right) \phi_E + (2D + F) \phi_0$$

$$\implies \left[\left(D - \frac{F}{2} \right) + (2D + F) \right] \phi_P = 0 \phi_W + \left(D - \frac{F}{2} \right) \phi_E + (2D + F) \phi_0$$

qui s'écrit sous la forme :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad \text{et} \quad a_P = a_W + a_E - S_P$$

avec :

$$a_W = 0; \quad a_E = D - \frac{F}{2}; \quad a_P = 3D + \frac{F}{2}; \quad S_P = -(2D + F); \quad S_u = (2D + F) \phi_0$$

$$\underline{A.N} : a_W = 0; \quad a_E = 0,45; \quad a_P = 1,55; \quad S_P = -1,1; \quad S_u = 1,1.$$

D'où l'équation :

$$1,55 \phi_1 = 0,45 \phi_2 + 1,1 \quad (1)$$

- Nœud droit (5) :

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

$$\implies F \phi_L - F \left(\frac{\phi_W + \phi_P}{2} \right) = 2D (\phi_L - \phi_P) - D (\phi_P - \phi_W)$$

$$\implies \left(3D - \frac{F}{2} \right) \phi_P = \left(D + \frac{F}{2} \right) \phi_W + 0 \phi_E + (2D - F) \phi_L$$

$$\implies \left[\left(D + \frac{F}{2} \right) + (2D - F) \right] \phi_P = \left(D + \frac{F}{2} \right) \phi_W + 0 \phi_E + (2D - F) \phi_L$$

qui s'écrit sous la forme :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad \text{et} \quad a_P = a_W + a_E - S_P$$

avec :

$$a_W = D + \frac{F}{2}; \quad a_E = 0; \quad a_P = 3D - \frac{F}{2}; \quad S_P = -(2D - F); \quad S_u = (2D - F) \phi_L$$

$$\underline{A.N} : a_W = 0,55; \quad a_E = 0; \quad a_P = 1,45; \quad S_P = -0,9; \quad S_u = 0.$$

D'où l'équation :

$$1,45 \phi_5 = 0,55 \phi_4 \quad (5)$$

En mettant les équations (1) à (5) sous la forme matricielle $A.T = B$, nous aurons

le système :

$$\begin{bmatrix} -1,55 & 0,45 & 0 & 0 & 0 \\ 0,55 & -1,00 & 0,45 & 0 & 0 \\ 0 & 0,55 & -1,00 & 0,45 & 0 \\ 0 & 0 & 0,55 & -1,00 & 0,45 \\ 0 & 0 & 0 & 0,55 & -1,45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant le logiciel de calcul *Maple*, nous aurons la solution numérique :

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9421 \\ 0,8006 \\ 0,6276 \\ 0,4163 \\ 0,1579 \end{bmatrix}$$

- Comparaison :

La comparaison entre les résultats numériques et exactes est mentionnée dans le tableau et la figure ci-dessous :

Noeud	Abcisse (m)	Solution Numérique	Solution Exacte	Erreur relative (%)
1	0,1	0,9421	0,9389	-0,341
2	0,3	0,8006	0,7963	-0,540
3	0,5	0,6276	0,6222	-0,868
4	0,7	0,4163	0,4098	-1,586
5	0,9	0,1579	0,1502	-5,126

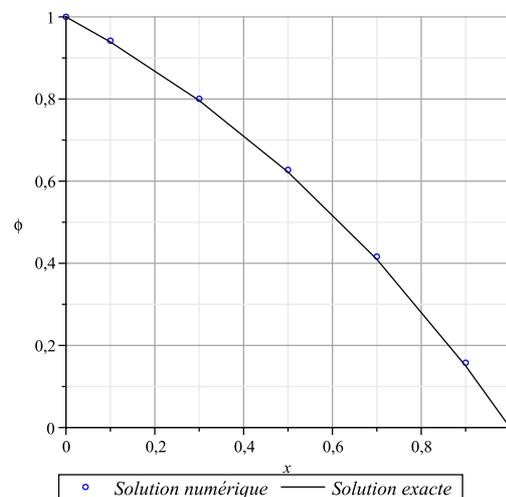


Fig. 4.10: **Exemple1- Cas 1** : $u=0,1$ m/s et $\Delta x=0,2$ m.

2^{ème} cas :

Dans ce cas : $\frac{F}{D} = \frac{2,5}{0,5} = 5$.

De la même manière que le 1^{er} cas, nous aurons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} -2,75 & -0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 1,75 & -1,00 & -0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 1,75 & -1,00 & -0,75 & 0 \\ 0 & 0 & 1,75 & -1,00 & -0,75 \\ 0 & 0 & 0 & 1,75 & -0,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution numérique est donnée par le logiciel de calcul *Maple* :

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0356 \\ 0,8694 \\ 1,2573 \\ 0,3521 \\ 2,4644 \end{bmatrix}$$

- Comparaison :

La comparaison entre les résultats numériques et exactes est mentionnée dans le tableau et la figure ci-dessous :

Noeud	Abscisse (m)	Solution Numérique	Solution Exacte	Erreur relative (%)
1	0,1	1,036	1,0000	-3,60
2	0,3	0,8694	1,0000	13,60
3	0,5	1,2570	1,0000	-25,70
4	0,7	0,3521	0,9994	64,77
5	0,9	2,2464	0,9179	-168,40

