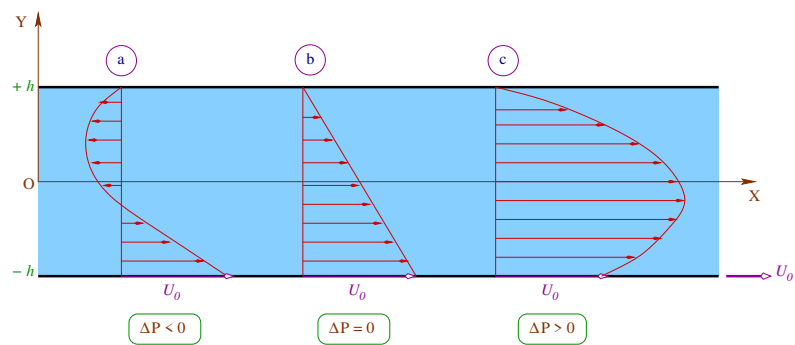


Dr. Laïd MESSAOUDI

MECANIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Cours et exercices pour Licences et Masters



Maître de Conférences "A".
Département de Génie Mécanique.
Faculté de Technologies.
Université Batna 2.

Table des matières

1	Statique des fluides	1
1.1	Définition d'un fluide	1
1.2	Propriétés physiques des fluides	1
1.2.1	Viscosité	1
1.2.2	Compressibilité	4
1.2.3	Tension superficielle	4
1.2.4	Fluides Newtoniens	4
1.3	Pression en un point du fluide	4
1.4	Loi fondamentale de la statique des fluides	5
1.4.1	1er cas : Cylindre vertical	6
1.4.2	2ème cas : Cylindre incliné	6
1.4.2.1	Exemple 1 : Tube barométrique	7
1.4.2.2	Exemple 2 : Tube manométrique	8
1.5	Surfaces de niveau	9
1.5.1	Définition	9
1.5.2	Surface libre d'un liquide	9
1.5.3	Pression effective	10
1.6	Théorème de Pascal	11
1.7	Théorème d'Archimède	12
1.8	Calcul des forces de pression	13
1.8.1	Résultante des forces de pression sur une paroi plane	13
1.8.2	Centre de poussée	14
1.9	Notion d'équilibre relatif	18
1.9.1	Généralisation des équations fondamentales de la statique des fluides	19
1.9.2	Equilibre d'un liquide soumis à une accélération constante	20

1.9.3	Equilibre d'un liquide soumis à une rotation uniforme	23
1.10	Exercices	26
2	Écoulements idéaux	35
2.1	Méthodes de description d'un écoulement	35
2.1.1	Description Lagrangienne	35
2.1.2	Description Eulérienne	36
2.2	Écoulement permanent et non permanent	36
2.3	Ligne de courant -Tube de courant	36
2.4	Fonction de courant	37
2.5	Écoulement axisymétrique	37
2.6	Dérivée particulière	37
2.7	Volume de contrôle	38
2.8	Equation de conservation de la masse	38
2.8.1	Forme différentielle	38
2.8.2	Forme intégrale	40
2.9	Equations de quantité de mouvement	44
2.9.1	Forme différentielle	45
2.9.2	Forme intégrale	47
2.10	Equation de Bernoulli	48
2.11	Interprétation de l'équation de Bernoulli	50
2.12	Applications pratiques de l'équation de Bernoulli	51
2.12.1	Mesure de la pression statique	51
2.12.2	Mesure de la pression dynamique	52
2.12.3	Mesure de la vitesse dans un écoulement incompressible	53
2.12.4	Mesure du débit-masse	54
2.13	Exercices	60
3	Écoulements irrotationnels	73
3.1	Introduction	73
3.2	Circulation du vecteur vitesse	73
3.3	Potentiel des vitesses	74
3.4	Fonction de courant	75
3.5	Propriétés importantes	76
3.6	Exemples d'écoulements simples	78
3.6.1	Écoulement rectiligne plan	78
3.6.2	Écoulement autour d'une source de débit q_v par unité de profondeur	79
3.7	Utilisation de la variable complexe	80
3.7.1	Fonction analytique	80
3.7.2	Propriétés de la fonction potentiel complexe	81

