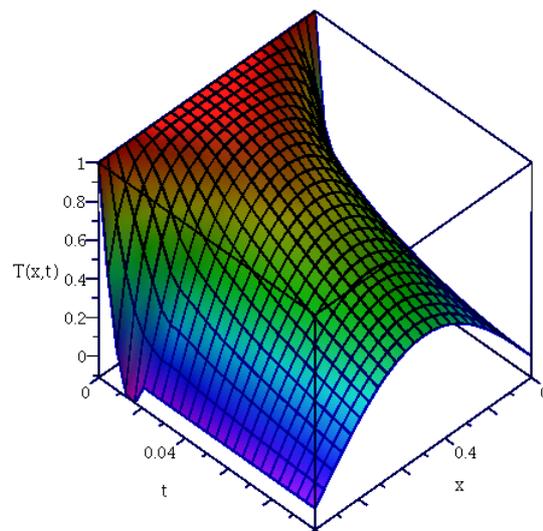


L.MESSAOUDI

METHODES NUMERIQUES APPLIQUEES

Résumé



Maître de Conférences.

Département de Mécanique.

Faculté de Technologie.

Université Mustafa Benboulaïd Batna 2.

Notions sur les équations aux dérivées partielles

1.1 Introduction

Les scientifiques et les ingénieurs utilisent plusieurs techniques pour la résolution des problèmes de champ (diffusion de la chaleur, propagation d'ondes ...etc). Ces techniques peuvent être expérimentales, analytiques ou numériques.

Les méthodes expérimentales sont très chers, prennent beaucoup de temps et dans certains cas, elles sont hasardeuses et même dangereuses. Elles ne permettent pas souvent une grande flexibilité des paramètres de variation.

La plupart des méthodes analytiques ne s'appliquent que dans des cas limités. Pour des problèmes relatifs à des systèmes de forme géométrique complexe ou à des milieux à caractéristiques non uniformes ou non isotropes, qui est le cas de la plupart des problèmes rencontrés en pratique, il est nécessaire de faire appel aux méthodes numériques.

Les problèmes rencontrés dans le domaine des sciences de l'ingénieur sont souvent représentés (ou modélisés) par des équations aux dérivées partielles (EDP) qui modélisent les phénomènes physiques présents (écoulement de fluides, transfert de chaleur, vibration de structures, propagation d'ondes, champ électromagnétique ...etc). Les étapes depuis la modélisation jusqu'à la programmation sont schématisées sur la figure (Fig.1.1).

1.2 Définitions

- Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation faisant intervenir une fonction inconnue de plusieurs variables ainsi que certaines de ses dérivées partielles.

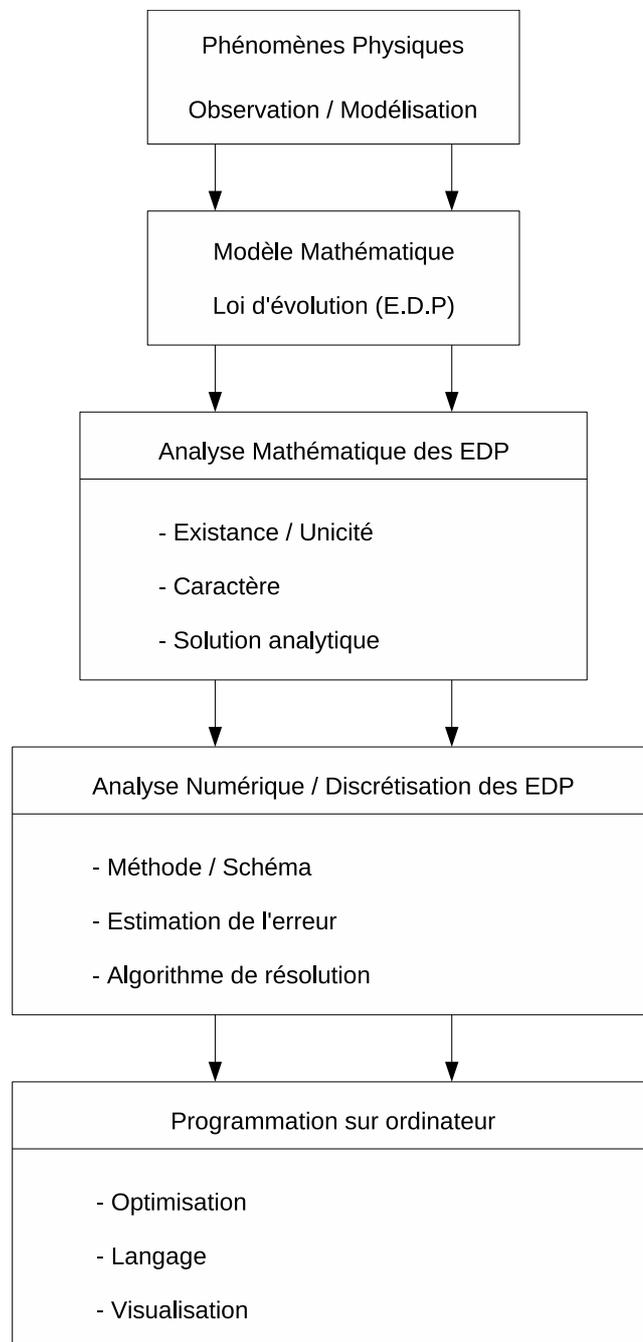


Fig. 1.1: *Étapes de la simulation numérique.*

- Une équation différentielle ordinaire (EDO) contient seulement des dérivées par rapport à une seule variable.
- On appelle *ordre* d'une EDP, l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation.

Exemples :

1. L'équation ci-contre est une EDO du 2^{nd} degré : $\alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = \lambda$.
2. L'équation ci-dessous est une EDP du 2^{nd} degré :

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi = g \quad (1.1)$$

Elle peut aussi s'écrire sous la forme :

$$a \phi_{xx} + b \phi_{xy} + c \phi_{yy} + d \phi_x + e \phi_y + f \phi = g \quad \iff \quad L \phi = g$$

- Une EDP est *linéaire* si l'équation est linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue (c-à-d qu'il n'existe pas de produit des variables dépendantes et/ou produit de ses dérivées).
- Une EDP est *non linéaire* si l'équation contient un produit des variables dépendantes et/ou un produit de ses dérivées.

Exemples :

- 1- L'équation ci-dessous est une EDP linéaire du second degré.

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} k_1 x^2 \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} + k_2 x \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} - k_3 \phi(x,t) = 0$$

- 2- L'équation ci-dessous est une EDP non linéaire du premier degré.

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + \phi(x,t) \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = g(x,t)$$

- On appelle *problème aux limites* une EDP munie de conditions aux limites (C.L) sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée.
- Un problème est *bien posé* si pour toute donnée (second membre, domaine, données aux bords, ...), il admet une solution unique et si cette solution dépend continûment de la donnée.

1.3 Classification des EDP

Considérons les équations aux dérivées partielles du second degré de type (1.1). Leur classification se fait de la manière suivante :

L'EDP est *elliptique* si : $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

L'EDP est *parabolique* si : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

L'EDP est *hyperbolique* si : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Les termes elliptique, parabolique et hyperbolique sont dérivés de l'équation quadratique :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

qui représente une hyperbole, une parabole ou une ellipse selon la valeur de Δ .

Exemples :

— Equation d'onde : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$a = c^2, b = 0, c = -1 \Rightarrow \Delta = 4c^2$ donc c'est une EDP de type hyperbolique.

— Equation de diffusion (chaleur) : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$a = 1, b = 0, c = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ donc c'est une EDP de type parabolique.

— L'équation : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = f$

$a = 1, b = 0, c = 1 \Rightarrow \Delta = -4$ donc c'est une EDP de type elliptique.

- L'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans ce cas u est dite *harmonique*.

- L'équation de Poisson : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$

— Equation de Tricomi : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$a = 1, b = 0, c = x \Rightarrow \Delta = -4x$ donc c'est une EDP de type *mixte*. Elle est elliptique si $x > 0$ et hyperbolique si $x < 0$.

1.3.1 Caractéristiques des EDP

— Les EDP elliptiques sont associées avec des phénomènes stationnaires. Elles modélisent souvent un problème *intérieur (fermé)* (Fig.1.2) et alors la solution est souvent bornée (exp : les équations de Laplace et de Poisson).



Fig. 1.2: **Domaine d'étude pour les problèmes elliptiques.**

— Les EDP hyperboliques apparaissent dans les problèmes de propagation. La solution est souvent *ouverte* et elle avance alors indéfiniment vers l'extérieur à partir d'une condition initiale satisfaisant toujours les conditions aux limites (C.L) spécifiées (Fig.1.3).

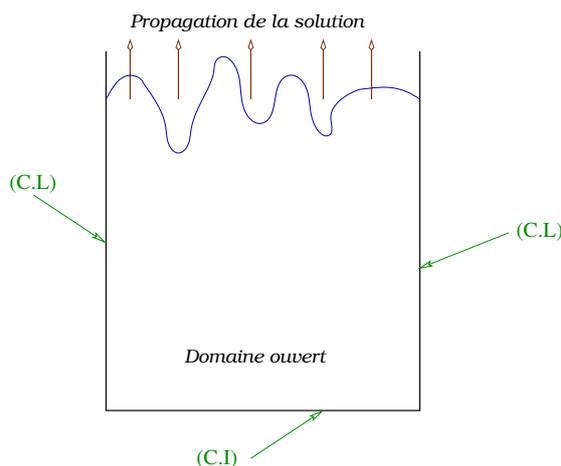


Fig. 1.3: *Domaine d'étude pour les problèmes paraboliques et hyperboliques.*

- Les EDP paraboliques sont généralement associées avec des problèmes dans lesquels la quantité qui nous intéresse varie lentement comparée aux mouvements aléatoires qui produisent les variations. Comme l'EDP hyperbolique, le domaine de la solution de l'EDP parabolique est souvent ouvert. Les conditions initiale (C.I) et limites (C.L) typiquement associées avec cette équation ressemblent à ceux des problèmes hyperboliques à l'exception de la seule condition initiale à $t = 0$ nécessaire puisque l'équation est du 1^{er} ordre en temps. Aussi, les équations paraboliques et hyperboliques sont résolues par des techniques similaires alors que l'équation elliptique est souvent plus difficile et requiert des techniques différentes.

1.4 Différents types de conditions aux limites (C.L)

1.4.1 Conditions de Dirichlet (ou 1^{er} type)

Dans ce cas, la valeur de la variable dépendante est spécifiée le long de la frontière du domaine.

$$\phi(r) = 0, \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition homogène.}$$

$$\phi(r) = p(r), \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition non homogène.}$$

r étant la variable indiquant la position et S la frontière du domaine.

1.4.2 Conditions de Neumann (ou 2^{ème} type)

Dans ce cas, le gradient normal de la variable dépendante est spécifié le long de la frontière du domaine.

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} = 0, \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition homogène.}$$

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} = q(r), \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition non homogène.}$$

$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n}$ étant la dérivée normale de ϕ le long de la frontière S du domaine.

1.4.3 Conditions mixtes (ou 3^{ème} type)

Dans ce cas, une combinaison des deux C.L précédentes spécifiée le long de la frontière du domaine.

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} + h(r) \phi(r) = 0, \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition homogène.}$$

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} + h(r) \phi(r) = w(r), \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition non homogène.}$$

1.5 Exercices

1-01 : Classifier les EDP suivantes (parabolique, hyperbolique ou elliptique) :

1. $\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.
2. $(1 - M) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ (étudier en fonction de M).
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
4. $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$.

1-02 : Classifier les EDP suivantes :

1. $4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u = 0$.
2. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)$.
3. $x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$.
4. $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} - 16 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$.

Méthodes des différences finies

2.1 Introduction sur les méthodes numériques

En général, les méthodes numériques donnent une solution approximative avec une précision suffisante pour les problèmes rencontrés en pratique dans les domaines de transferts thermiques, de mécanique des fluides, d'électromagnétisme, ...etc. Parmi ces méthodes, on distingue d'une manière générale :

- Méthode des différences finies (MDF).
- Méthode des éléments finis (MEF).
- Méthode des volumes finis (MVF).
- Méthodes spectrales (MS).

Il existe d'autres méthodes spécifiques à chaque domaine (méthode des lignes, méthode de Monté Carlo, ...etc).

- Les méthodes MDF et MVF sont basées sur une discrétisation du domaine et le remplacement de l'opérateur différentielle par un quotient différentiel.
- La méthode MEF est basée sur la formulation variationnelle.
- La méthode MS est basée sur la recherche d'une solution approchée sous forme d'un développement sur une certaine famille de fonctions (Fourier, polynômes, splines, ...etc). Ces méthodes sont souvent coûteuses mais précises.

2.2 Principe et bases de la MDF

L'objectif de la méthode des différences finies (MDF) est de transformer une *équation continue* valable sur un *domaine continu* (ou *domaine physique*) en un système à N équations à N inconnues associées à un *domaine discret* (ou *domaine de calcul*) appelé maillage.(Fig. 2.1).