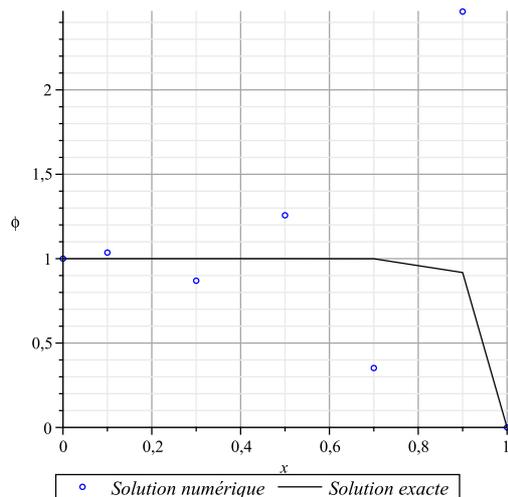


Fig. 4.11: **Exemple1- Cas 2** : $u=2,5$ m/s et $\Delta x=0,2$ m.

On remarque bien, d'après le tableau et la figure ci-dessus, que la solution numérique ne correspond pas du tout à la solution analytique à cause du non respect de la condition $\frac{|F|}{D} < 2$. On dit que la solution diverge.

3^{ème} cas :

Dans ce cas : $\Delta x = 0,05$ et $\frac{F}{D} = \frac{2,5}{2} = 1,25$.

De la même manière que le 2^{ème} cas, nous aurons les résultats suivants :

Noeuds	a_W	a_E	S_P	a_P	S_u
1	0	0,75	-6,50	7,25	6,50
2 - 19	3,25	0,75	0	4,00	0
20	3,25	0	-1,50	4,75	0

- Comparaison :

La comparaison entre les résultats numériques et exactes est mentionnée dans le tableau et la figure ci-dessous :

Noeud	Abscisse (m)	Solution Numérique	Solution Exacte	Erreur relative (%)
1	0,025	1,0000	1,0000	0
2-11		1,0000	1,0000	0
12	0,575	1,0000	1,0000	0
13	0,625	1,0000	0,9999	-0,01
14	0,675	0,9999	0,9997	-0,02
15	0,725	0,9998	0,9990	-0,08
16	0,775	0,9989	0,9964	-0,25
17	0,825	0,9954	0,9875	-0,80
18	0,875	0,9800	0,9558	-2,53
19	0,925	0,9135	0,8474	-7,80
20	0,975	0,6250	0,4621	-35,25

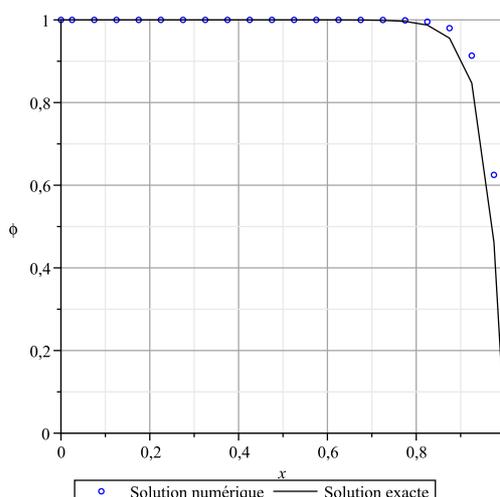


Fig. 4.12: **Exemple1- Cas 3** : $u=2,5$ m/s et $\Delta x=0,05$ m.

Le raffinement du maillage de 5 à 20 (v.c) a permis de réduire le rapport $\frac{F}{D}$ de 5 (dans le 2^{ème} cas) à 1,25 et donc on constate bien que la solution converge avec une erreur relative acceptable sauf pour le dernier nœud. Ce dernier problème pourra être réglé en augmentant suffisamment le nombre de nœuds.

4.3.8 Exemple 2 : Schéma Upwind

La variable ϕ est transportée par convection-diffusion à travers le domaine 1D (Fig.4.9) de longueur L . avec les conditions aux limites $\phi_0 = \phi(x = 0) = 1$ et $\phi_L = \phi(x = L) = 0$. En utilisant 5 (v.c) égaux et le schéma Upwind pour le terme convectif, calculer la distribution de $\phi(x)$ dans les deux cas suivants.

1. $F_w = F_e = F = \rho u A = 0,1$ et $D_w = D_e = D = \frac{\Gamma A}{\delta x} = 0,5$.
2. $F_w = F_e = F = \rho u A = 2,5$ et $D_w = D_e = D = \frac{\Gamma A}{\delta x} = 0,5$.

Solution :

Puisque $F > 0$ alors le schéma Upwind nous donne : $\phi_w = \phi_W$ et $\phi_e = \phi_P$.

