Equation de Poisson 2D

==============================

Dr. Lad MESSAOUDI

Département de Mécanique

Université de Batna

=======================

Master : Energétique

Matire : Méthodes Numériques Appliquées I

==

2011/2012

===========

Détermination de la température $T(x, y)$ à travers la surface d'une plaque rectangulaire (a x b) dont les 4 extrémités sont soumises à des (C.L.) de Dirichlet et contenant une source de chaleur au centre.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}T(x, y) = -\frac{Q}{\lambda}$$

Conditions aux limites (C.L):

$$T(x, 0) = 0,$$
$$T(x, b) = 0,$$
$$T(0, y) = 0,$$
$$T(a, y) = 0.$$

Solution discrétisée par la formulation à 5 points:

> $Restart : with(plots) :$

> $a := 5 : b := 15 : ndx := 20 : ndy := 20 :$

> $\Delta x := \frac{a}{ndx}; \Delta y := \frac{b}{ndy}; \beta := \frac{\Delta x}{\Delta y};$

$$\Delta x := \frac{1}{4}$$

$$\Delta y := \frac{3}{4}$$

$$\beta := \frac{1}{3}$$

> $\lambda := 0.4 : Q := 40 :$

> $i_{max} := ndx + 1;\ j_{max} := ndy + 1;$

$$i_{max} := 21$$
$$j_{max} := 21$$

> $Tg := 0;$
$Td := 0;$
$Tb := 0;$
$Th := 0;$

$$Tg := 0$$
$$Td := 0$$
$$Tb := 0$$
$$Th := 0$$

Nombre d'équations:

> $N := (i_{max} - 2) \cdot (j_{max} - 2)$

$$N := 361$$

Conditions aux Limites:

> **for** i **from** 2 **to** $i_{max} - 1$ **do** $T[i, 1] := Tb$ **end do**:

> **for** i **from** 2 **to** $i_{max} - 1$ **do** $T[i, j_{max}] := Th$ **end do**:

> **for** j **from** 2 **to** $j_{max} - 1$ **do** $T[1, j] := Tg$ **end do**:

> **for** j **from** 2 **to** $j_{max} - 1$ **do** $T[i_{max}, j] := Td$ **end do**:

Les valeurs ci-dessous sont calculées uniquement pour le tracé graphique.

> $T[1, 1] := \frac{Tg + Tb}{2} :$

> $T[i_{max}, j_{max}] := \frac{Th(i_{max}) + Td}{2} :$

> $T[i_{max}, 1] := \frac{Tb + Td}{2} :$

> $T[1, j_{max}] := \frac{Tg + Th(1)}{2} :$

>

> $k := 1 :$

Résolution pour les noeuds internes

> **for** i **from** 2 **to** i_{max} -1 **do**

for j **from** 2 **to** $j_{max} - 1$ **do**

$Eq[k] := T[i+1, j] + T[i-1, j] + \beta^2 \cdot (T[i, j+1] + T[i, j-1]) - 2 \cdot (1 + \beta^2)$

```
·T[i, j] + Δx^2 · Q/λ = 0;
      Temps[k] := T[i, j];
  k := k + 1
  end do;
end do;
```

Ecriture du système d'équations et sa résolution:

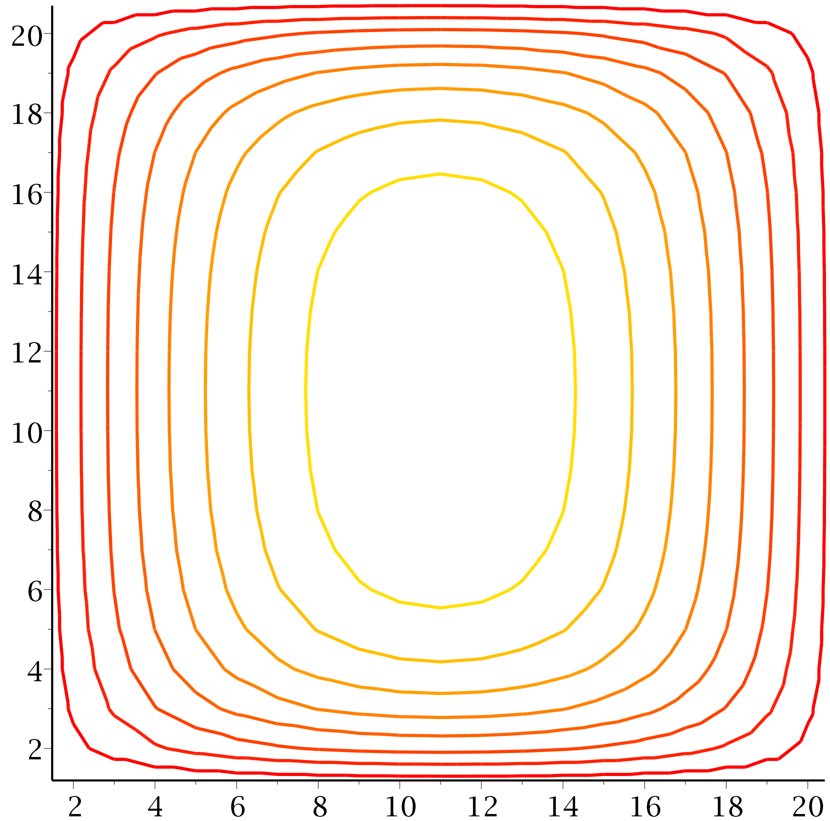
```
> Eqs := {seq(Eq[i], i = 1 ..N)} :
> Tmps := [seq(Temps[i], i = 1 ..N)] :
> SolT := solve(Eqs, Tmps) :
```

Extraction des valeurs des températures:

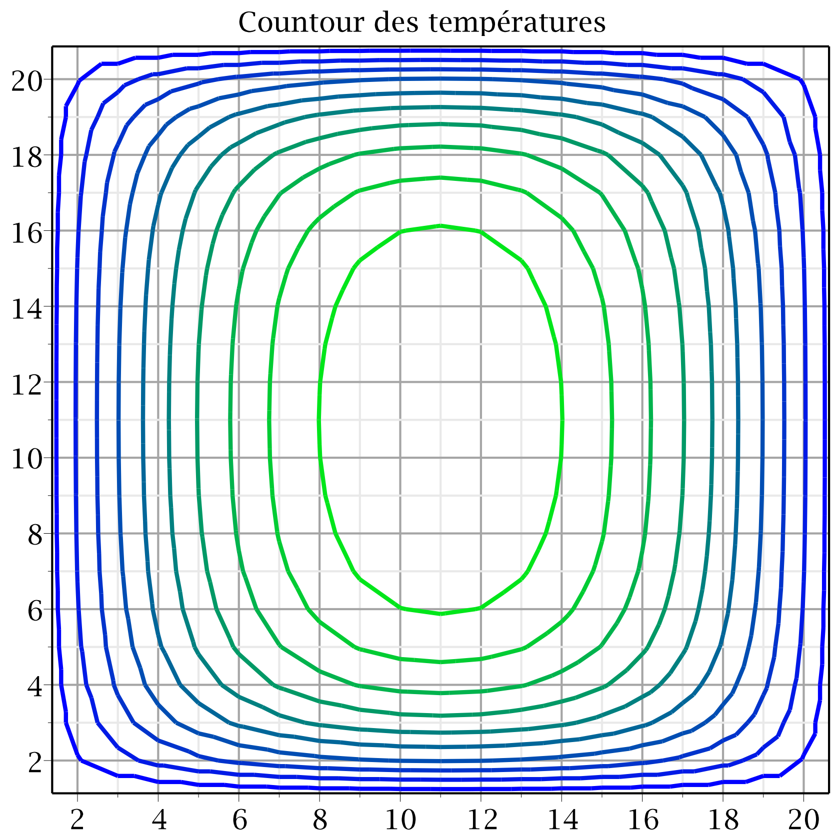
```
> k := 1 :
  for i from 2 to i_max - 1  do
   for j from 2 to j_max - 1 do
        T[i, j] := rhs(SolT_{1, k});
        k := k + 1
   end do;
  end do
```

Création des listes pour le tracé:

```
> GTemps := [seq([seq(T[i, j], j = 1 ..j_max)], i = 1 ..i_max)] :
> listcontplot(Matrix(GTemps))
```



> *listcontplot*(*Matrix*(*GTemps*), *title* = "Countour des températures", *axes* = *boxed*, *gridlines* = *true*, *thickness* = 2, *coloring* = [*blue*, *green*], *contours* = 10, *filledregions* = *false*)


Countour des températures
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20