L'approximation des dérivées d'une fonction $f(x)$ par différences finies est basée sur le développement en séries de Taylor de cette fonction de la manière suivante :

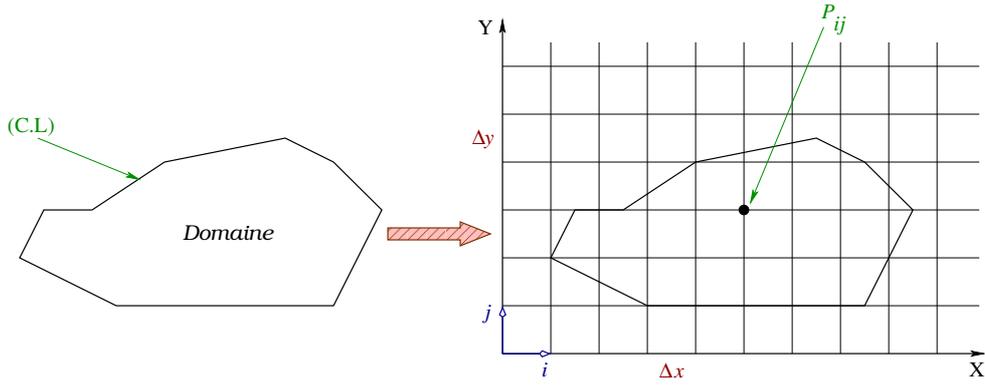


Fig. 2.1: *Passage du domaine continu au domaine discret.*

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots \quad (2.1)$$

$$f(x - h) = f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) - \dots \quad (2.2)$$

$$f(x + 2h) = f(x) + \frac{2h}{1!} f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots \quad (2.3)$$

$$f(x - 2h) = f(x) - \frac{2h}{1!} f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) - \dots \quad (2.4)$$

h étant le “pas” spatial (Δx , Δy ou Δz) ou temporel Δt .

Nous pouvons aussi faire sortir les sommes et les différences des séries :

$$f(x + h) + f(x - h) = 2 f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) + \dots \quad (2.5)$$

$$f(x + h) - f(x - h) = 2 h f'(x) + \frac{h^3}{3} f'''(x) + \dots \quad (2.6)$$

$$f(x + 2h) + f(x - 2h) = 2 f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{3} f^{(4)}(x) + \dots \quad (2.7)$$

$$f(x + 2h) - f(x - 2h) = 4h f'(x) + \frac{8h^3}{3} f'''(x) + \dots \quad (2.8)$$

Notons que les sommes contiennent seulement les dérivées paires par contre, les

différences contiennent seulement les dérivées impaires. Le nombre d'équations impliquées et le nombre de termes à conserver dans chaque équation dépend de la dérivée et du degré de précision désiré.

L'équation (2.6) nous donne :

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) + \dots$$

Ou encore :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (2.9)$$

qui est une approximation centrée du second ordre. $O(h^2)$ est appelée *Erreur de troncature* en h^2 .

Similairement, l'équation (2.5) nous donne :

$$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x) + \dots$$

ou encore :

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (2.10)$$

Nous pouvons aussi obtenir de la même manière et en utilisant les équations (2.1)-(2.8) les dérivées $f'''(x)$ et $f^{(4)}(x)$ comme il est indiqué dans les tableaux (Tab.2.1-2.5).

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2h f'(x)$		-1	0	+1	
$h^2 f''(x)$		+1	-2	+1	
$2h^3 f'''(x)$	-1	2	0	-2	+1
$h^4 f^{(4)}(x)$	+1	-4	+6	-4	+1

Tab. 2.1: **Approximation centrée en $O(h^2)$.**

L'équation (2.1) nous donne :

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) + \dots$$

Ou encore :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (2.11)$$

qui est une approximation décentrée avant du 1^{er} ordre.

De même, l'équation (2.2) nous donne l'approximation décentrée arrière du 1^{er} ordre :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad (2.12)$$

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$h f'(x)$	-1	+1			
$h^2 f''(x)$	+1	-2	+1		
$h^3 f'''(x)$	-1	+3	-3	+1	
$h^4 f^{(4)}(x)$	+1	-4	+6	-4	+1

Tab. 2.2: *Approximation décentrée avant du 1^{er} ordre $O(h)$.*

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$h f'(x)$				-1	+1
$h^2 f''(x)$			+1	-2	+1
$h^3 f'''(x)$		-1	+3	-3	+1
$h^4 f^{(4)}(x)$	+1	-4	+6	-4	+1

Tab. 2.3: *Approximation décentrée arrière du 1^{er} ordre $O(h)$.*

Ces approximations pouvant être utilisées par exemple aux limites du domaine où l'approximation centrée ne peut être appliquée. Les approximations décentrées du 2nd ordre sont données dans les tableaux (Tab.2.4 & 2.5) :

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$
$2h f'(x)$	-3	+4	-1			
$h^2 f''(x)$	+2	-5	+4	-1		
$2h^3 f'''(x)$	-5	+18	-24	+14	-3	
$h^4 f^{(4)}(x)$	+3	-14	+26	-24	+11	-2

Tab. 2.4: *Approximation décentrée avant du 2nd ordre $O(h^2)$.*

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2h f'(x)$				+1	-4	+3
$h^2 f''(x)$			-1	+4	-5	+2
$2h^3 f'''(x)$		+3	-14	+24	-18	+5
$h^4 f^{(4)}(x)$	-2	+11	-24	+26	-14	+3

Tab. 2.5: *Approximation décentrée arrière du 2nd ordre $O(h^2)$.*

Recommandations :

— Utiliser une double précision dans les calculs.

— Utiliser le 2nd ordre $O(h^2)$ ou plus.

Exemples :

1- La courbe (Fig.2.2) nous montre l'effet du nombre de termes à considérer durant l'approximation de la fonction e^x par les séries de Taylor.

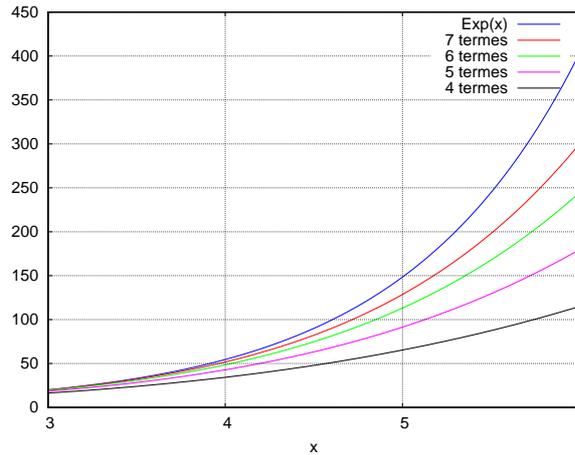


Fig. 2.2: *Approximation par séries de Taylor de la fonction e^x .*

2- Soit à calculer la dérivée seconde de la fonction $f(x) = e^{-x}$ au point $x = 1$.

— Avec 6 décimales : $f(1) = 0.367879$

h	$f(x+h)$	$f(x-h)$	$f''(x)$
0.64	0.193980	0.697676	0.380611
0.32	0.267135	0.506617	0.371038
0.16	0.313486	0.431711	0.368699
0.08	0.339596	0.398519	0.368214
0.04	0.353455	0.382893	0.368480
0.02	0.360595	0.375311	0.370098
0.01	0.364219	0.371577	0.376706
0.005	0.366045	0.369723	0.403174
0.0025	0.366961	0.368800	0.509054
0.00125	0.367420	0.368340	0.932579
0.001	0.367512	0.368248	1.250222

Tab. 2.6: *Influence négative de la simple précision.*

— Avec 9 décimales : $f(1) = 0.367879441$

h	$f(x+h)$	$f(x-h)$	$f''(x)$
0.64	0.193980042	0.697676326	0.380609097
0.32	0.267135302	0.506616992	0.371029414
0.16	0.313486181	0.431710523	0.368664921
0.08	0.339595526	0.398519041	0.368075685
0.04	0.353454682	0.382892886	0.367928494
0.02	0.360594940	0.375311099	0.367891704
0.01	0.364218980	0.371576691	0.367882507
0.005	0.366044635	0.369723445	0.367880208
0.0025	0.366960891	0.368800290	0.367879633
0.00125	0.367419879	0.368339578	0.367879489
0.001	0.367511746	0.368247505	0.367879472

Tab. 2.7: *Influence positive de la double précision.*

Nous remarquons, d'après ces deux tests, l'effet néfaste du choix de la simple précision par rapport à la double précision qui converge bien vers la solution exacte quand le pas h diminue.

3- Soit à calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \ln(x)$ au point $x = 1$. Prenons $h = 0.1$ et comparons les approximations centrée et décentrée.

Approximation	$f'(1)$	erreur relative (%)
Centrée	1.003353477	0.34
Décentrée avant	0.953101798	4.69
Décentrée arrière	1.053605157	5.36

Tab. 2.8: *Influence de l'approximation.*

Nous remarquons que l'approximation centrée est plus précise que celles décentrées et que les erreurs calculées sont proches de celles prévues par la théorie :

— Pour les approximations décentrées : $E = \left| \frac{h}{2} f''(1) \right| = \left| \frac{0.1}{2} \cdot (-1) \right| = 0.05$.

— Pour l'approximation centrée : $E = \left| \frac{h^2}{6} f'''(1) \right| = \frac{(0.1)^2}{6} \cdot 2 = 0.00333$.

2.3 Schémas de discrétisation

Avant de remplacer les dérivées partielles par les différences finies, il faut d'abord choisir l'un des schémas de discrétisation suivants (Fig.2.3) :

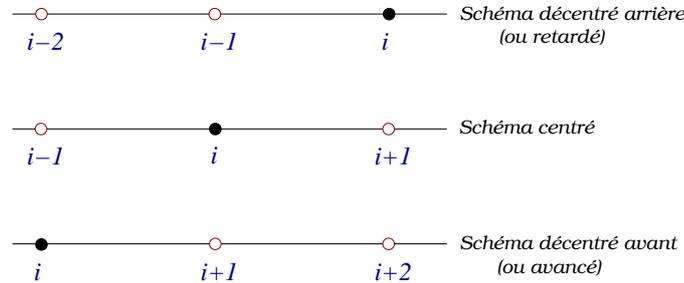


Fig. 2.3: *Différents types de schémas de discrétisation.*

2.4 Notions de stabilité, consistance et convergence

2.4.1 Stabilité

La notion de stabilité est relative à la solution de l'équation aux différences, on dira que le schéma est stable si, quelque soient Δx et Δy (du même ordre), la solution du problème discrétisé reste bornée quand Δt tends vers 0.

Pour étudier la stabilité, on utilise souvent l'analyse de *Von-Neumann* qui consiste à étudier toute solution de la forme : $\psi(t) e^{j\beta x}$ ($j^2 = -1$).

Si on substitue cette forme dans l'équation aux différences on obtient une relation entre $\psi(t)$ et $\psi(t + \Delta t)$.

Théorème : Le schéma est stable (condition suffisante) si le facteur d'amplification ξ vérifie :

$$\left| \xi = \frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} \right| \leq 1 \quad (2.13)$$

Remarque : L'analyse de la stabilité par *Von-Neumann* est valable uniquement pour les problèmes linéaires à coefficient constants car ce sont les seuls problèmes pour lesquels nous pouvons avoir une solution analytique. D'autres méthodes existent pour l'analyse de la stabilité (*matricielle, perturbation discrète*).

2.4.2 Consistance

Le terme de consistance appliqué à une certaine procédure de construction de schémas aux différences signifie que cette procédure approche la solution de l'EDP considérée et non la solution d'une autre EDP. La qualité de cette consistance s'appelle la

précision du schéma.

Théorème : Soient les opérateurs \mathcal{D} discret et \mathcal{L} continu et soit ε un paramètre aussi petit que l'on veut.

Si $|Df - \mathcal{L}f| \leq \varepsilon$ quand Δx et $\Delta t \rightarrow 0$ alors la méthode est consistante.

2.4.3 Convergence

Le schéma est convergent si la solution du problème discrétisé tend vers la solution du problème aux dérivées partielles, lorsque Δx et Δy tendent simultanément vers 0.

Théorème de Lax : Pour une EDP linéaire, si le critère de consistance est vérifié, une condition nécessaire et suffisante de convergence et que le schéma soit stable.

2.5 Méthodes de discrétisation

2.5.1 Méthode explicite

L'équation explicite est obtenue en écrivant le terme spatial à l'instant n où la solution est connue. L'inconvénient principal de cette méthode (Fig.2.4) est qu'elle nécessite de choisir un pas de temps Δt suffisamment petit, sinon la solution de l'équation discrétisée devient instable.