1^{er} cas : $F = 0,1$

- Nœuds internes (2, 3 et 4) :

D'après l'équation (4.25) nous avons :

$$F \phi_e - F \phi_w = D (\phi_E - \phi_P) - D (\phi_P - \phi_W)$$

et en remplaçant ϕ_w et ϕ_e nous aurons :

$$F \phi_P - F \phi_W = D (\phi_E - \phi_P) - D (\phi_P - \phi_W)$$

$$\implies (2D + F) \phi_P = (D + F) \phi_W + D \phi_E$$

En comparant avec : $a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$, nous aurons les coefficients :

$$a_W = D + F = 0,5 + 0,1 = 0,6.$$

$$a_E = D = 0,5. \quad S_u = 0.$$

$$a_P = 2D + F = 2 \cdot 0,5 + 0,1 = 1,1 \implies S_P = (D + F) + D - (2D + F) = 0.$$

et finalement les équations :

$$\begin{cases} 1,1 \phi_2 = 0,6 \phi_1 + 0,5 \phi_3 & (2) \\ 1,1 \phi_3 = 0,6 \phi_2 + 0,5 \phi_4 & (3) \\ 1,1 \phi_4 = 0,6 \phi_3 + 0,5 \phi_5 & (4) \end{cases}$$

- Nœud gauche (1) :

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

$$\implies F (\phi_P) - F \phi_0 = D (\phi_E - \phi_P) - 2D (\phi_P - \phi_0)$$

$$\implies (3D + F) \phi_P = 0 \phi_W + D \phi_E + (2D + F) \phi_0$$

En comparant avec : $a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$, nous aurons les coefficients :

$$a_W = 0.$$

$$a_E = D = 0,5. \quad S_u = (2D + F) \phi_0 = 1,1.$$

$$a_P = 3D + F = 1,6 \implies S_P = D - (3D + F) = -(2D + F) = -1,1.$$

et finalement l'équation :

$$1,6 \phi_1 = 0,5 \phi_2 + 1,1 \quad (1)$$

- Nœud droit (5) :

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

$$\implies F (\phi_L) - F \phi_W = 2D (\phi_L - \phi_P) - D (\phi_P - \phi_W)$$

$$\implies 3D \phi_P = (D + F) \phi_W + 0 \phi_E + (2D - F) \phi_L$$

En comparant avec : $a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$, nous aurons les coefficients :

$$a_W = D + F = 0,6.$$

$$a_E = 0. \quad S_u = (2D - F) \phi_L = 0.$$

$$a_P = 3D = 1,5 \implies S_P = (D + F) + 0 - 3D = -(2D - F) = -0,9.$$

et finalement l'équation :

$$1,5 \phi_5 = 0,6 \phi_4 \quad (5)$$

En mettant les équations (1) à (5) sous la forme matricielle $A.T = B$, nous aurons le système :

$$\begin{bmatrix} -1,6 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & -1,1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & -1,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & -1,1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & -1,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant le logiciel de calcul *Maple*, nous aurons la solution numérique :

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9348 \\ 0,7914 \\ 0,6194 \\ 0,4129 \\ 0,1652 \end{bmatrix}$$

- Comparaison :

La comparaison entre les résultats numériques et exactes est mentionnée dans le tableau et la figure ci-dessous :

<i>Nœud</i>	<i>Abscisse (m)</i>	<i>Solution Numérique</i>	<i>Solution Exacte</i>	<i>Erreur relative (%)</i>
1	0,1	0.9348	0.9389	-0,4367
2	0,3	0.7914	0.7963	-0,6153
3	0,5	0.6194	0.6222	-0,4500
4	0,7	0.4129	0.4098	0,7565
5	0,9	0.1652	0.1502	9,9870

2^{ème} cas : $F = 2,5$

De la même manière que le 1^{er} cas, nous aurons les résultats suivants :

<i>Nœud</i>	a_W	a_E	S_P	a_P	S_u
1	0,0	0,5	-3,5	4,0	3,5
2	3,0	0,5	0,0	3,5	0,0
3	3,0	0,5	0,0	3,5	0,0
4	3,0	0,5	0,0	3,5	0,0
5	3,0	0,0	1,5	1,5	0,0

- Comparaison :

La comparaison entre les résultats numériques et exactes est mentionnée dans le tableau et la figure ci-dessous :

<i>Nœud</i>	<i>Abscisse (m)</i>	<i>Solution Numérique</i>	<i>Solution Exacte</i>	<i>Erreur relative (%)</i>
1	0,1		1,0000	
2	0,3		1,0000	
3	0,5		1,0000	
4	0,7		0,9994	
5	0,9		0,9179	

- Remarque :

Nous remarquons que pour le même nombre de nœuds, le schéma centré n'est pas capable de produire une solution pour le même problème alors que le schéma Upwind donne une solution plus réelle malgré qu'elle reste éloignée de la solution exacte surtout vers la limite droite.

4.4 Equation de diffusion 1D instationnaire

L'équation de diffusion instationnaire unidimensionnelle (ou équation de la chaleur) est donnée par :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S \quad (4.31)$$

L'intégration de cette équation à travers le (v.c) et dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ donne :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_{(vc)} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv dt &= \int_t^{t+\Delta t} \int_{(vc)} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dv dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{(vc)} S dv dt \\ \int_w^e \left[\int_t^{t+\Delta t} \rho C_p \frac{dT}{dt} dt \right] dv &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(k A \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(k A \frac{dT}{dx} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta v dt \\ \rho C_p (T_P - T_P^0) \Delta v &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(k_e A_e \frac{(T_E - T_P)}{\delta x_e} - k_w A_w \frac{(T_P - T_W)}{\delta x_w} \right) \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta v dt \end{aligned}$$

avec la notation T_P^0 qui correspond au temps t et T_P au temps $t + \Delta t$.