3.7.3	Exemples d'application	82
3.7.3.1	Écoulement uniforme	82
3.7.3.2	Écoulement de type source ou puits	83
3.7.3.3	Écoulement tourbillonnaire	84
3.8	Application de la superposition d'écoulements élémentaires	86
3.8.1	Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source	87
3.8.2	Superposition d'une source et d'un puits de mêmes débits	88
3.8.3	Superposition d'une source et d'un vortex centrés à l'origine	90
3.9	Ondes de surface	91
3.9.1	Problème général de l'onde de surface	91
3.9.2	Onde plane de faible amplitude	93
3.9.3	Propagation des ondes de surface	95
3.10	Exercices	98
4	Dynamique des écoulements visqueux	103
4.1	Propriétés du fluide réel	103
4.2	Description du frottement visqueux	103
4.3	Taux de déformation	105
4.4	Généralisation	107
4.5	Tenseur des contraintes	108
4.6	Liaison entre contraintes et déformations	109
4.7	Equations de Navier-Stokes	111
4.8	Cas limites de la viscosité	114
4.9	Caractéristiques de l'écoulement visqueux	114
4.9.1	Régimes d'écoulement	114
4.9.2	Propriétés des écoulements laminaires	115
4.10	Applications	115
4.10.1	Écoulement de Poiseuille	115
4.10.2	Écoulement de Couette généralisé	120
4.11	Écoulements à faible nombre de Reynolds	127
4.11.1	Lubrification Hydrodynamique	128
4.11.1.1	Formule de Reynolds	128
4.11.1.2	Répartition de pression	129
4.11.1.3	Calcul de la charge portante	130
4.11.1.4	Calcul de la force de frottement	131
4.11.1.5	Paramètres caractérisant le fonctionnement	131
4.11.2	Mouvement long d'une sphère	134
4.11.3	Mouvement long d'un cylindre circulaire	134
4.12	Exercices	136

5	Couches limites	153
5.1	Introduction	153
5.2	Couches limites laminaires (CLL)	154
5.2.1	Equations régissant la couche limite laminaire	154
5.2.2	Paramètres caractéristiques de la couche limite	157
5.2.2.1	Épaisseur de déplacement	157
5.2.2.2	Épaisseur de quantité de mouvement	158
5.2.2.3	Facteur de forme	159
5.2.3	Solution exacte des équations de la CLL	159
5.2.3.1	Cas de la plaque plane	159
5.2.3.2	Cas général	164
5.2.3.3	Evolution de la CLL à la surface d'une forme quelconque	166
5.2.4	Equation intégrale de Von-Karman	166
5.2.5	Analyse de la CLL par la méthode de Karman-Pohlhausen . . .	168
5.2.6	Stabilité de la couche limite laminaire	171
5.3	Couche limite turbulente	173
5.4	Exercices	175
6	Écoulements dans les conduites	179
6.1	Introduction	179
6.2	Étude de l'écoulement laminaire	180
6.3	Notions de charge et de perte de charge	187
6.4	Détermination du coefficient de perte de charge linéaire	188
6.4.1	Loi générale de perte de charge	189
6.5	Pertes de charge singulières ou locales	190
6.6	Pertes de charge singulière à l'entrée d'une conduite	191
6.6.1	Cas du régime laminaire	191
6.6.2	Cas du régime turbulent	192
6.7	Généralisation de l'équation de Bernoulli	193
6.8	Pente hydraulique	197
7	Calcul des conduites	201
7.1	Introduction	201
7.2	Conduites simples et conduites multiples	202
7.2.1	Conduites simples	202
7.2.1.1	Cas du régime laminaire	203
7.2.1.2	Cas du régime turbulent	203
7.2.1.3	Caractéristique d'une conduite	204
7.2.1.4	Problèmes posés pour le calcul d'une conduite simple .	204
7.2.2	Conduites mixtes et conduites multiples	205