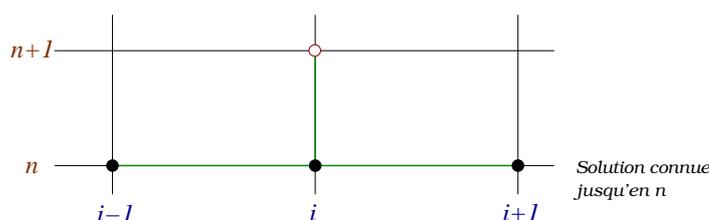


Fig. 2.4: *Schéma explicite.*

Exemple : La discrétisation de l'équation de la chaleur selon la méthode explicite d'Euler nous donne :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.14)$$

- Cette méthode converge pour $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \in]0, \frac{1}{2}]$ avec une erreur de discrétisation en $O(\Delta t + \Delta x^2)$.
- Pour $\lambda = \frac{1}{6}$, on démontre que l'erreur est en $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$.

- A cause de ce risque d'instabilité, il est préférable, lorsque cela est possible, d'utiliser l'une des méthodes implicites.

Il existe aussi d'autres méthodes de discrétisations explicites telles que celles de *Saul'Yev*, *Dufort-Frankel* et *Barakat et Clark ...etc.*

2.5.2 Méthode implicite

On obtient une équation implicite en écrivant le terme spatial à l'instant $(n + 1)$ où la solution n'est pas connue (Fig.2.5).

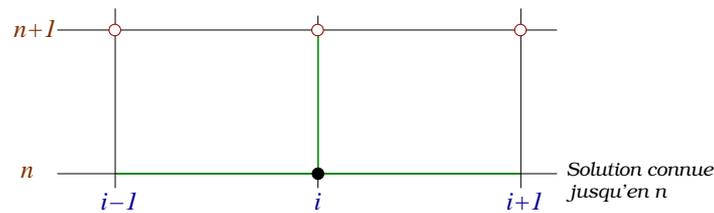


Fig. 2.5: *Schéma implicite.*

Exemple :

La discrétisation de l'équation de la chaleur selon la méthode implicite d'Euler donne :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (2.15)$$

Un avantage essentiel de cette méthode est qu'elle est universellement stable. La seule limitation sur Δt est celle qui maintient les erreurs de troncature dans des limites acceptables.

Cette méthode converge quelque soit $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = C^{te}$.

Il existe aussi la méthode implicite de *Leasonen* en $O(\Delta t + \Delta x^2)$ et qui est *inconditionnellement stable*.

2.5.3 Méthode de Crank-Nicholson

Elle consiste à écrire le second membre de l'équation discrétisée comme la demi-somme des seconds membres des méthodes implicite et explicite.

- **Exemple :** La discrétisation de l'équation de la chaleur donne :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] \quad (2.16)$$

Le premier crochet de l'équation étant connu, on voit que ce schéma est en fait un schéma implicite. L'avantage principal de cette équation est que pour une valeur donnée de Δx , l'erreur de troncature sur le terme en Δt est nettement plus petite que dans les méthodes implicite et explicite. Elle exprime en effet la dérivée par rapport au temps t à l'aide de différences centrées de pas $\frac{\Delta t}{2}$ au lieu de la faire à l'aide de différences à droite ou à gauche de pas Δt (Fig.2.6).

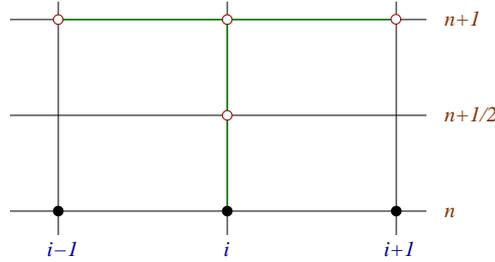


Fig. 2.6: *Schéma de Crank-Nicholson.*

- Cette méthode converge avec une erreur de discrétisation en $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$.
- Pour $\lambda = \frac{1}{\sqrt{20}}$, on démontre que l'erreur est en $O(\Delta x^6)$.
- Ce schéma est *inconditionnellement stable*.

Une forme plus générale de l'équation (2.16) s'écrit :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = (1 - \theta) \left[\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right] + \theta \left[\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] \quad (2.17)$$

avec $0 \leq \theta \leq 1$. Cette méthode est complètement explicite pour $\theta = 0$ et partiellement implicite pour $0 < \theta < 1$. Pour $\theta = 1$, elle devient complètement implicite et pour $\theta = 1/2$, on obtient la méthode de Crank-Nicholson qui présente en générale des solutions raisonnablement stables et précises.

2.6 Application de la méthode explicite à l'équation de diffusion

L'équation de la chaleur discrétisée avec le schéma explicite d'Euler (2.14) peut se mettre sous la forme :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) T_i^n + \lambda T_{i+1}^n \quad (2.18)$$

Etudions maintenant la consistance et la stabilité de ce schéma :

2.6.1 Consistance

Les approximations des dérivées première et seconde sont :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$f = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Appliquons les opérateurs discret \mathcal{D} et continu \mathcal{L} à l'équation f :

$$|Df - \mathcal{L}f| = \left| \left[\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) - \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \right] - \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \right|$$

$$|Df - \mathcal{L}f| = |O(\Delta t) + O(\Delta x^2)| = O(\Delta t + \Delta x^2)$$

Si $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$ alors $O(\Delta t + \Delta x^2) \rightarrow 0 \implies$ le schéma est consistant avec l'EDP.

2.6.2 Stabilité

Pour étudier la stabilité, utilisons l'analyse de *Von-Neumann* :

On suppose que la solution est de la forme : $T(x, t) = \psi(t) e^{j\beta x}$, on a alors :

$$T_i^n = \psi(t) e^{j\beta x} \quad T_{i-1}^n = \psi(t) e^{j\beta(x-\Delta x)}$$

$$T_i^{n+1} = \psi(t + \Delta t) e^{j\beta x} \quad T_{i+1}^n = \psi(t) e^{j\beta(x+\Delta x)}$$

En remplaçant ces termes dans l'équation (2.18) et en simplifiant par $e^{j\beta x}$, nous aurons :

$$\psi(t + \Delta t) = \lambda \psi(t) e^{-j\beta \Delta x} + (1 - 2\lambda) \psi(t) + \lambda \psi(t) e^{j\beta \Delta x}$$

$$\frac{\psi(t+\Delta t)}{\psi(t)} = \lambda (e^{j\beta \Delta x} + e^{-j\beta \Delta x}) + (1 - 2\lambda) = 2\lambda \cos(\beta \Delta x) + (1 - 2\lambda)$$

D'où le facteur d'amplification :

$$\xi = 1 - 2\lambda (1 - \cos(\beta \Delta x)) \quad (2.19)$$

$$|\xi| \leq 1 \implies -1 \leq \xi \leq +1$$

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda (1 - \cos(\beta \Delta x)) \geq -1 \\ 1 - 2\lambda (1 - \cos(\beta \Delta x)) \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 4\lambda \sin^2(\frac{\beta \Delta x}{2}) \geq -1 \\ 1 - 4\lambda \sin^2(\frac{\beta \Delta x}{2}) \leq 1 \end{cases}$$

Etant donné que $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} > 0$ alors la deuxième équation est toujours vérifiée $\forall \lambda$.

La première équation nous donne la condition :

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

qui est la condition de stabilité de ce schéma. On dira alors qu'il est *conditionnellement stable*.

C'est à ce niveau que se pose la difficulté car le choix du pas de temps est strictement lié au pas d'espace et doit donc obligatoirement satisfaire la condition : $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2}$.

2.7 Application de la méthode implicite à l'équation de diffusion

L'équation de la chaleur discrétisée avec le schéma implicite d'Euler (2.15) peut se mettre sous la forme :

$$T_i^n = -\lambda T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda) T_i^{n+1} - \lambda T_{i+1}^{n+1} \quad (2.20)$$

Etudions maintenant la consistance et la stabilité de ce schéma :

2.7.1 Consistance

Les approximations des dérivées première et seconde sont :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$f = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Appliquons les opérateurs discret \mathcal{D} et continu \mathcal{L} à l'équation f :

$$|Df - \mathcal{L}f| = \left| \left[\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) - \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \right] - \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \right|$$

$$|Df - \mathcal{L}f| = |O(\Delta t) + O(\Delta x^2)| = O(\Delta t + \Delta x^2)$$

Si $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$ alors $O(\Delta t + \Delta x^2) \rightarrow 0 \implies$ le schéma est consistant avec l'EDP.

2.7.2 Stabilité

Pour étudier la stabilité, utilisons l'analyse de *Von-Neumann* :

On suppose que la solution est de la forme : $T(x, t) = \psi(t) e^{j\beta x}$, on a alors :

$$T_i^n = \psi(t) e^{j\beta x}$$

$$T_{i-1}^{n+1} = \psi(t + \Delta t) e^{j\beta(x-\Delta x)}$$

$$T_i^{n+1} = \psi(t + \Delta t) e^{j\beta x}$$

$$T_{i+1}^{n+1} = \psi(t + \Delta t) e^{j\beta(x+\Delta x)}$$

En remplaçant ces termes dans l'équation (2.20) et en simplifiant par $e^{j\beta x}$, nous aurons :

$$\psi(t) = -\lambda \psi(t + \Delta t) e^{-j\beta \Delta x} + (1 + 2\lambda) \psi(t + \Delta t) - \lambda \psi(t + \Delta t) e^{j\beta \Delta x}$$

$$\psi(t) = -2\lambda \cos(\beta \Delta x) \psi(t + \Delta t) + (1 + 2\lambda) \psi(t + \Delta t)$$

$$\frac{\psi(t)}{\psi(t+\Delta t)} = 1 + 2\lambda (1 - \cos(\beta \Delta x)) = 1 + 4\lambda \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)$$

D'où le facteur d'amplification :

$$\xi = \frac{1}{1 + 4\lambda \sin^2\left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right)} \quad (2.21)$$

$\forall \Delta x$ et $\forall \Delta t$, nous avons toujours $\forall \lambda > 0$: $|\xi| \leq 1$.

On dira alors que ce schéma est *inconditionnellement stable*.

2.8 Formulation matricielle du schéma explicite appliqué à l'équation de diffusion

Reprenons notre problème discrétisé par la méthode explicite (2.18) avec les (C.L) définies dans le problème continu (??) :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) T_i^n + \lambda T_{i+1}^n$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, i_{max}$$

La discrétisation du milieu est faite selon la figure (Fig.2.7) ci-dessous : chaque ligne représente le problème unidimensionnel (1D) au pas temps correspondant.

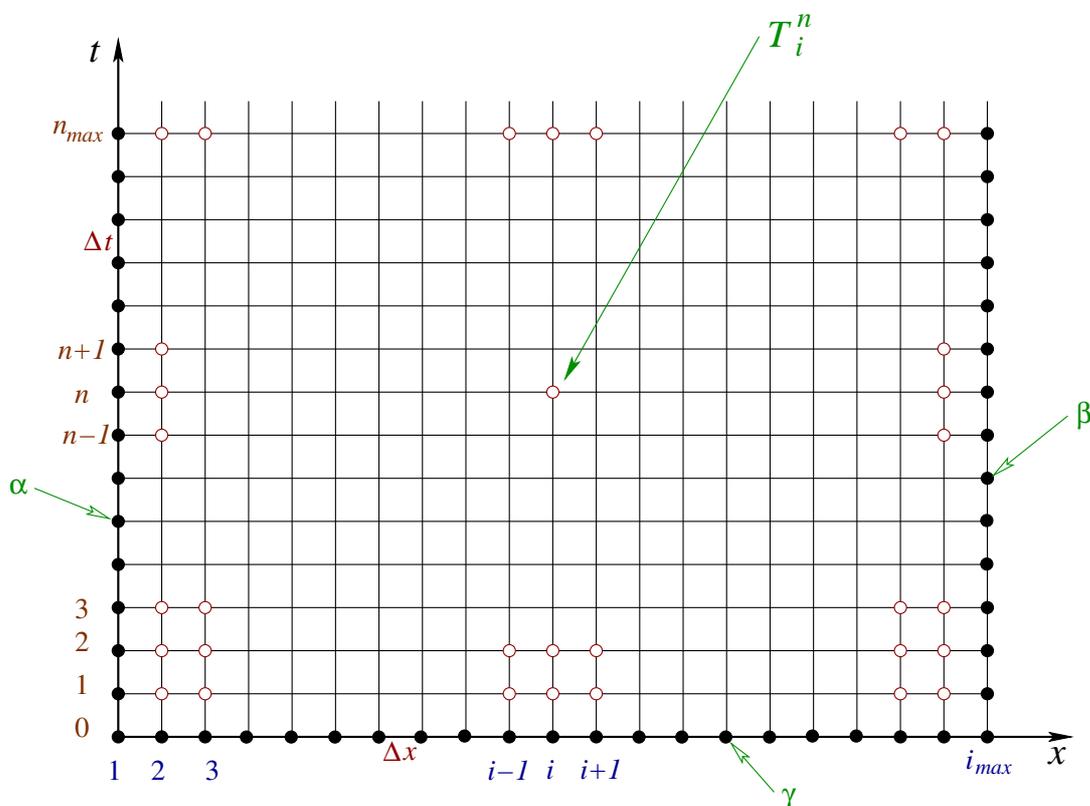


Fig. 2.7: *Discrétisation du domaine pour l'équation de la chaleur.*

Dans ce cas, nous avons l'abscisse et l'ordonnée de chaque nœud :

$$x_i = (i - 1) \Delta x \quad , \quad t^n = n \Delta t$$

- Conditions aux limites (C.L) :

$$\begin{cases} T_1^n = \alpha = 0 \\ T_{i_{max}}^n = \beta = 0 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{max}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma + \lambda\alpha \\ \gamma \\ \vdots \\ \gamma \\ \gamma + \lambda\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \end{bmatrix}^1$$

$$i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1$$

— $n = 1$:

$$T_i^1 = -\lambda T_{i-1}^2 + (1+2\lambda) T_i^2 - \lambda T_{i+1}^2$$

$$T_2^1 = -\lambda T_1^2 + (1+2\lambda) T_2^2 - \lambda T_3^2$$

$$T_3^1 = -\lambda T_2^2 + (1+2\lambda) T_3^2 - \lambda T_4^2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$T_{i_{max}-1}^1 = -\lambda T_{i_{max}-2}^2 + (1+2\lambda) T_{i_{max}-1}^2 - \lambda T_{i_{max}}^2$$

Nous pouvons maintenant passer à la formulation matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_2 + \lambda\alpha \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{i_{max}-2} \\ T_{i_{max}-1} + \lambda\beta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \end{bmatrix}^{n+1} \quad (2.23)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, i_{max} - 1$$

A chaque étape, on résout alors un système de N équations à N inconnues. A part la première et la dernière équations qui contiennent chacune 2 inconnues, toutes les autres équations en contiennent 3. Le système d'équations obtenu est donc dépendant contrairement à celui du cas explicite.