En posant :

$$I_t = \int_t^{t+\Delta t} T_P dt = [\theta T_P + (1 - \theta) T_P^0] \Delta t \quad (4.32)$$

nous aurons alors les différents schémas temporels de discrétisation :

- schéma explicite pour $\theta = 0$,
- schéma complètement implicite pour $\theta = 1$,
- schéma implicite de Crank-Nicholson pour $\theta = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{(T_P - T_P^0)}{\Delta t} \delta x &= \theta \left[\left(\frac{k_e}{\delta x_e} (T_E - T_P) - \frac{k_w}{\delta x_w} (T_P - T_W) \right) \right] \\ &\quad + (1 - \theta) \left[\left(\frac{k_e}{\delta x_e} (T_E^0 - T_P^0) - \frac{k_w}{\delta x_w} (T_P^0 - T_W^0) \right) \right] + \bar{S} \delta x \\ \rho C_p \frac{\delta x}{\Delta t} + \theta \left(\frac{k_w}{\delta x_w} + \frac{k_e}{\delta x_e} \right) T_P &= \frac{k_w}{\delta x_w} [\theta T_W + (1 - \theta) T_W^0] + \frac{k_e}{\delta x_e} [\theta T_E + (1 - \theta) T_E^0] \\ &\quad + \left[\rho C_p \frac{\delta x}{\Delta t} - (1 - \theta) \frac{k_w}{\delta x_w} - (1 - \theta) \frac{k_e}{\delta x_e} \right] T_P^0 + \bar{S} \delta x \end{aligned}$$

qui finalement peut se mettre sous la forme :

$$a_P T_P = a_W [\theta T_W + (1 - \theta) T_W^0] + a_E [\theta T_E + (1 - \theta) T_E^0] + [a_P^0 - (1 - \theta) a_W - (1 - \theta) a_E] T_P^0 + b$$

avec :

$$a_P = \theta (a_W + a_E) + a_P^0; \quad a_P^0 = \rho C_p \frac{\delta x}{\Delta t}; \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}; \quad a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}; \quad b = \bar{S} \delta x$$

4.4.1 Schéma explicite

Pour ce schéma nous avons : $\theta = 0$ et en posant : $b = S_u + S_P T_P^0$ nous aurons :

$$a_P T_P = a_W T_W^0 + a_E T_E^0 + [a_P^0 - (a_W + a_E - S_P)] T_P^0 + S_u$$

où :

$$a_P = a_P^0; \quad a_P^0 = \rho C_p \frac{\delta x}{\Delta t}; \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}; \quad a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}$$

4.4.2 Schéma implicite

Pour ce schéma nous avons : $\theta = 1$ et donc nous aurons :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0 + S_u$$

où :

$$a_P = a_P^0 + a_W + a_E - S_P; \quad a_P^0 = \rho C_p \frac{\delta x}{\Delta t}; \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}; \quad a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}$$

4.4.3 Schéma de Crank-Nicholson

Pour ce schéma nous avons : $\theta = \frac{1}{2}$ et donc nous aurons :

$$a_P T_P = a_W \frac{T_E - T_E^0}{2} + a_E \frac{T_W - T_W^0}{2} + \left[a_P^0 - \frac{a_W}{2} - \frac{a_E}{2} \right] T_P^0 + b$$

où :

$$a_P = \frac{1}{2} (a_W + a_E) + a_P^0 - \frac{1}{2} S_P; \quad a_P^0 = \rho C_p \frac{\delta x}{\Delta t}; \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}; \quad a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}; \quad b = S_u + \frac{1}{2} S_P T_P^0$$

4.5 Exercices

4-01 : Soit un volume de contrôle (v.c) de très faibles dimensions Δx , Δy et Δz . En considérant que l'accumulation de la variable scalaire ϕ dans le (v.c) pendant un temps Δt est égale au flux net de ϕ dans le (v.c) augmentée de la génération de ϕ à l'intérieur du (v.c), retrouver l'équation générale de transport scalaire de la variable ϕ .

1. Identifier chaque terme de cette équation.
2. Simplifier cette équation pour le cas d'un problème conducto-convectif unidimensionnel, stationnaire et sans terme source.
3. En utilisant la MVF, intégrer cette équation à travers un (v.c) convenablement choisi (faire un schéma).
4. En utilisant les schémas linéaire et centré successivement pour approximer les termes diffusif et convectif, écrire la forme générale de discrétisation en explicitant tous les coefficients (a_{nb} , a_p , S_p et S_u).
5. Que représente physiquement le nombre de Peclet.
6. Quelle est l'inconvénient du schéma centré utilisé pour approximer le terme convectif? Justifier votre réponse et donner un exemple numérique.