7.2.2.1	Conduite mixte	205
7.2.2.2	Conduite multiple	207
7.2.2.3	Longueur équivalente	209
7.2.3	Conduites ramifiées	213
7.2.4	Conduites complexes	215
7.3	Problèmes économiques relatifs aux conduites	216
7.4	Calcul de l'épaisseur d'une conduite	217
7.5	Exercices	218
8	Analyse dimensionnelle et lois de similitude	229
8.1	Géométrie des maquettes	230
8.2	Conditions de similitude	230
8.3	Recherche des produits sans dimension	231
8.4	Exemples	232
8.4.1	Chute de pression dans une conduite rectiligne	232
8.4.2	Portance d'un profil	234
8.4.3	Débit dans un tube capillaire horizontal	235
9	Écoulements turbulents	239
9.1	Propriétés des écoulements turbulents	239
A	Notions de calcul vectoriel	245
A.1	Produit scalaire	245
A.2	Produit vectoriel	245
A.3	Produit mixte	246
A.4	Divergence d'un vecteur	246
A.5	Vecteur gradient	246
A.6	Rotationnel d'un vecteur	247
A.7	Laplacien	247
A.8	Circulation d'un vecteur	248
A.9	Théorème de Gauss-Ostrogradski	248
A.10	Différentielle totale	248
A.11	Potentiel des vitesses	248
B	Pertes de charge	251
B.1	Pertes de charge en accessoires	251
B.2	Convergent et divergent	252
B.3	Divers accessoires	252
B.4	Pertes de charge linéaires	253
B.5	Rugosité des conduites	253

B.6	Pertes de charge à l'entrée d'une conduite	254
B.6.1	Ecoulement laminaire	254
C	Equation de Von-Karman	257
D	Conversion d'unités	259
	Bibliographie	263

Statique des fluides

1.1 Définition d'un fluide

Le mot *fluide* englobe le liquide et le gaz.

Un *liquide* correspond à un état de la matière dans lequel les molécules sont relativement libres de changer leurs positions l'une par rapport à l'autre, mais les forces cohésives les obligent à garder relativement un volume fixe.

Un *gaz* correspond à un état de la matière dans lequel les forces cohésives n'exercent aucune contrainte sur la liberté du mouvement des molécules.

Dans la Mécanique Des Fluides (MDF) les phénomènes d'écoulements des liquides et des gaz sont en général traités du point de vue macroscopique en utilisant les lois de la mécanique de Newton. Dans ce contexte, le milieu d'écoulement est considéré comme continu.

Plusieurs problèmes de fluides n'invoquent pas le mouvement. Ils concernent surtout la distribution de pression dans un fluide au repos ainsi que son effet sur les parois solides des objets flottants ou immergés. Quand la vitesse du fluide est nulle, connue sous le nom de "*condition hydrostatique*", la variation de pression est due uniquement au poids du fluide. Si le fluide est connu dans un champ de gravité donné, la pression peut être facilement calculée par intégration.

1.2 Propriétés physiques des fluides

1.2.1 Viscosité

On peut définir la viscosité d'un fluide comme étant le frottement interne entre les couches durant l'écoulement. La conséquence importante de cette propriété est l'*adhérence du fluide à la surface du solide* en contact avec lui. Aussi, à cause de

cette propriété visqueuse des fluides, il existe des contraintes de cisaillement (force de glissement tangentielle exprimée par unité de surface). L'expérience suivante montre ce type de force.

Expérience de Couette : Soient deux cylindres verticaux, coaxiaux, de rayons peu différents, dont l'espace intermédiaire est rempli de fluide (Fig.1.1). Si on entraîne le cylindre extérieur avec un moteur M de vitesse angulaire constante ω , on constate que le cylindre intérieur a tendance à tourner dans le même sens. Pour le maintenir immobile il faut donc lui appliquer un couple C dans le sens contraire.