2.10 Exemple résolu par wxMaxima

Il s'agit de déterminer la distribution instantanée de la température à travers une barre de longueur L maintenue à ces extrémités par une température nulle et initialement à la température unité (problème défini par (??)).

Pour simplifier, nous allons prendre les pas de temps et d'espace comme suit :

$$\Delta t = \frac{5}{1000}, \quad \Delta x = \frac{2}{10} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.125$$

Choisissons comme nombre de divisions maximal spatial : $i_{max} = 11$ et temporel : $n_{max} = 15$.

Nous aurons alors la discrétisation suivante (Fig.2.8) du domaine spatio-temporel :

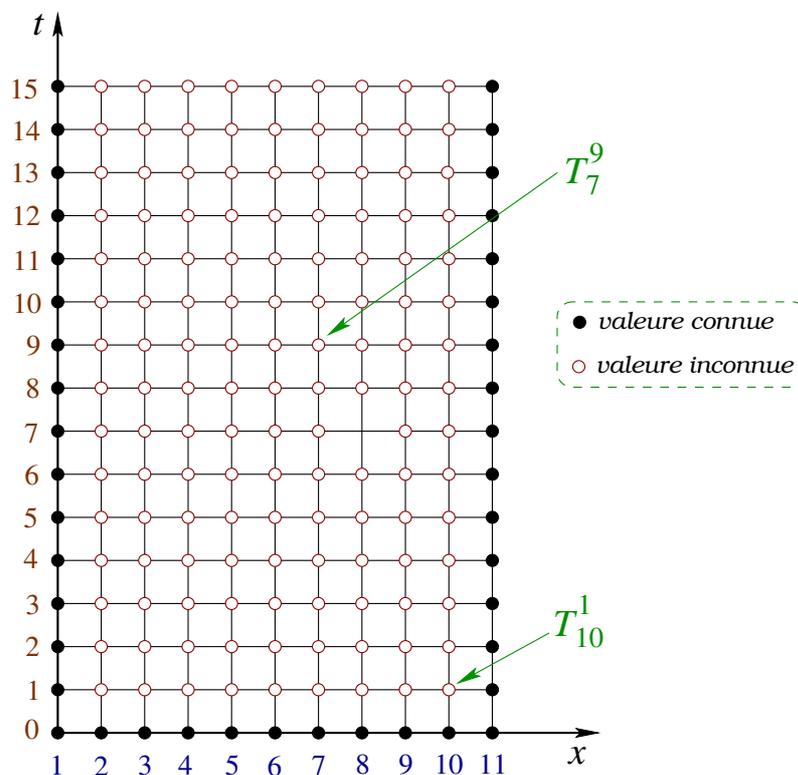


Fig. 2.8: *Discretisation du domaine spatio-temporel.*

Ecrire un programme pour résoudre ce problème et tracer les courbes nécessaires de la distribution de température à travers cette barre.

Ce programme doit être structuré de la manière suivante :

- Initialisation.
- Données.
- Calculs intermédiaires.
- Conditions aux limites et initiale.

- Boucle principale.
- Résultats numériques.
- Tracé des courbes.

Changer les valeurs de Δt et Δx pour voir leurs effets sur la stabilité de la solution.

2.11 Problèmes multidimensionnels

Considérons l'équation de diffusion linéaire bidimensionnelle :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.24)$$

2.11.1 Discrétisation par un schéma explicite

La discrétisation de l'équation (2.24) par un schéma explicite donne :

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right] \quad (2.25)$$

On peut montrer que ce schéma est conditionnellement stable avec la condition :

$$\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (2.26)$$

Si $\Delta x = \Delta y$ alors cette condition de stabilité sera $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4}$ qui est encore plus restrictive que le cas unidimensionnel ($\lambda \leq \frac{1}{2}$), ce qui fait que cette méthode devient moins pratique.

L'équation (2.25) peut être résolue directement pour $T_{i,j}^{n+1}$ et aucune complexité numérique supplémentaire ne sera rajouté à cause du terme supplémentaire. De même pour le cas 3D où on rajoute encore le terme discrétisé correspondant à $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ sans aucun problème d'ordre numérique. Ceci est le cas typique de tous les schémas explicites.

On montre que ce schéma est conditionnellement stable avec la condition :

$$\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (2.27)$$

Si $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ alors cette condition de stabilité sera $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{6}$ qui est encore plus restrictive que le cas bidimensionnel.

2.11.2 Discrétisation par un schéma implicite

La discrétisation de l'équation (2.24) par un schéma implicite donne :

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right] \quad (2.28)$$

Ce schéma est inconditionnellement stable. En appliquant l'équation (2.28) en chaque noeud du maillage, on obtient une matrice bande pentadiagonale (5) qui nécessite beaucoup d'efforts de calcul.

La méthode SOR peut être appliquée pour les problèmes 2D, mais cette approche est assez lourde pour les noeuds 3D. Les méthodes ADI et AFI "Approximation-Factorization-Implicite" peuvent être utilisées pour réduire la matrice bande en deux (ou 3 pour les problèmes 3D) systèmes de matrices tridiagonales qui peuvent être résolus successivement par l'algorithme de Thomas.

2.12 Equation de Laplace

Dans le domaine de l'énergétique, l'équation de Laplace est souvent rencontrée en mécanique des fluides dans les écoulements potentiels (irrotationnels) et en transfert thermique dans la conduction dans un solide par exemple.

Soit par exemple à résoudre un problème régi par l'équation de Laplace et modélisant le transfert thermique à travers une plaque rectangulaire. Cette équation s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.29)$$

Nous passons du domaine continu au domaine discret en divisant le premier en un ensemble de mailles aussi petites que l'on peut (Fig.2.9).

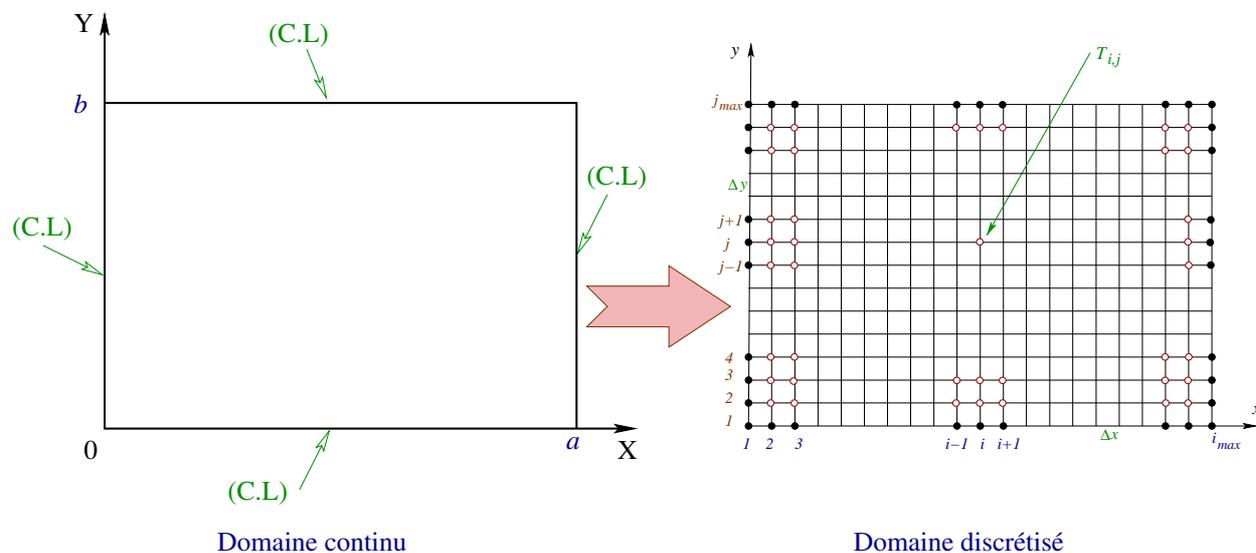


Fig. 2.9: **Discretisation du domaine pour l'équation de Laplace.**

2.12.1 Discrétisation par la formule à 5 points (Runge 1908)

L'équation (2.29) est discrétisée par le schéma centré d'ordre 2 en espace $O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$ de la manière suivante :

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (2.30)$$

On posant : $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ nous pouvons calculer les températures nodales par :

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + \beta^2 (T_{i,j-1} + T_{i,j+1})}{2(1 + \beta^2)} \quad (2.31)$$

L'étude de la consistance de ce schéma s'effectue de la même manière que pour l'équation de diffusion. La convergence sera réalisée quand la différence E_{ij} entre la solution calculée T_{ij} et la solution exacte \bar{T}_{ij} tend vers 0 quand Δx et Δy tendent vers 0 (c-à-d en rendant la maillage de plus en plus fin).

Pour simplifier, on prend souvent $\Delta x = \Delta y$ et donc $\beta = 1$. L'équation (2.31) se réduit à :

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{4} \quad (2.32)$$

La représentation schématique de ce schéma est (Fig.2.10) :

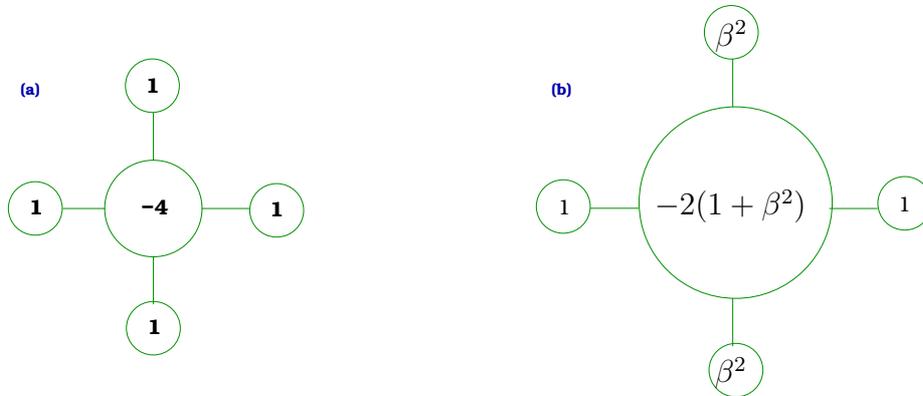


Fig. 2.10: *Représentation schématique de la formulation à 5 points : (a) $\beta = 1$, (b) $\beta \neq 1$.*

Exemple 1 :

Soit à déterminer les températures nodales dans la plaque carrée soumise aux conditions aux limites de Dirichlet indiquées sur la figure (Fig.2.11).

Prenons 4 divisions selon X , d'où un nombre de nœuds : $N_x = 5$.

Prenons 4 divisions selon Y , d'où un nombre de nœuds : $N_y = 5$.

Nombre d'équations du système à résoudre : $N = (N_x - 2) \times (N_y - 2) = 9$.