4-02 : **A-** Soit un domaine unidimensionnel constitué d'une barre horizontale de longueur L soumise à une température constante T_A à son bout gauche et T_B à son bout droit. Cette barre est constituée de deux tronçons (L_1, A_1, k_1) et (L_2, A_2, k_2). En discrétisant l'équation de diffusion par volumes finis en 7 (v.c) égaux, déterminer la forme matricielle du problème. On donne :

$$L_1 = 0,7 \text{ m}; \quad L_2 = 0,7 \text{ m}; \quad T_A = 300 \text{ }^\circ\text{C}; \quad T_B = 600 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$k_1 = 100 \text{ W/m}^\circ\text{C}; \quad k_2 = 200 \text{ W/m}^\circ\text{C}; \quad A_1 = 0,01 \text{ m}^2; \quad A_2 = 0,02 \text{ m}^2.$$

B- Si $T_B = T_A$, $A_2 = A_1$ et $k_2 = k_1$, déterminer la nouvelle forme matricielle du problème et calculer les températures aux différents nœuds.

4-03 : Considérons le transfert conductif stationnaire et bidimensionnel dans une plaque carrée sans terme source. Cette plaque de côté L a une épaisseur e et une conductivité thermique k . Les faces Nord et Ouest sont maintenues à une température constante T_0 et les faces Est et Sud sont soumises à un flux de chaleur constant q .

En utilisant une discrétisation par volumes finis sur un maillage rectangulaire ($N_x \times N_y$), déterminer les équations discrétisées des nœuds suivants : 1, 2, 4, 5, 6, 8, 13, 14 et 16. On donne :

$$L = 1,6 \text{ m}; \quad e = 2 \text{ cm}; \quad T_0 = 100 \text{ }^\circ\text{C}; \quad q = 10^5 \text{ W/m}^2;$$

$$\delta x = 0,4 \text{ m}; \quad \delta y = 0,4 \text{ m}; \quad k = 500 \text{ W/m}^\circ\text{C}.$$

4-04 : Considérons le transfert conductif stationnaire et bidimensionnel dans une plaque rectangulaire sans terme source. Cette plaque de largeur L et de hauteur H , a une épaisseur e et une conductivité thermique k_1 dans la première moitié de sa largeur et k_2 dans la seconde moitié. La face Nord est soumise à un flux de chaleur constant q , la face Ouest est maintenue à une température constante T_0 et les faces Est et Sud sont isolées.

En utilisant une discrétisation par volumes finis sur un maillage rectangulaire ($N_x \times N_y$), déterminer les équations discrétisées des nœuds suivants : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 19 et 20. On donne :

$$L = 1,6 \text{ m}; \quad e = 2 \text{ cm}; \quad T_0 = 40^\circ \text{C}; \quad q = 100 \text{ kW/m}^2; \quad H = 1,0 \text{ m}; \\ \delta x = 0,4 \text{ m}; \quad \delta y = 0,2 \text{ m}; \quad k_1 = 500 \text{ W/m}^\circ\text{C}; \quad k_2 = 200 \text{ W/m}^\circ\text{C}.$$

4-05 : Considérons le transfert conductif stationnaire et bidimensionnel dans une plaque rectangulaire sans terme source. Cette plaque de largeur L et de hauteur H , a une épaisseur e et une conductivité thermique k_1 dans la première moitié de sa largeur et k_2 dans la seconde moitié. La face Nord est soumise à un flux de chaleur constant q , la face Est est maintenue à une température constante T_0 et les faces Ouest et Sud sont isolées.

En utilisant une discrétisation par volumes finis sur un maillage rectangulaire ($N_x \times N_y$), déterminer les équations discrétisées des nœuds suivants : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 19 et 20. On donne :

$$L = 1,6 \text{ m}; \quad e = 2 \text{ cm}; \quad T_0 = 40^\circ \text{C}; \quad q = 100 \text{ kW/m}^2; \quad H = 1,0 \text{ m}; \\ \delta x = 0,4 \text{ m}; \quad \delta y = 0,2 \text{ m}; \quad k_1 = 500 \text{ W/m}^\circ\text{C}; \quad k_2 = 200 \text{ W/m}^\circ\text{C}.$$

4-06 : Considérons le transfert conductif stationnaire et bidimensionnel dans une plaque rectangulaire avec terme source. Cette plaque de largeur L et de hauteur H , a une épaisseur e et une conductivité thermique k . La face Nord est soumise à un flux de chaleur constant q , la face Est est maintenue à une température constante T_0 et les faces Ouest et Sud sont isolées.

En utilisant une discrétisation par volumes finis sur un maillage rectangulaire ($N_x \times N_y$), déterminer les équations discrétisées des nœuds suivants : 1, 2, 4, 5, 6, 8, 17, 18 et 20. On donne :

$$L = 1,6 \text{ m}; \quad e = 2 \text{ cm}; \quad H = 1,0 \text{ m}; \quad q = 100 \text{ kW/m}^2; \quad T_0 = 40^\circ \text{C}; \\ \delta x = 0,4 \text{ m}; \quad \delta y = 0,2 \text{ m}; \quad k = 500 \text{ W/m}^\circ\text{C}; \quad S = 5000 \text{ W/m}^3.$$

4-07 : Considérons le transfert conductif stationnaire et bidimensionnel dans une plaque rectangulaire sans terme source. Cette plaque de largeur L et de hauteur H ,

a une épaisseur e et une conductivité thermique k . Les faces Est et Ouest sont maintenues à une température constante T_0 et les faces Sud et Nord sont soumises à un flux de chaleur constant q .