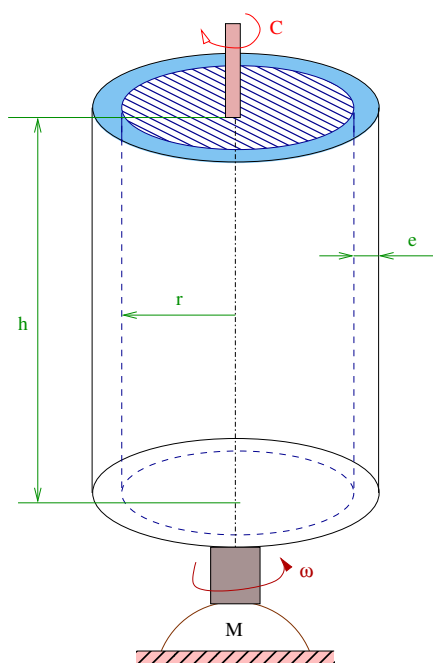


Fig. 1.1: *Expérience de Couette.*

La distance e entre les deux cylindres étant petite devant leur rayon moyen r , on peut alors schématiser l'expérience en considérant un plan mobile P' se déplaçant parallèlement à un plan fixe P de surface $S = 2\pi r h$, à la distance e et avec la vitesse $q = r\omega$ (Fig.1.2).

Sur la plaque fixe P s'applique une force \vec{F} parallèle à P , c'est la force de frottement due à la présence du fluide entraîné par la plaque mobile P' .

Tant que ω reste inférieure à une valeur critique ω_c l'expérience montre que F varie comme $\frac{Sq}{e}$ donc :

$$F = \mu \frac{S q}{e} \quad (1.1)$$

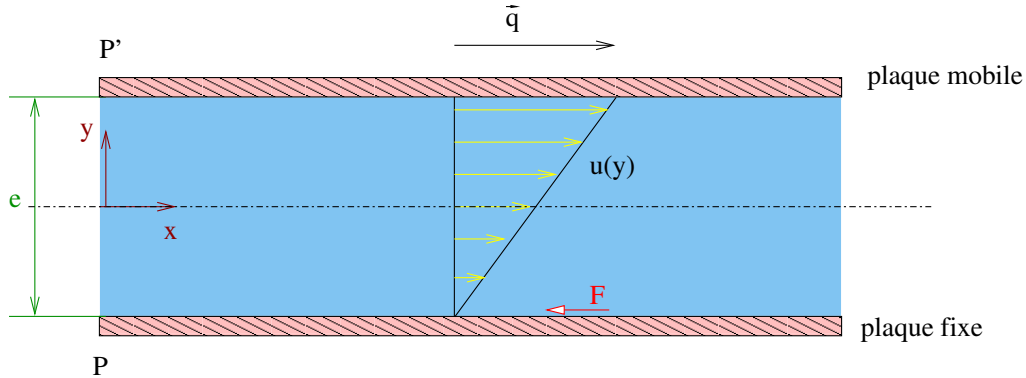


Fig. 1.2: *Schématisation de l'expérience de Couette.*

Le facteur de proportionnalité μ est la *viscosité absolue* ou *viscosité dynamique* du fluide.

Pour un même fluide et à une même température μ reste constante : $\mu = f(T, \text{fluide})$. Sous l'action de ce frottement, il s'établit dans le fluide un état de mouvement tel que les couches qui se trouvent en contact direct avec les plaques ont la même vitesse qu'elles (adhérence aux plaques), tandis que les couches intermédiaires glissent les unes sur les autres avec la vitesse \vec{u} proportionnelle à leur distance y à la plaque fixe.

Si on la rapporte à l'unité de surface, cette force de frottement dite *contrainte de cisaillement* a pour valeur :

$$\tau_0 = \frac{F}{S} = \mu \frac{q}{e} \quad (1.2)$$

et

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.3)$$

L'expérience de Couette fournit le principe d'un appareil de mesure absolue de μ appelé *viscosimètre de Couette*. En effet, le moment du couple de frottement est :

$$C = r S \tau_0 = r 2 \pi r h \frac{\mu q}{e}$$

d'où l'on tire la viscosité dynamique :

$$\mu = \frac{C e}{2 \pi r^3 h \omega} \quad (1.4)$$

μ se mesure en $[N.s/m^2]$ ou en $[Kg/m.s]$ ou en *Poiseuille* (S.I) (Tab. D.1, Annexe D).

On défini aussi la *viscosité cinématique* qui se mesure en $[m^2/s]$ par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.5)$$

1.2.2 Compressibilité

La compressibilité d'un fluide peut être assimilée à sa résistance au changement de volume pour une masse constante. Les liquides ont une très faible compressibilité. A l'opposé, la compressibilité des gaz est très élevée.