Puisque $\Delta x = \Delta y$, alors $\beta = 1$ et on applique alors la formule (2.32) à chaque nœud interne du maillage, nous aurons le système de 9 équations à 9 inconnues suivant :

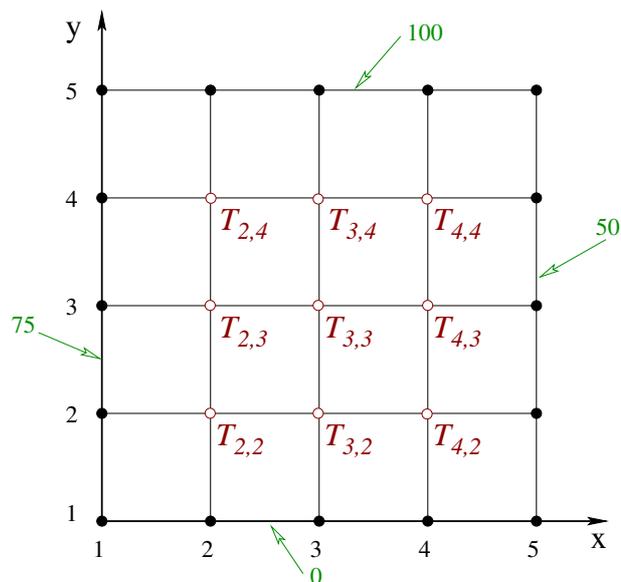


Fig. 2.11: *Equation de Laplace. Exemple 1.*

$$\left\{ \begin{array}{l} -4T_{2,2} + T_{1,2} + T_{3,2} + T_{2,1} + T_{2,3} = 0 \\ -4T_{3,2} + T_{2,2} + T_{4,2} + T_{3,1} + T_{3,3} = 0 \\ -4T_{4,2} + T_{3,2} + T_{5,2} + T_{4,1} + T_{4,3} = 0 \\ -4T_{2,3} + T_{1,3} + T_{3,3} + T_{2,2} + T_{2,4} = 0 \\ -4T_{3,3} + T_{2,3} + T_{4,3} + T_{3,2} + T_{3,4} = 0 \\ -4T_{4,3} + T_{3,3} + T_{5,3} + T_{4,2} + T_{4,4} = 0 \\ -4T_{2,4} + T_{1,4} + T_{3,4} + T_{2,3} + T_{2,5} = 0 \\ -4T_{3,4} + T_{2,4} + T_{4,4} + T_{3,3} + T_{3,5} = 0 \\ -4T_{4,4} + T_{3,4} + T_{5,4} + T_{4,3} + T_{4,5} = 0 \end{array} \right. \text{ avec les (C.L.) : } \left\{ \begin{array}{l} T_{2,1} = T_{3,1} = T_{4,1} = 0 \\ T_{1,2} = T_{1,3} = T_{1,4} = 75 \\ T_{5,2} = T_{5,3} = T_{5,4} = 50 \\ T_{2,5} = T_{3,5} = T_{4,5} = 100 \end{array} \right.$$

La forme matricielle $A.T = B$ de ce système s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \\ T_{4,3} \\ T_{2,4} \\ T_{3,4} \\ T_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75 \\ 0 \\ -50 \\ -75 \\ 0 \\ -50 \\ -175 \\ -100 \\ -150 \end{bmatrix}$$

La solution numérique est déterminée en utilisant le logiciel de calcul *Maple* :

$$T_{2,2} = 42.85, \quad T_{3,2} = 33.26, \quad T_{4,2} = 33.93, \quad T_{2,3} = 63.17, \quad T_{3,3} = 56.25,$$

$$T_{4,3} = 52.45, \quad T_{2,4} = 78.57, \quad T_{3,4} = 76.11, \quad T_{4,4} = 69.64.$$

Exemple 2 :

Ecrire la forme matricielle $A.T = B$ du système à résoudre pour le problème de la figure (Fig.2.11) en utilisant le schéma donné par la relation (2.31) et en supposant les (C.L) inconnues .

En suivant la même démarche que pour l'exemple 1 et en posant $\gamma = -2(1 + \beta^2)$, nous aurons :

$$\begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 1 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^2 & 0 & 0 & \gamma & 1 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 & 1 & \gamma & 1 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 1 & \gamma & 0 & 0 & \beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 1 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \\ T_{4,3} \\ T_{2,4} \\ T_{3,4} \\ T_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{1,2} - \beta^2 T_{2,1} \\ -\beta^2 T_{3,1} \\ -T_{5,2} - \beta^2 T_{4,1} \\ -T_{1,3} \\ 0 \\ -T_{5,3} \\ -T_{1,4} - \beta^2 T_{2,5} \\ -\beta^2 T_{3,5} \\ -T_{5,4} - \beta^2 T_{4,5} \end{bmatrix}$$

La matrice A que nous avons obtenu est dite *matrice bande symétrique*.

Exemple 3 :

Ecrire la forme matricielle $A.T = B$ pour le problème de la figure (Fig.2.12) et en utilisant le schéma donné par la relation (2.31).

En suivant la même démarche que pour l'exemple 1 et en posant $\gamma = -2(1 + \beta^2)$, nous aurons :

$$\begin{bmatrix} \gamma & 1 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^2 & 0 & \gamma & 1 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 1 & \gamma & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 & \gamma & 1 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 1 & \gamma & 0 & \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & \gamma & 1 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 1 & \gamma & 0 & \beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 & 1 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \\ T_{2,4} \\ T_{3,4} \\ T_{2,5} \\ T_{3,5} \\ T_{2,6} \\ T_{3,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{1,2} - \beta^2 T_{2,1} \\ -T_{4,2} - \beta^2 T_{3,1} \\ -T_{1,3} \\ -T_{4,3} \\ -T_{1,4} \\ -T_{4,4} \\ -T_{1,5} \\ -T_{4,5} \\ -T_{1,6} - \beta^2 T_{2,7} \\ -T_{4,6} - \beta^2 T_{3,7} \end{bmatrix}$$

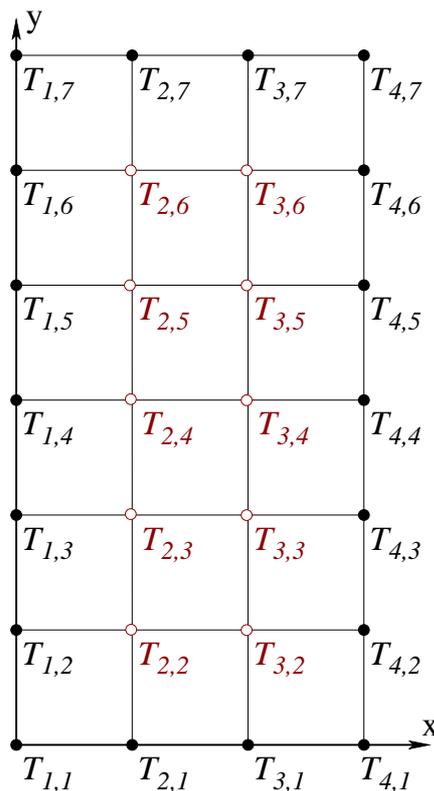


Fig. 2.12: *Equation de Laplace. Exemple 3.*

2.12.2 Conditions limites de Dirichlet variables

Dans ce cas, l'un des cotés de la plaque (ou bien tous) est soumis à une température variable (CLDV) régie par une fonction quelconque (polynomiale, sinusoidale, logarithmique, ...etc).

Exemple 4 :

Reprenons le même exemple 1 de la figure (Fig.2.11) mais en supposant que la température du coté supérieur n'est pas constante et qu'elle est donnée par la relation $T(x) = 2 \cdot 10^4 x^2$. Les dimensions de la plaque étant de $(12 \times 12) \text{ cm}^2$, ce qui nous donne un pas axial $\Delta x = 3 \text{ cm}$. Dans ce cas les nouvelles (C.L) seront :

$$(C.L) : \begin{cases} T_{2,1} = T_{3,1} = T_{4,1} & = 0 \\ T_{1,2} = T_{1,3} = T_{1,4} & = 75 \\ T_{5,2} = T_{5,3} = T_{5,4} & = 50 \\ T_{2,5} = 18, T_{3,5} = 72, T_{4,5} & = 162 \end{cases}$$

avec la (CLDV) calculée comme suit :

$$T_{i,5} = T(x_i) = 2.10^4 x_i^2 \quad \text{où} \quad x_i = (i - 1) \Delta x \quad \text{avec} \quad (i = 2, 3, 4)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} T_{2,5} = 2.10^4 \Delta x^2 = 2.10^4 (3.10^{-2})^2 & = 18 \\ T_{3,5} = 2.10^4 (2 \Delta x^2)^2 = 2.10^4 (6.10^{-2})^2 & = 72 \\ T_{4,5} = 2.10^4 (3 \Delta x^2)^2 = 2.10^4 (9.10^{-2})^2 & = 162 \end{cases}$$

et la nouvelle forme matricielle de ce problème s'écrira :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \\ T_{4,3} \\ T_{2,4} \\ T_{3,4} \\ T_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75 \\ 0 \\ -50 \\ -75 \\ 0 \\ -50 \\ -93 \\ -72 \\ -212 \end{bmatrix}$$

2.12.3 Méthodes de résolution

Les méthodes utilisées pour la résolution de ce genre de systèmes sont les méthodes *directes* et *indirectes* (ou *itératives*).

- **Méthodes directes** : Elimination de Gauss, Algorithme de Thomas, Cholesky, ...etc. Ces méthodes consomment beaucoup de temps, les erreurs d'arrondi augmentent avec la taille du système et deviennent catastrophiques !. Elles souffrent beaucoup du problème de stockage des éléments nuls qui occupent inutilement la mémoire, elle conviennent donc pour les systèmes de faible taille.
- **Méthodes itératives** : Jacobi, Gauss-Siedel, SOR, ADI, ...etc. Dans ces méthodes, les erreurs d'arrondi sont corrigées à chaque itération et elles utilisent uniquement les éléments non nuls donc pas de problème de mémoire et de ce fait conviennent bien aux systèmes larges. Les méthodes recommandées sont dans l'ordre : SOR et ADI en premier, Gauss-Siedel en second et enfin Jacobi qui converge plus lentement.

Remarques :

- La méthode d'élimination de Gauss nécessite un nombre de multiplication égal à : $N_m = \frac{1}{3} N^3 + N^2 - \frac{1}{3} N$ soit 321 multiplications pour notre exemple où $N = 9$. Si ce chiffre est doublé ($N = 18$) alors $N_m = 2262$.
- Pour un maillage de (5×7) nœuds, c-à-d 15 inconnues, la matrice correspondante

contient 225 éléments dont seulement 59 différents de zéro, soit 26 %.

- Pour un maillage de (9×13) nœuds, c-à-d 77 inconnues, la matrice correspondante contient 5929 éléments dont seulement 169 différents de zéro, soit 2.8 %.

2.12.4 Equation de Poisson

L'équation de Poisson est l'équation *non homogène* de l'équation de Laplace. On la rencontre dans les problèmes de diffusion de la masse, de diffusion de la chaleur (conduction), d'écoulement de fluides incompressibles, ...etc.

Considérons par exemple notre plaque rectangulaire de conductivité thermique k avec une source de chaleur \dot{Q} (résistance par exemple) au milieu. L'EDP représentant ce problème est :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\dot{Q}}{k} \quad (2.33)$$

En discrétisant cette équation par un schéma à 5 points, on aura :

$$2(1 + \beta^2) T_{i,j} = T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + \beta^2 (T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) + \Delta x^2 \left(\frac{\dot{Q}_{i,j}}{k} \right) \quad (2.34)$$

Si $\beta = 1$ c-à-d $\Delta x = \Delta y$ alors (2.34) devient :

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} + \Delta x^2 \left(\frac{\dot{Q}_{i,j}}{k} \right)}{4} \quad (2.35)$$

L'équation de Poisson peut se résoudre de la même manière que l'équation de Laplace et tout ce que nous avons dit pour cette dernière est applicable à l'équation de Poisson.

Exemple :

Soit une plaque rectangulaire ($k = 0.4 \text{ J/cm.s.}^\circ\text{C}$) de 1.5 cm de hauteur de 1 cm de largeur et de faible épaisseur de telle sorte que l'on puisse négliger le transfert de chaleur dans cette direction. La plaque est soumise à une température nulle sur tous ces cotés et chauffée en son milieu par une résistance développant un flux de chaleur de $400 \text{ J/cm}^3.\text{s}$. En utilisant le logiciel Maple et en écrivant un programme avec un maillage de 20×30 , nous obtenons la répartition des isothermes à l'intérieur de la plaque (Fig.2.13).