En utilisant une discrétisation par volumes finis sur un maillage rectangulaire ($N_x \times N_y$), déterminer la forme matricielle du problème. On donne :

$$L = 1,0 \text{ m}; \quad e = 0,1 \text{ cm}; \quad H = 0,4 \text{ m}; \quad T_0 = 100 \text{ }^\circ\text{C}; \\ \delta x = 0,2 \text{ m}; \quad \delta y = 0,1 \text{ m}; \quad k = 1000 \text{ W/m}^\circ\text{C}; \quad q = 600 \text{ kW/m}^2.$$

4-08 : Considérons le transfert conductif stationnaire et unidimensionnel dans une barre sans terme source. Cette barre de longueur L , de section A , de conductivité thermique k est soumise à une température constante T_A à son bout droit et à un flux de chaleur constant q à son bout gauche.

En utilisant une discrétisation par volumes finis en 3 (v.c) égaux, déterminer la forme matricielle du problème et calculer les températures aux différents nœuds. On donne :

$$L = 0,15 \text{ m}; \quad A = 0,01 \text{ m}^2; \quad k = 1000 \text{ W/m}^\circ\text{C}; \quad T_A = 50 \text{ }^\circ\text{C}; \quad q = 50 \text{ kW/m}^2.$$

4-09 : La variable ϕ est transportée par convection-diffusion à travers le domaine unidimensionnel de longueur L avec les (C.L) suivantes :

$$\phi(x=0) = \phi_0 = 2 \quad \text{et} \quad \phi(x=L) = \phi_L = 1$$

En utilisant 5 (v.c) égaux et le schéma centré pour le terme convectif, déterminer la forme matricielle du problème. On donne :

$$F_w = F_e = F = 0,1 \quad \text{et} \quad D_w = D_e = D = 0,5.$$

4-10 : La variable ϕ est transportée par convection-diffusion à travers le domaine unidimensionnel de longueur L avec les (C.L) suivantes :

$$\phi(x=0) = \phi_0 = 1 \quad \text{et} \quad \phi'(x=L) = \phi'_L = 0$$

En utilisant 3 (v.c) égaux et le schéma Upwind pour le terme convectif, déterminer la forme matricielle du problème et calculer les valeurs de ϕ aux différents nœuds. On donne :

$$F_w = F_e = F = \rho u A = 0,2 \quad \text{et} \quad D_w = D_e = D = \frac{\Gamma A}{\delta x} = 0,4.$$

4-11 : La variable ϕ est transportée par convection-diffusion à travers le domaine unidimensionnel de longueur L avec les (C.L) suivantes :

$$\phi'(x=0) = \phi'_0 = 0 \quad \text{et} \quad \phi(x=L) = \phi_L = 1$$

En utilisant 3 (v.c) égaux et le schéma Upwind pour le terme convectif, déterminer la forme matricielle du problème et calculer les valeurs de ϕ aux différents nœuds. On donne :

$$F_w = F_e = F = \rho u A = -0,2 \quad \text{et} \quad D_w = D_e = D = \frac{\Gamma A}{\delta x} = 0,4.$$

4-12 : Un large four industriel est supporté par une colonne en brique de forme carrée de côté L , de faible épaisseur e et de conductivité thermique k . Cette colonne est soumise à une température constante T_0 sur les faces Est, Ouest et Nord. La face Sud est refroidie par un courant d'air à une température T_∞ et un coefficient de transfert convectif h . En considérant l'équation ci-dessous et en discrétisant la colonne par volumes finis en 4 (v.c) égaux, déterminer le système d'équations algébriques à résoudre pour ce problème. On donne :

$$L = 1 \text{ m}; \quad e = 10 \text{ mm}; \quad k = 100 \text{ W/m}^\circ\text{K}; \\ T_0 = 500 \text{ }^\circ\text{K}; \quad T_\infty = 300 \text{ }^\circ\text{K}; \quad h = 10 \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{K}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) - n^2 (T - T_\infty) = 0 \quad \text{avec} \quad n^2 = \frac{h P}{k A_c}$$

P et A_c sont respectivement le périmètre et l'aire de la surface convectée.

4-13 : Considérons le transfert conductif stationnaire et unidimensionnel dans une barre sans terme source. Cette barre de longueur L , de section A , de conductivité thermique k est soumise à une température constante T_A à son bout gauche et T_B à son bout droit.