1.2.3 Tension superficielle

A l'interface qui sépare un liquide et un gaz ou deux liquides immiscibles (qui ne se mélangent pas), une couche spéciale mince se forme sur le liquide ou à l'interface des deux liquides. La formation de cette couche peut être due à la force d'attraction exercée par les molécules du liquide en dessous de la surface. Cette couche se comporte comme une membrane et l'expérience montre qu'elle peut supporter le poids d'une petite aiguille.

1.2.4 Fluides Newtoniens

Selon la loi de Newton, si un fluide vérifie la relation (1.3) on dit que ce fluide est newtonien (exemples : air, eau).

1.3 Pression en un point du fluide

Soit un fluide au repos et en équilibre (Fig.1.3). En un point de ce milieu continu nous isolons un tétraèdre infiniment petit (poids négligeable).

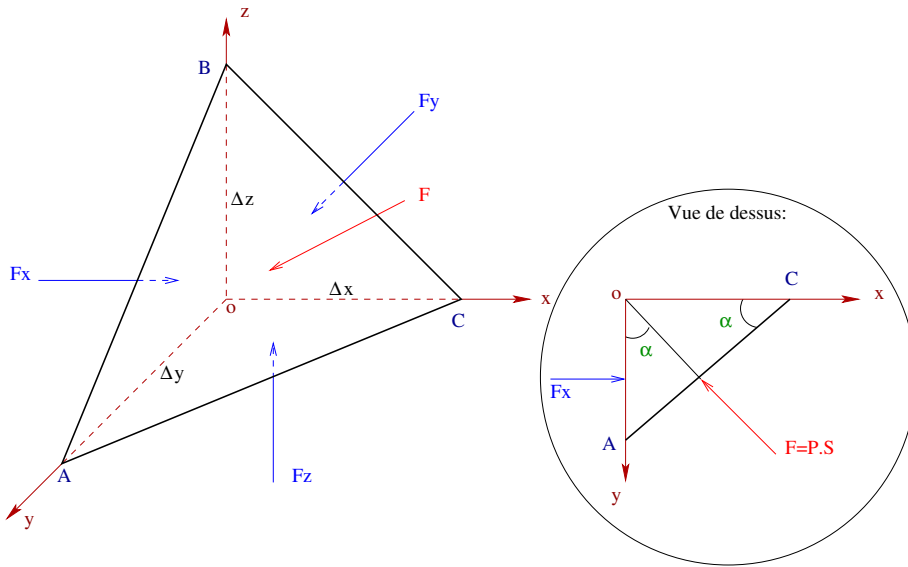


Fig. 1.3: *Equilibre d'un tétraèdre élémentaire.*

Suivant l'axe ox on a :

$$P_x S_x = P S \sin \alpha \quad \text{or} \quad S_x = S \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad P_x = P$$

de même : $P_y = P$ et $P_z = P$.

Donc :

$$P_x = P_y = P_z = P$$

Nous n'avons fait qu'une hypothèse sur les dimensions très petites Δx , Δy et Δz , donc sur l'orientation de la facette ABC par rapport au point O très proche. Il n'a même pas été nécessaire d'imposer une direction OZ verticale ; nous l'avons représenté ainsi pour faciliter le schéma et sa lecture. *Nous pouvons donc conclure que quelle que soit l'orientation de la facette ABC autour du point O , la pression du fluide sur cette facette reste la même.*

1.4 Loi fondamentale de la statique des fluides

Dans un liquide au repos, imaginons un cylindre de liquide de section droite très petite et de hauteur h . Isolons-le afin d'en étudier l'équilibre (Fig.1.4 et 1.5).