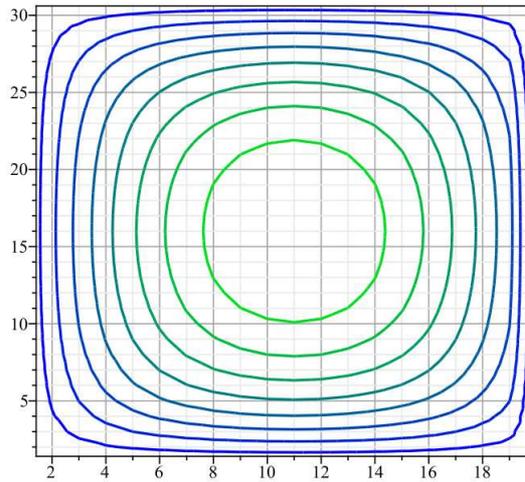


Fig. 2.13: *Résolution de l'équation de Poisson. Répartition des isothermes.*

2.12.5 Méthode d'ordre élevé

Parmi les méthodes d'ordre élevés, on distingue principalement la formulation à 9 points (Annexe ??) précise au second ordre ($O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$) :

$$T_{i-1,j-1} + T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j+1} + T_{i+1,j+1} + \frac{2(5 - \beta^2)}{1 + \beta^2} (T_{i-1,j} + T_{i+1,j}) + \dots$$

$$\dots + \frac{2(5\beta^2 - 1)}{1 + \beta^2} (T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) - 20 T_{i,j} = 0 \quad (2.36)$$

Si $\beta = 1$ c-à-d $\Delta x = \Delta y$ alors (2.36) devient précise au quatrième ordre ($O(\Delta x^4)$) et sa représentation schématique est donné par la figure (Fig.2.14).

$$-20 T_{i,j} + 4(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) + T_{i-1,j-1} + T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j+1} + T_{i+1,j+1} = 0 \quad (2.37)$$

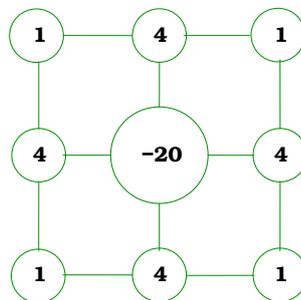


Fig. 2.14: *Représentation schématique de la formulation à 9 points ($\beta = 1$).*

Exemple 1 :

Soit à déterminer la forme matricielle du problème de la figure (Fig.2.15).

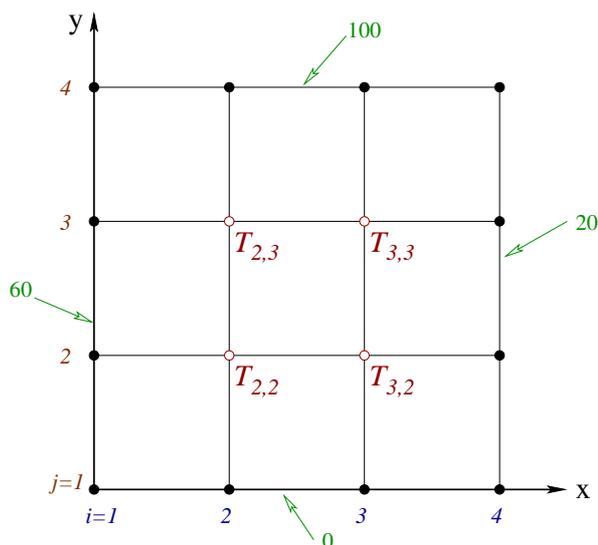


Fig. 2.15: *Formulation à 9 points. Exemple 1.*

Nombre de nœuds selon X : $N_x = 4$.

Nombre de nœuds selon Y : $N_y = 4$.

Nombre d'équations du système à résoudre : $N = (N_x - 2) \times (N_y - 2) = 4$.

En appliquant la formule (2.37) à chaque nœud interne du maillage, nous aurons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -20 T_{2,2} + T_{1,1} + T_{3,1} + T_{1,3} + T_{3,3} + 4 (T_{1,2} + T_{3,2} + T_{2,1} + T_{2,3}) = 0 \\ -20 T_{3,2} + T_{2,1} + T_{4,1} + T_{2,3} + T_{4,3} + 4 (T_{2,2} + T_{4,2} + T_{3,1} + T_{3,3}) = 0 \\ -20 T_{2,3} + T_{1,2} + T_{3,2} + T_{1,4} + T_{3,4} + 4 (T_{1,3} + T_{3,3} + T_{2,2} + T_{2,4}) = 0 \\ -20 T_{3,3} + T_{2,2} + T_{4,2} + T_{2,4} + T_{4,4} + 4 (T_{2,3} + T_{4,3} + T_{3,2} + T_{3,4}) = 0 \end{cases}$$

$$\text{avec les (C.L.) : } \begin{cases} T_{2,1} = T_{3,1} = 0 \\ T_{1,2} = T_{1,3} = 60 \\ T_{4,2} = T_{4,3} = 20 \\ T_{2,4} = T_{3,4} = 100 \end{cases} \quad \text{et aux coins : } \begin{cases} T_{1,1} = 0.5 (0 + 60) = 30 \\ T_{4,1} = 0.5 (0 + 20) = 10 \\ T_{1,4} = 0.5 (60 + 100) = 80 \\ T_{4,4} = 0.5 (100 + 20) = 60 \end{cases}$$

La forme matricielle $A.T = B$ de ce système s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} -20 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -330 \\ -110 \\ -880 \\ -660 \end{bmatrix}$$

La solution numérique est déterminée en utilisant le logiciel de calcul *Maple* :

$$T_{2,2} = 37.14, \quad T_{3,2} = 26.66, \quad T_{2,3} = 63.33, \quad T_{3,3} = 52.86.$$

Exemple 2 :

Déterminer la forme matricielle du problème de la figure (2.11) et comparer les résultats entre les deux schémas.

Exercice :

1. Pour le problème de l'exemple 1, comparer les résultats obtenus avec les schémas à 5 points et à 9 points avec la solution exacte. Dresser un tableau avec les pourcentages relatifs à chaque solution.
2. Comparer les précisions des schémas à 9 points pour $\beta = 1$ et pour $\beta \neq 1$.

2.13 Equation d'onde

L'équation d'onde est rencontrée dans les problèmes d'ingénierie sous deux formes :

— Dans les domaines de vibrations et de champ acoustique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.38)$$

u : amplitude de l'onde ; c : vitesse de propagation de l'onde.

— Dans les domaines de mécanique des fluides et de transferts thermiques :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.39)$$

u : vitesse de convection.

2.13.1 Résolution de l'équation d'onde

La résolution de l'équation (2.38) peut se faire en la transformant en un système d'équations couplées de type (2.39) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Soit le problème mathématique avec ses (C.L) défini par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 & , & u(x, 0) = f(x) \\ u(\pi, t) = 0 & , & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

2.13.1.1 Discrétisation

L'équation (2.41) est discrétisée par exemple par un schéma centré d'ordre 2 en temps et en espace de la manière suivante :

$$\frac{u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

en posant : $\lambda = c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 = C^{te}$, nous aurons l'équation discrétisée suivante :

$$u_i^{n+1} = 2(1 - \lambda) u_i^n + \lambda (u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) - u_i^{n-1} \quad (2.42)$$

C'est un schéma à trois étapes temporelles ($n - 1, n, n + 1$), nous devons donc calculer u_i^{-1} afin d'initialiser la procédure de calcul. Pour cela, utilisons la (C.I) de Neumann et exprimons là par un schéma aux différences centré du 2^{nd} ordre :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2 \Delta t} = g(x_i) \implies u_i^{-1} = u_i^1 - 2 \Delta t g(x_i)$$

Ecrivons maintenant l'équation (2.42) au pas de temps 0 :

$$u_i^1 = 2(1 - \lambda) u_i^0 + \lambda (u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0) - u_i^{-1}$$

En utilisant la (C.I) $u_i^0 = f(x_i)$ et en remplaçant u_i^{-1} par sa valeur, nous aurons :

$$u_i^1 = (1 - \lambda) f(x_i) + \frac{\lambda}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})] + \Delta t g(x_i) \quad (2.43)$$

Maintenant, nous pouvons calculer toutes les valeurs de l'équation (2.42) en utilisant les (C.L) suivantes : $u_1^n = 0$ et $u_{imax}^n = 0$.

2.13.1.2 Stabilité

Pour étudier la stabilité, utilisons l'analyse de *Von-Neumann* :

On suppose que la solution est de la forme : $u(x, t) = \psi(t) e^{j\beta x}$, on a alors :

$$u_i^n = \psi(t) e^{j\beta x} \qquad u_i^{n+1} = \psi(t + \Delta t) e^{j\beta x} \qquad u_i^{n-1} = \psi(t - \Delta t) e^{j\beta x}$$

$$u_{i-1}^n = \psi(t) e^{j\beta(x-\Delta x)} \qquad u_{i+1}^n = \psi(t) e^{j\beta(x+\Delta x)}$$

Le facteur d'amplification ξ est donné par :

$$\xi = \frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = \frac{\psi(t)}{\psi(t - \Delta t)} \quad (2.44)$$

En remplaçant ces termes dans l'équation (2.42) et en simplifiant par $e^{j\beta x}$, nous aurons :

$$\psi(t + \Delta t) = 2(1 - \lambda)\psi(t) + \lambda(e^{-j\beta\Delta x} + e^{j\beta\Delta x})\psi(t) - \psi(t - \Delta t)$$

$$\xi = 2(1 - \lambda) + 2\lambda \cos(\beta\Delta x) - \frac{1}{\xi} \iff \xi^2 - 2[1 - \lambda(1 - \cos(\beta\Delta x))]\xi + 1 = 0$$

$$\xi^2 - 2\left[1 - 2\lambda \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\right]\xi + 1 = 0$$

On posant : $k = 1 - 2\lambda \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)$ nous aurons l'équation :

$$\xi^2 - 2k\xi + 1 = 0 \text{ dont les solutions sont : } \xi_{1,2} = k \pm \sqrt{k^2 - 1}$$

Ce facteur d'amplification devant satisfaire la condition : $|\xi| \leq 1$, nous aurons alors les conditions de stabilité suivante : $\lambda \leq 1$.

2.13.2 Méthodes de résolution

Comme les matrices trouvées pour ce genre de problèmes sont souvent creuses, alors les méthodes de résolution utilisées sont dans l'ordre décroissant :

S.O.R.(meilleur), Gauss-siedel (préférée), Jacobi (plus simple) et enfin celle d'élimination de Gauss.

2.14 Exercices

3-01 : Parmi les schémas ci-dessous, dire lequel est explicite ou implicite :

1. $T_i^{n+1} - T_i^n + \lambda(T_i^n - T_{i-1}^n) = 0$.
2. $T_i^{n+1} - T_i^n + \lambda(T_{i+1}^n - T_{i-1}^{n+1}) = 0$.
3. $T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$.
4. $T_i^{n+1} - 2(1 - \lambda)T_i^n - \lambda(T_{i+1}^n - T_{i-1}^n) + T_i^{n-1} = 0$.
5. $u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_{i-1}^{n+1} = 0$.
6. $2u_{i,j} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 0$.
7. $T_i^{n+1} - T_i^{n-1} + \lambda(T_{i+1}^n - T_{i-1}^n) = 0$.

3-02 : Dans l'équation de la chaleur, discrétiser :

1. Le terme temporel par une approximation décentrée avant d'ordre 2.
2. Le terme temporel par une approximation décentrée arrière d'ordre 1.
3. Le terme temporel par une approximation centrée d'ordre 2.
4. Le terme spatial par une approximation décentrée arrière d'ordre 2.

3-03 : La discrétisation de l'équation d'onde donne :

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

1. Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.
2. Déterminer le facteur d'amplification de ce schéma ($\lambda = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$).

3-04 : Discrétiser l'équation de la chaleur par :

1. Une approximation centrée d'ordre 2 en temps et en espace.
2. Une approximation décentrée avant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.
3. Une approximation décentrée arrière d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.
4. Une approximation centrée d'ordre 2 en temps et décentrée avant d'ordre 1 en espace.

3-05 : Soit le schéma de discrétisation de l'équation de la chaleur :

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\frac{1}{3} (T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) + \frac{2}{3} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) \right]$$

1. Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.
2. Déterminer le facteur d'amplification de ce schéma ($\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).

3-06 : Considérons l'équation de Laplace en deux dimensions.

En discrétisant le terme en x par une approximation décentrée arrière d'ordre 1, le terme en y par une approximation décentrée avant d'ordre 2 et en posant $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, donner le schéma de discrétisation (équation) et dessiner les cellules correspondantes pour β quelconque et pour $\beta = 2$.

3-07 : Considérons l'équation de la chaleur unidimensionnelle.

1. Classer cette EDP en justifiant votre réponse.
2. Cette équation est discrétisée par le schéma de Crank-Nicholson. Ecrire l'équation discrétisée et dire si ce schéma est explicite ou implicite.
3. Déterminer son facteur d'amplification (on posera $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).

3-08 : Considérons l'équation de Laplace appliquée à une plaque rectangulaire.

1. En posant $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, retrouver le schéma à 5 points.
2. Cette plaque est soumise à 100°C en bas, 20°C à gauche, 40°C à droite et 10°C en haut. Elle est discrétisée par 4 divisions selon X et 5 selon Y .
3. Dessiner les cellules correspondantes à ce schéma pour $\beta = 2$.
4. Ecrire les équations nécessaires à la résolution de ce problème.
5. Déterminer la forme matricielle du problème $A.T = B$.

3-09 : La discrétisation l'équation de la chaleur par la méthode de Richardson donne :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

1. Ce schéma est-il implicite ou explicite ? Justifier.
2. Déterminer le facteur d'amplification de ce schéma ($\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).