En utilisant une discrétisation par volumes finis en 3 (v.c) égaux, déterminer la forme matricielle du problème et calculer les températures aux différents nœuds. On donne :

$$L = 0,15 \text{ m}; \quad A = 0,01 \text{ m}^2; \quad k = 1000 \text{ W/m}^\circ\text{C}; \quad T_A = 10 \text{ }^\circ\text{C}; \quad T_B = 50 \text{ }^\circ\text{C}.$$

4-14 : La variable ϕ est transportée par convection-diffusion à travers le domaine unidimensionnel de longueur L avec les (C.L) suivantes :

$$\phi(x = 0) = \phi_0 = 1 \quad \text{et} \quad \phi(x = L) = \phi_L = 0$$

En utilisant 5 (v.c) égaux et le schéma Upwind pour le terme convectif, déterminer la forme matricielle du problème. On donne :

$$F_w = F_e = F = \rho u A = 0,1 \quad \text{et} \quad D_w = D_e = D = \frac{\Gamma A}{\delta x} = 0,5.$$

Bibliographie

- [1] Joe D. Hoffmann, “*Numerical Methods for Engineers and Scientists*”, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, 2001.
- [2] Chapra, S. C., and Canale, R. P., “*Numerical Methods for Engineers*”, 3rd Ed., McGraw-Hill, New York, 1998.
- [3] Aslak Tveito and Ragnar Winther, “*Introduction to Partial Differential Equations : A Computational*”, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [4] Y. Pinchover and J. Rubinstein, “*An Introduction to Partial Differential Equations*”, Cambridge University Press, 2005.
- [5] Richard hyberman, “*Elementary Applied Partial Differential Equations*”, 2nd. Ed., Prentice Hall, USA, 1983.
- [6] Klauss A. Hoffmann, Steve T. Chiang, “*Computational Fluid Dynamics*”, 4th Ed., Engineering Education System, USA, 2000.
- [7] William F. Ames, “*Numerical Methods for Partial Differential Equations*”, 2nd Ed., Academic Press, USA, 1977.
- [8] H. F. Weinberger, “*A First Cours in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods*”, Dover Publications, New York, 1965.
- [9] David L. Powers, “*Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*”, 5th Ed., Elsevier Academic Press, USA, 2006.
- [10] David R. Croft, David G. Lilley, “*Heat transfer calculations using Finite Difference Equations*”, Applied Science Publishers, England, 1977.
- [11] Henry J. Ricardo, “*A Modern Introduction to Differential Equations*”, 2nd Ed., Elsevier, Canada, 2009.
- [12] Jayathi Y. Murthy, “*Numerical Methods in Heat, Mass, and Momentum Transfer*”, Purdue University, 2002.
- [13] K. W. Morton, David Mayers, “*Numerical Solution of Partial Differential Equations*”, 2nd Ed., Cambridge, 2005.

- [14] Peter J. Collins, “*Differential and Integral Equations*”, Oxford University Press, New York, 2006.
- [15] C. Pozrikidis, “*Fluid Dynamics : Theory, Computation, and Numerical Simulation*”, 2nd Ed., Springer, New York, 2009.
- [16] Aslak Tveito, Ragnar Winther, “*Introduction to Partial Differential Equations : A Computational Approach*”, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [17] John C. Tannehill, Dale A. Anderson, Richard H. Pletcher, “*Computational Fluid Mechanics And Heat Transfer*”, 2nd Ed., Taylor&Francis, USA, 1997.
- [18] H. K. Versteeg, W. Malalasekera, “*An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method*”, 1st Ed., Longman scientific&Technical, USA, 1995.
- [19] Suhas V. Patankar, “*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*”, Hemisphere Publishing, USA, 1980.

Annexes

Formulation à 9 points

Démonstration de la formulation à 9 points utilisée pour l'équation de Laplace.

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h f'(x) + \frac{h^3}{3} f'''(x) + O(h^5)$$

$$\implies \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{6} f'''(x) + O(h^4) \quad (*)$$

$$f'(x+h) = f'(x) + h f''(x) + \frac{h^2}{2} f'''(x) + \frac{h^3}{6} f^{(4)}(x) + O(h^4)$$

$$f'(x-h) = f'(x) - h f''(x) + \frac{h^2}{2} f'''(x) - \frac{h^3}{6} f^{(4)}(x) + O(h^4)$$

$$f'(x+h) + f'(x-h) = 2f'(x) + h^2 f'''(x) + O(h^4)$$

$$\implies f'(x+h) - 2f'(x) + f'(x-h) = h^2 f'''(x) + O(h^4)$$

$$\implies \frac{1}{6} [f'(x+h) - 2f'(x) + f'(x-h)] = \frac{h^2}{6} f'''(x) + O(h^4)$$

$$\implies f'(x) + \frac{1}{6} [f'(x+h) - 2f'(x) + f'(x-h)] = f'(x) + \frac{h^2}{6} f'''(x) + O(h^4) \quad (**)$$

$$(*) \text{ et } (**)\implies f'(x) + \frac{1}{6} [f'(x+h) - 2f'(x) + f'(x-h)] = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^4)$$

En utilisant δ comme opérateur différence du 1^{er} ordre et δ^2 celui du 2nd ordre, cette équation devient :

$f'(x) + \frac{1}{6} \delta^2 f'(x) = \frac{\delta f(x)}{2h} + O(h^4)$ et par suite :

$$f'(x) = \frac{\delta f(x)}{2h \left(1 + \frac{\delta^2}{6}\right)} + O(h^4)$$

Cette dernière équation représente la différence centrée implicite à 3 points au 4^{ème} ordre pour $f'(x)$.