1.4.1 1er cas : Cylindre vertical

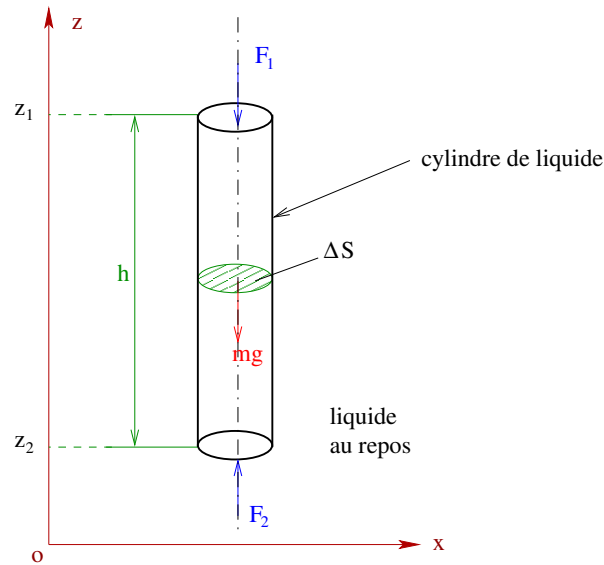


Fig. 1.4: *Equilibre d'un cylindre de liquide vertical.*

La projection suivant l'axe vertical Z (Fig.1.4) nous donne :

$$P_2 \Delta S - mg - P_1 \Delta S = 0$$

Or $V = \Delta S h$ et $\rho = \frac{m}{V}$ d'où $m = \rho \Delta S h$.

En remplaçant dans la première équation :

$$P_2 \Delta S - \rho \Delta S h g - P_1 \Delta S = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$P_2 = P_1 + \rho g h = P_1 + \rho g (z_1 - z_2) \quad (1.6)$$

$\rho g h$ représente le poids d'une colonne verticale de liquide de section unité et de hauteur h . On utilise souvent $\varpi = \rho g$ qui représente le poids volumique en $[N/m^3]$.

1.4.2 2ème cas : Cylindre incliné

La projection suivant l'axe du cylindre (Fig.1.5) nous donne :

$$-P_1 \Delta S_1 \cos \alpha_1 - mg \cos \beta + P_2 \Delta S_2 \cos \alpha_2 = 0$$

le volume du cylindre vaut : $V = \Delta S_d \frac{z_1 - z_2}{\cos \beta}$

en remplaçant dans la première équation et en simplifiant, nous aurons :

$$P_2 = P_1 + \rho g (z_1 - z_2) \quad (1.7)$$

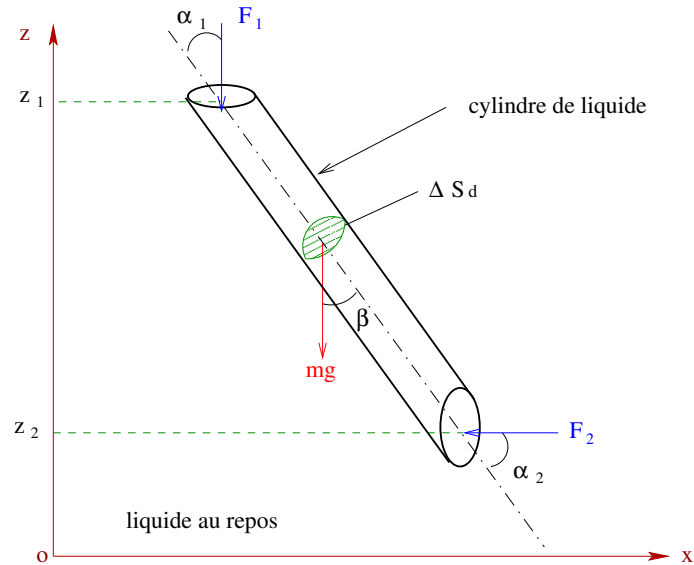


Fig. 1.5: *Equilibre d'un cylindre de liquide incliné.*

La différence de pression entre deux points d'un fluide pesant en équilibre est égale au poids d'un cylindre de ce fluide, de base égale à l'unité de surface et de hauteur égale à la différence de niveau des deux points.

L'expression (1.7) peut aussi se mettre sous la forme :

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 = h_z \quad (1.8)$$

h_z étant la *hauteur piézométrique*.