3. *Etudier sa stabilité.*

Pour rendre ce schéma stable, on utilise le schéma de Dufort-Frankel :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{T_{i-1}^n - (T_i^{n+1} - T_i^{n-1}) + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

1. *Ce schéma est-il implicite ou explicite ?*
2. *Déterminer son facteur d'amplification.*

3-10 : *Discrétiser l'équation d'onde par :*

1. *Une approximation centrée d'ordre 2 en temps et en espace.*
2. *Une approximation décentrée arrière d'ordre 1 en temps et décentrée avant d'ordre 2 en espace.*

3-11 : *Considérons l'équation de Laplace en deux dimensions.*

En discrétisant le terme en x par une approximation décentrée arrière d'ordre 2, le terme en y par une approximation centrée et en posant $\beta = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$, donner le schéma de discrétisation (équation) et dessiner les cellules correspondantes pour $\beta = 1$ et pour $\beta = 2$.

3-12 : *Soit le schéma de discrétisation suivant :*

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = 2 \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

1. *Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.*
2. *Etudier sa stabilité (on posera : $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).*

3-13 : *Considérons l'équation de Laplace en deux dimensions.*

Soit une plaque rectangulaire discrétisée par 3 divisions selon X et 4 selon Y . En appliquant le schéma à 5 points et en posant $\beta = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$, déterminer la forme matricielle du problème $A.T = B$ (les conditions de Dirichlet étant connues).

3-14 : *Soient les deux EDP suivantes :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

1. Discrétiser l'équation de la chaleur par une approximation décentrée arrière d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.
2. Discrétiser l'équation d'onde par une approximation centrée en temps et décentrée avant d'ordre 2 en espace.

3-15 : Soit l'EDP ci-dessous :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

En discrétisant tous les termes par des approximations centrées et en posant $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, donner le schéma de discrétisation (équation) et dessiner les cellules correspondantes pour β et Δx quelconques ainsi que pour $\beta = 1$ et $\Delta x = 1$.

Cette équation est appliquée à une plaque rectangulaire soumise à 100°C en bas, 20°C à gauche, 40°C à droite et 10°C en haut. Cette plaque est discrétisée par 5 divisions selon X et 3 selon Y .

- Ecrire les équations nécessaires à la résolution de ce problème ($\beta = 1$ et $\Delta x = 1$).
- Déterminer la forme matricielle du problème $A.T = B$.

3-16 : Soit l'équation de la chaleur discrétisée par les trois approximations suivantes :

1. $\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0$.
2. $\frac{T_i^n - T_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{T_i^n - 2T_{i+1}^n + T_{i+2}^n}{\Delta x^2} = 0$.
3. $\frac{3T_i^n - 4T_i^{n-1} + T_i^{n-2}}{2\Delta t} + \frac{T_{i-3}^n - 4T_{i-2}^n + 5T_{i-1}^n - 2T_i^n}{\Delta x^2} = 0$.

Donner, pour chaque équation, le type d'approximation choisie pour chaque terme.

3-17 : La discrétisation de l'équation de convection

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

par le schéma de Leapfrog donne :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

1. Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.
2. Quelle est sa précision ? Justifier.
3. Déterminer son facteur d'amplification.

3-18 : Discrétiser l'équation de la chaleur 2D par un schéma explicite centré d'ordre 2 en temps et en espace, ensuite par un schéma implicite décentré arrière d'ordre 1 en temps et décentré avant d'ordre 1 en espace.

3-19 : Soit l'équation de la chaleur 1D définie par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$T(0, t) = \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = \beta, \quad T(x, 0) = \gamma$$

En considérant le schéma explicite d'Euler et en discrétisant la (C.L) par une approximation décentrée arrière d'ordre 1, déterminer la forme matricielle de ce problème.

3-20 : Déterminer la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à une plaque ($N_x = N_y = 4$) en utilisant le schéma à 5 points et en discrétisant la (C.L) de Neumann par une approximation centrée. On donne :

$$T_g = 10^\circ\text{C}, \quad T_d = 30^\circ\text{C}, \quad T_b = 10^\circ\text{C}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_h = 0.$$

3-21 : Déterminer la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à une plaque ($N_x = N_y = 4$) en utilisant le schéma à 9 points et en discrétisant les (C.L) de Neumann par des approximations décentrées d'ordre 1. On donne :

$$T_b = 100^\circ\text{C}, \quad T_h = 40^\circ\text{C}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_g = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_d = 0.$$

3-22 : Discrétiser l'équation de la chaleur 2D par un schéma implicite centré d'ordre 2 en temps et en espace, ensuite par un schéma explicite décentré avant d'ordre 1 en temps et décentré arrière d'ordre 1 en espace.

3-23 : Soit l'équation de la chaleur 1D définie par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|(0, t) = \alpha, \quad T(L, t) = \beta, \quad T(x, 0) = \gamma$$

En considérant le schéma explicite d'Euler et en discrétisant la (C.L) par une approximation décentrée avant d'ordre 1, déterminer la forme matricielle de ce problème.

3-24 : Déterminer la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à une plaque ($N_x = N_y = 4$) en utilisant le schéma à 9 points et en discrétisant les (C.L) de Neumann par des approximations centrées. On donne :

$$T_b = 100^\circ\text{C}, \quad T_h = 40^\circ\text{C}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_g = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_d = 0.$$

3-25 : Soit l'équation de la chaleur 1D définie par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \alpha, \quad T(L, t) = \beta, \quad T(x, 0) = \gamma$$

En considérant le schéma explicite d'Euler et en discrétisant la (C.L) par une approximation décentrée avant d'ordre 2, déterminer la forme matricielle de ce problème.

3-26 : Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque schématisée en dessous en utilisant le schéma à 9 points et en discrétisant la (C.L) de Neumann par :

1. une approximations décentrée d'ordre 1.
2. une approximations décentrée d'ordre 2.
3. une approximations centrée.

On donne :

$$T_1 = 40^\circ\text{C}, \quad T_2 = 20^\circ\text{C}, \quad T_3 = 100^\circ\text{C}, \quad \alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_g = 10^\circ\text{C}/\text{cm}, \quad \Delta x = 0.2 \text{ cm}.$$

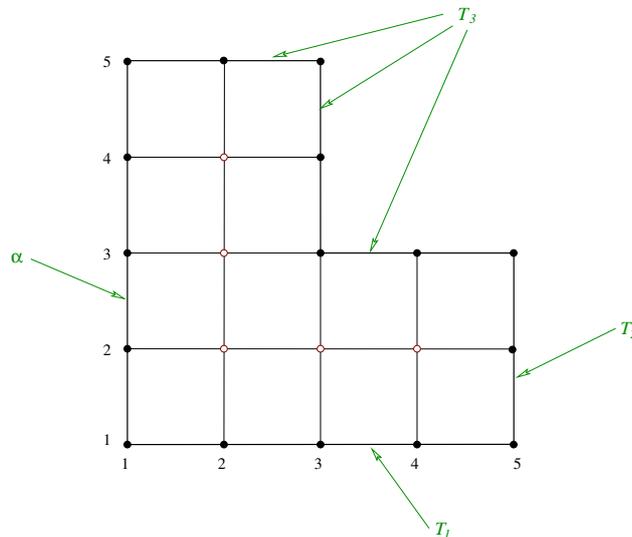


Fig. 2.16: **Exo-3-26.**

3-27 : Déterminer la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à une plaque ($N_x = N_y = 4$) en utilisant le schéma à 5 points et en discrétisant les (C.L) de Neumann par des approximations centrées. On donne :

$$T_b = 100^\circ\text{C}, \quad T_h = 40^\circ\text{C}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_g = 10, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_d = 20, \quad \Delta x = 2.$$

3-28 : Soit l'équation de la chaleur 1D définie par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = \beta, \quad T(x, 0) = \gamma$$

En considérant le schéma explicite d'Euler et en discrétisant les (C.L) par des approximations décentrées d'ordre 1, déterminer la forme matricielle de ce problème.

3-29 : Déterminer la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à une plaque ($N_x = N_y = 4$) en utilisant le schéma à 9 points et en discrétisant les (C.L) de Neumann par des approximations centrées. On donne :

$$T_b = 100^\circ\text{C}, \quad T_h = 40^\circ\text{C}, \quad \frac{\partial T}{\partial x}|_g = 10, \quad \frac{\partial T}{\partial x}|_d = 20, \quad \Delta x = 1.$$

3-30 : Soit l'équation de la chaleur 1D définie par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = \beta, \quad T(x, 0) = \gamma$$

En considérant successivement les schémas implicite et explicite d'Euler et en discrétisant les (C.L) par des approximations décentrées d'ordre 2, déterminer les formes matricielles de ces problèmes.

3-31 : Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque schématisée en dessous en utilisant le schéma à 5 points et en discrétisant la (C.L) de Neumann par une approximations centrée. On donne :

$$T_1 = 40^\circ\text{C}, \quad T_2 = 20^\circ\text{C}, \quad T_3 = 100^\circ\text{C}, \quad \alpha = \frac{\partial T}{\partial x}|_g = 0.$$

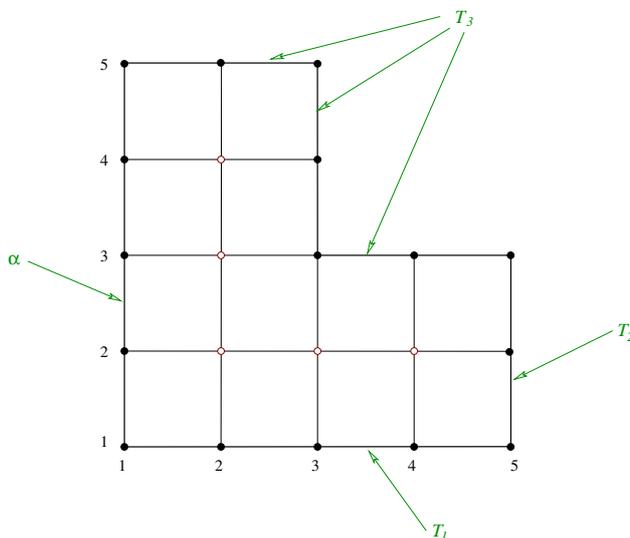


Fig. 2.17: **Exo-3-31**.

3-32 : Soit une barre, de longueur L et de très faible section, soumise aux conditions α et β respectivement à ses extrémités gauche et droite. Ce phénomène est régi par l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - 3 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

1. Classer cette EDP en justifiant votre réponse.
2. Discrétiser le terme temporel par une approximation décentrée avant d'ordre 1 et le terme spatial par une approximation centrée au temps n .
3. En posant $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, écrire l'équation discrétisée et justifier si le schéma obtenu est explicite ou implicite.
4. Etudier la stabilité de ce schéma en utilisant le critère de Von-Neumann.
5. En supposant que α et β sont des conditions de Dirichlet, déterminer la forme matricielle du problème (préciser les bornes pour i et n).
6. En suppose maintenant que α est une condition de Neumann ($\alpha = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}$). En discrétisant cette condition par une approximation décentrée avant d'ordre 1, déterminer la nouvelle forme matricielle du problème (préciser les bornes pour i et n).

3-33 : Soit l'EDP suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial T}{\partial x} + 2 \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

1. Classer cette EDP en justifiant votre réponse.
2. Discrétiser tous les termes par des approximations centrées.
3. En posant $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, écrire l'équation discrétisée.
4. Dessiner les cellules correspondantes pour β et Δx quelconques ainsi que pour $\beta = 2$ et $\Delta x = 1/2$.
5. Cette équation est appliquée à une plaque rectangulaire soumise à 100°C en bas, 20°C à gauche, 40°C à droite et 10°C en haut. En discrétisant cette plaque par 4 divisions selon X et 3 selon Y :
 - (a) Ecrire les équations nécessaires à la résolution de ce problème ($\beta = 2$ et $\Delta x = 1/2$).
 - (b) Déterminer la forme matricielle du problème $A.T = B$.
6. En suppose maintenant une condition de Neumann ($\alpha = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_g = 10$). En discrétisant cette condition par une approximation centrée, déterminer la nouvelle forme matricielle du problème.