De la même manière nous pouvons aussi montrer que :

$$f''(x) = \frac{\delta^2 f(x)}{h \left(1 + \frac{\delta^2}{12}\right)} + O(h^4)$$

En utilisant cette dernière formule, nous avons :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{\delta_x^2 T_{i,j}}{\Delta x^2 \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12}\right)} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{\delta_y^2 T_{i,j}}{\Delta y^2 \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12}\right)}$$

et l'équation de Laplace s'écrit donc :

$$\frac{\delta_x^2 T_{i,j}}{\Delta x^2 \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12}\right)} + \frac{\delta_y^2 T_{i,j}}{\Delta y^2 \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12}\right)} = 0 \quad \text{et en multipliant par :} \quad \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12}\right) \left(1 + \frac{\delta_y^2}{12}\right)$$

$$\left[\left(1 + \frac{\delta_y^2}{12}\right) \left(\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2}\right) + \left(1 + \frac{\delta_x^2}{12}\right) \left(\frac{\delta_y^2}{\Delta y^2}\right) \right] T_{i,j} = 0$$

$$\implies \left[\frac{\delta_x^2}{\Delta x^2} + \frac{\delta_y^2}{\Delta y^2} + \left(\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{12}\right) \frac{\delta_x^2}{\Delta x^2} \frac{\delta_y^2}{\Delta y^2} \right] T_{i,j} = 0$$

En développant maintenant cette dernière équation :

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} + \left(\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{12}\right) \frac{\delta_x^2}{\Delta x^2} \left(\frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2}\right) = 0$$

Le troisième terme se développe de la façon suivante :

$$C = \left(\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{12 \Delta y^2}\right) \left(\frac{T_{i-1,j-1} - 2T_{i,j-1} + T_{i+1,j-1}}{\Delta x^2} - 2\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i-1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1}}{\Delta x^2}\right)$$

En multipliant par $\frac{12 \Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ et en posant en posant $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ nous aurons :

$$\frac{12}{1+\beta^2} (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}) + \frac{12\beta^2}{1+\beta^2} (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}) + \Delta x^2 C = 0$$

et en réarrangeant et regroupant les mêmes termes, nous aurons finalement :

$$T_{i-1,j-1} + T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j+1} + T_{i+1,j+1} + \frac{2(5-\beta^2)}{1+\beta^2} (T_{i-1,j} + T_{i+1,j}) + \dots$$

$$\dots \frac{2(5\beta^2-1)}{1+\beta^2} (T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) - 20T_{i,j} = 0$$

Approximation des dérivées aux interfaces

La discrétisation par la (MVF) de l'équation de diffusion impose l'estimation de la dérivée aux limites du (v.c). Pour cela, nous pouvons utiliser l'approximation en séries de Taylor de la manière suivante :

$$\phi_E = \phi_e + \frac{\delta x_e}{2} \cdot \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e + \left(\frac{\delta x_e}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_e + \left(\frac{\delta x_e}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_e + O(\delta x_e^4)$$

$$\phi_P = \phi_e - \frac{\delta x_e}{2} \cdot \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e + \left(\frac{\delta x_e}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_e - \left(\frac{\delta x_e}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_e + O(\delta x_e^4)$$

En faisant la soustraction, nous aurons :

$$\phi_E - \phi_P = \delta x_e \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e + O(\delta x_e^3) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} + O(\delta x_e^2)}$$

Cette approximation est souvent appelée *approximation centrée* et elle est précise au second ordre.

De même :

$$\phi_W = \phi_w - \frac{\delta x_w}{2} \cdot \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w + \left(\frac{\delta x_w}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_w - \left(\frac{\delta x_w}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_w + O(\delta x_w^4)$$

$$\phi_P = \phi_w + \frac{\delta x_w}{2} \cdot \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w + \left(\frac{\delta x_w}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_w + \left(\frac{\delta x_w}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_w + O(\delta x_w^4)$$

En faisant la soustraction, nous aurons :

$$\phi_P - \phi_W = \delta x_w \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w + O(\delta x_w^3) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w} + O(\delta x_w^2)}$$

La deuxième manière est de schématiser le profil linéaire puis déduire du graphe la pente de la droite :

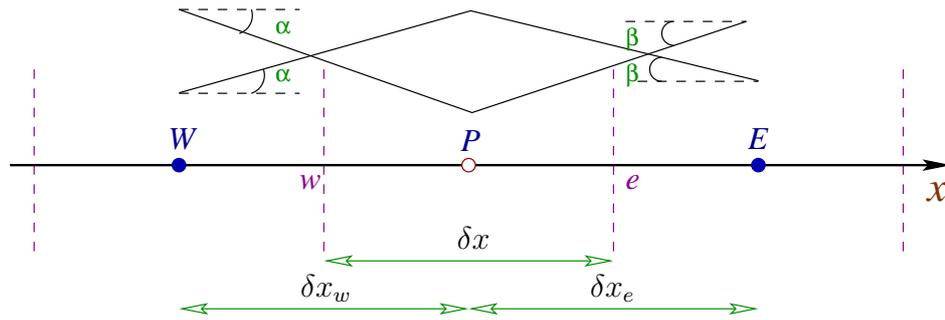


Fig. B.1: *Approximation de la dérivée aux interfaces.*

$$\phi(x) = ax + b \implies \frac{d\phi}{dx} = a = \operatorname{tg}\alpha$$

Quel que soit le profil choisi, nous avons :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w} = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e$$