Comme il est possible de recommencer la même démonstration pour tous les points, nous pouvons écrire :

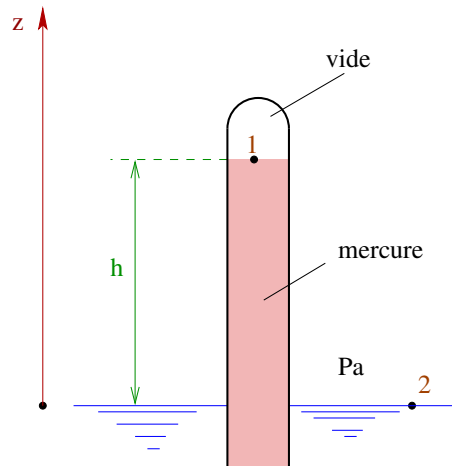
$$\frac{P}{\rho g} + z = C^{te} \quad (1.9)$$

$\frac{P}{\rho g}$, homogène à une hauteur, représente la hauteur du liquide considéré mesurant la pression P .

La relation (1.9) est valable dans tous les cas, quelle que soit la forme donnée au liquide, à condition qu'il s'agisse d'un liquide homogène et au repos.

1.4.2.1 Exemple 1 : Tube barométrique

Appliquons la loi fondamentale de la statique au tube de la figure (Fig.1.6) :

Fig. 1.6: *Tube barométrique.*

$$P_2 = P_1 + \rho g (z_1 - z_2) \quad \text{or} \quad z_2 = 0 \quad \text{et} \quad P_1 = 0 \quad (\text{vide})$$

$$\text{d'où : } P_2 = \rho g h = P_a$$

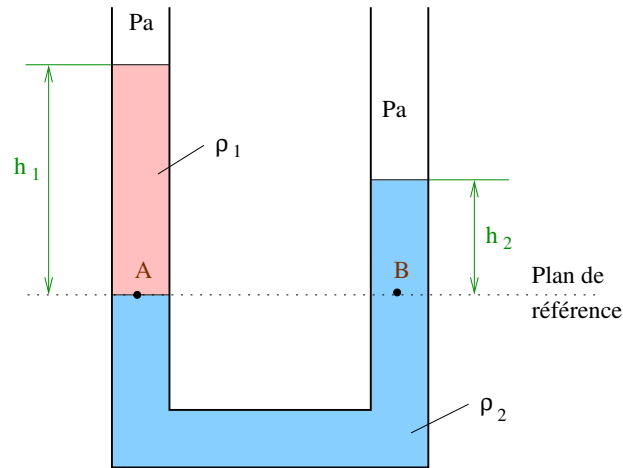
$\rho = 13600 \text{ Kg/m}^3$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Si $h = 760 \text{ mm}$ alors nous obtenons :

$$P_2 = 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 0,76 \quad \text{donc} \quad P_2 = 10,13 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 = P_a = 1 \text{ atm.}$$

Il est alors donc possible d'exprimer une pression, ici pression atmosphérique, non pas en N/m^2 , mais par la hauteur d'une colonne de mercure : pression atmosphérique normale $10,13 \text{ N/cm}^2$, $1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, 1013 mbar , ou encore 760 mm de mercure (Hg).

1.4.2.2 Exemple 2 : Tube manométrique

Prenons un plan de référence passant par la surface de séparation du tube manométrique ou encore appelé *tube en U* (Fig.1.7) et appliquons la loi fondamentale de la statique :

Fig. 1.7: *Tube manométrique.*

$$P_A = P_a + \rho_1 g h_1 \quad \text{et} \quad P_B = P_a + \rho_2 g h_2$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = g (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2)$$

Or $P_A = P_B$ puisque les points A et B appartiennent au même fluide et sont situés dans un même plan horizontal. Donc :

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

Cette relation pratique permet, par exemple, de déterminer la masse volumique inconnue ρ_2 connaissant celle de l'autre liquide ρ_1 ainsi que les hauteurs h_1 et h_2 qui peuvent être facilement mesurées.

1.5 Surfaces de niveau

1.5.1 Définition

On appelle *surface de niveau* le lieu des points du fluide soumis à la même pression. On a :

$$\frac{P}{\rho g} + z = C^{te}$$

Si $P = C^{te}$ alors l'équation de la surface de niveau est $z = C^{te}$.