3-34 : Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque schématisée en dessous en utilisant le schéma à 5 points et en discrétisant les (C.L) de Neumann par une approximations décentrées d'ordre 1. On donne :

$$T_1 = 100^\circ\text{C}, \quad T_2 = 20^\circ\text{C}, \quad T_3 = 10^\circ\text{C}, \quad T_4 = 40^\circ\text{C},$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_d = 2y + 10 \text{ }^\circ\text{C/cm}, \quad \beta = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_h = 3x + 10 \text{ }^\circ\text{C/cm}, \quad \Delta x = 2 \text{ cm}, \quad \Delta y = 2 \text{ cm}.$$

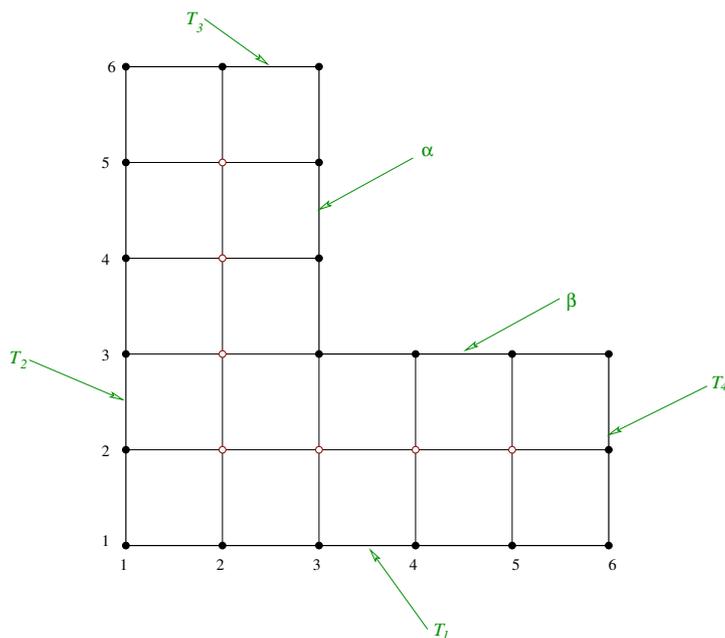


Fig. 2.18: **Exo-3-34**.

3-35 : Même exercice que **3-34** mais avec le schéma à 9 points au lieu du schéma à 5 points.

3-36 : En appliquant le schéma de discrétisation à 5 points à l'équation de Laplace pour la plaque schématisée ci-dessous, déterminer la matrice A et le vecteur B du système obtenu : $A.T = B$.

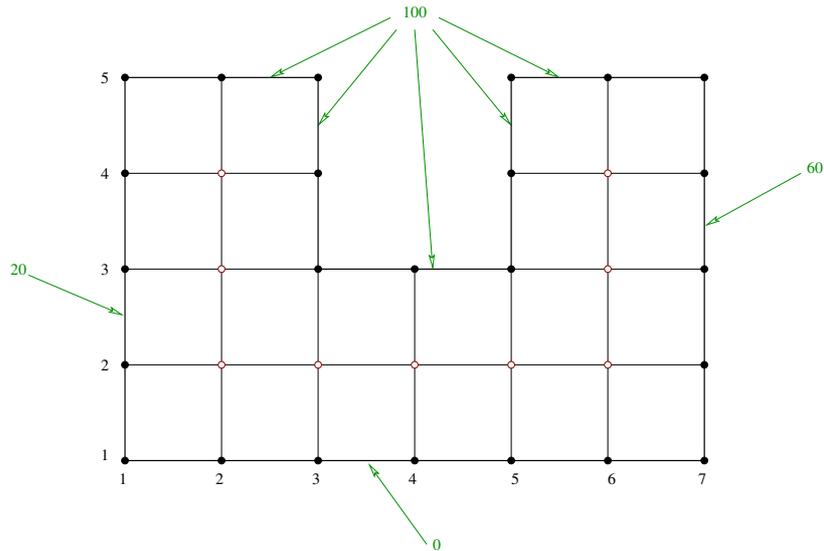


Fig. 2.19: **Exo-3-36.**

3-37 : En appliquant le schéma de discrétisation à 5 points à l'équation de Laplace pour la plaque schématisée ci-dessous, déterminer la matrice A et le vecteur B du système obtenu : $A.T = B$.

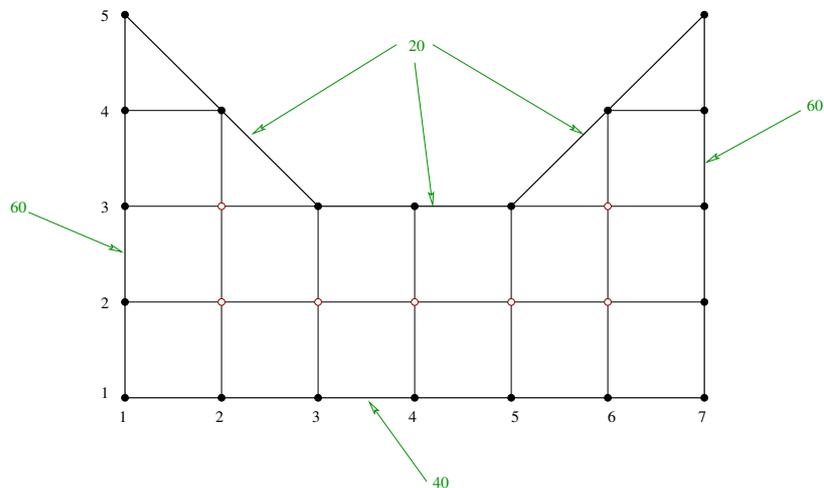


Fig. 2.20: **Exo-3-37.**

3-38 : Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque schématisée en dessous en utilisant le schéma à 5 points et en discrétisant les (C.L) de Neumann par une approximations décentrées d'ordre 1. On donne :

$$T_1 = 10^\circ\text{C}, \quad T_2 = 50^\circ\text{C}, \quad T_3 = 30^\circ\text{C}, \quad T_4 = 100^\circ\text{C},$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_d = 5^\circ\text{C}/\text{cm}, \quad \beta = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_h = 20^\circ\text{C}/\text{cm}, \quad \Delta x = 2 \text{ cm}, \quad \Delta y = 1 \text{ cm}.$$

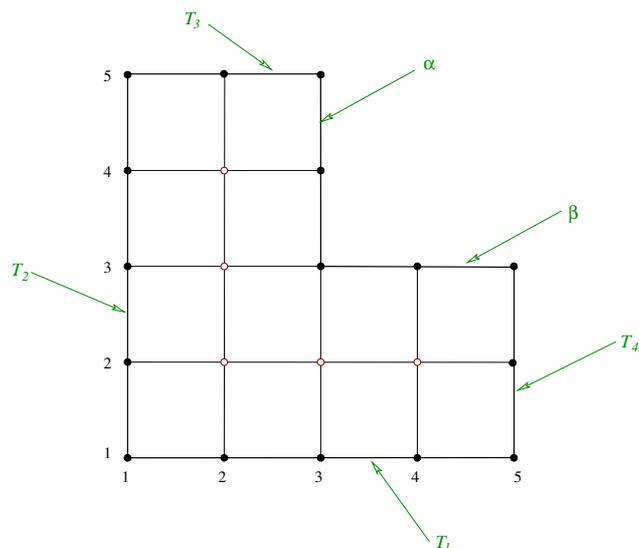


Fig. 2.21: **Exo-3-38.**

3-39 : Obtenir la forme matricielle pour l'équation de Laplace appliquée à la plaque ci-dessous en utilisant le schéma à 9 avec $\beta = 1$. On donne :

$$T_1 = 10^\circ\text{C}, \quad T_2 = 100^\circ\text{C}, \quad T_3 = 2 \cdot 10^4 x^2, \quad T_4 = 20^\circ\text{C}, \quad T_5 = 10^\circ\text{C}, \quad T_6 = 10^4 y^2, \\ \Delta x = 2 \text{ cm}.$$

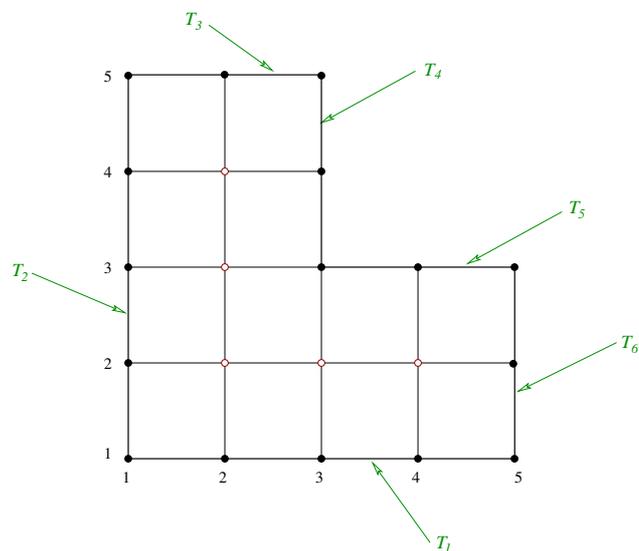


Fig. 2.22: **Exo-3-39.**

3-40 : Même problème que 3-39 avec les données suivantes :

$$T_1 = 5 \cdot 10^5 x^2, \quad T_2 = 3 \cdot 10^5 y^2, \quad T_3 = 60^\circ\text{C}, \quad T_4 = 30^\circ\text{C}, \quad T_5 = 10^\circ\text{C}, \quad T_6 = 100^\circ\text{C}, \\ \Delta x = 3 \text{ cm}.$$

3-41 : Quelle est la nature de l'EDP suivante : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial y} = 0$.

Cette EDP est discrétisée par les trois schémas suivants :

1. $\frac{2T_{i,j} - 5T_{i+1,j} + 4T_{i+2,j} - T_{i+3,j}}{\Delta x^2} - \frac{4T_{i,j+1} - 3T_{i,j} - T_{i,j+2}}{2\Delta y} = 0.$
2. $\frac{T_{i,j} - 2T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y} = 0.$
3. $\frac{2T_{i,j} - T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\Delta y} = 0.$

Donner, pour chaque équation, le type d'approximation choisie pour chaque terme.

3-42 : Soit le schéma de discrétisation suivant :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = (1 - \theta) \left[\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right] + \theta \left[\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right]$$

où θ est une constante comprise entre 0 et 1.

1. Déterminer son facteur d'amplification (prendre : $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$).
2. Etudier sa stabilité pour les cas où $\theta = 0$, $\theta = 1/2$ et $\theta = 1$.

3-43 : Soit le schéma de discrétisation de l'équation de la chaleur :

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\lambda}{3} (T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) + \frac{\lambda}{3} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)$$

1. Déterminer son facteur d'amplification en appliquant l'analyse de Von-Neumann.
2. Etudier sa stabilité sachant que $\lambda > 0$.

3-44 : En utilisant le schéma à 9 points, déterminer la forme matricielle $A \cdot T = B$ pour l'équation de Laplace appliquée à une plaque rectangulaire de (24×18) cm² discrétisée par 4 divisions selon x et 3 selon y . Les deux conditions de Neumann seront discrétisées par des approximations décentrées d'ordre 1.

On donne : Les températures en °C et les gradients en °C/cm.

$$T_b = 200x + 10, \quad T_g = 300y + 20, \quad T_h = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right| = 5, \quad T_d = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right| = 10.$$

3-45 :

Bibliographie

- [1] Joe D. Hoffmann, “*Numerical Methods for Engineers and Scientists*”, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, 2001.
- [2] Chapra, S. C., and Canale, R. P., “*Numerical Methods for Engineers*”, 3rd Ed., McGraw-Hill, New York, 1998.
- [3] Aslak Tveito and Ragnar Winther, “*Introduction to Partial Differential Equations : A Computational*”, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [4] Y. Pinchover and J. Rubinstein, “*An Introduction to Partial Differential Equations*”, Cambridge University Press, 2005.
- [5] Richard hyberman, “*Elementary Applied Partial Differential Equations*”, 2nd. Ed., Prentice Hall, USA, 1983.
- [6] Klauss A. Hoffmann, Steve T. Chiang, “*Computational Fluid Dynamics*”, 4th Ed., Engineering Education System, USA, 2000.
- [7] William F. Ames, “*Numerical Methods for Partial Differential Equations*”, 2nd Ed., Academic Press, USA, 1977.
- [8] H. F. Weinberger, “*A First Cours in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods*”, Dover Publications, New York, 1965.
- [9] David L. Powers, “*Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*”, 5th Ed., Elsevier Academic Press, USA, 2006.
- [10] David R. Croft, David G. Lilley, “*Heat transfer calculations using Finite Difference Equations*”, Applied Science Publishers, England, 1977.
- [11] Henry J. Ricardo, “*A Modern Introduction to Differential Equations*”, 2nd Ed., Elsevier, Canada, 2009.
- [12] Jayathi Y. Murthy, “*Numerical Methods in Heat, Mass, and Momentum Transfer*”, Purdue University, 2002.
- [13] K. W. Morton, David Mayers, “*Numerical Solution of Partial Differential Equations*”, 2nd Ed., Cambridge, 2005.

- [14] Peter J. Collins, “*Differential and Integral Equations*”, Oxford University Press, New York, 2006.
- [15] C. Pozrikidis, “*Fluid Dynamics : Theory, Computation, and Numerical Simulation*”, 2nd Ed., Springer, New York, 2009.
- [16] Aslak Tveito, Ragnar Winther, “*Introduction to Partial Differential Equations : A Computational Approach*”, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [17] John C. Tannehill, Dale A. Anderson, Richard H. Pletcher, “*Computational Fluid Mechanics And Heat Transfer*”, 2nd Ed., Taylor&Francis, USA, 1997.
- [18] H. K. Versteeg, W. Malalasekera, “*An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method*”, 1st Ed., Longman scientific&Technical, USA, 1995.
- [19] Suhas V. Patankar, “*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*”, Hemisphere Publishing, USA, 1980.