Les surfaces de niveau sont donc des *plans horizontaux*.

1.5.2 Surface libre d'un liquide

A la surface de séparation du liquide et de l'air ambiant, la pression est P_a . Cette surface est donc horizontale. Elle est dite *surface libre* du liquide.

1.5.3 Pression effective

Soit P_a la pression atmosphérique. Choisissons, comme référence des cotes, la surface du liquide. On a alors :

$$\frac{P}{\rho g} + z = \frac{P_a}{\rho g}$$

ce qui permet de calculer en chaque point la pression du liquide connaissant la pression atmosphérique. D'où :

$$P - P_a = -\rho g z = P_{eff} \quad (1.10)$$

- Exemple d'application :

Soit une vanne de retenue d'eau schématisée ci-dessous (Fig.1.8). Déterminer les pressions effectives exercées sur cette vanne.
On donne : $g = 10 \text{ m/s}^2$, $P_a = 10^5 \text{ N/m}^2$.

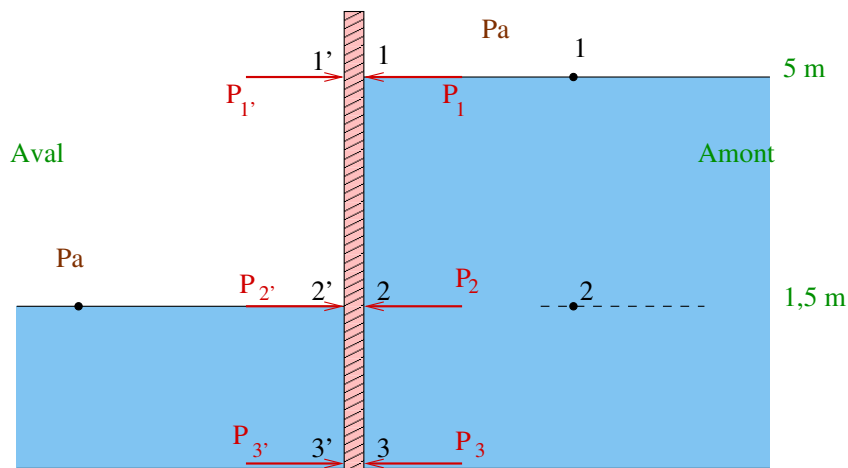


FIGURE 1.8: *Pressions effectives exercées sur une vanne de retenue d'eau.*

- Coté amont :

Point 1 : $P_1 = P_a = 10^5 \text{ N/m}^2$.

Point 2 : $P_2 = P_1 + \rho g (z_1 - z_2) = 10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 3,5 = 1,35 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

Point 3 : $P_3 = P_1 + \rho g (z_1 - z_3) = 10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 5 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

- Coté aval :

Point 1' : $P_{1'} = P_a = 10^5 \text{ N/m}^2$.

Point 2' : $P_{2'} = P_a = 10^5 \text{ N/m}^2$.

Point 3' : $P_{3'} = P_{2'} + \rho g (z_{2'} - z_{3'}) = 10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 1,5 = 1,15 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

- Pressions effectives sur la vanne :

$$\text{En 11}' : P_{eff} = P_1 - P_{1'} = 0.$$

$$\text{En 22}' : P_{eff} = P_2 - P_{2'} = 0,35 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

$$\text{En 33}' : P_{eff} = P_3 - P_{3'} = 0,35 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

De la cote 1,5 à la cote 0, l'eau exerce sa pression de part et d'autre de la vanne ; P et P' croissent de la même quantité lorsque la cote du point de la paroi diminue de 1,5 à 0.

1.6 Théorème de Pascal

Soit deux points M et M_0 d'un fluide incompressible. Nous avons vu la relation :

$$P_0 - P = \rho g (z - z_0)$$

Si, au point M_0 , on produit une augmentation de pression ΔP_0 , il en résulte en M une variation ΔP , telle que la loi précédente reste vérifiée :

$$(P_0 + \Delta P_0) - (P + \Delta P) = \rho g (z - z_0)$$

donc, d'après ces deux équations, on déduit que : $\Delta P = \Delta P_0$.

d'où l'énoncé :

** Dans un fluide incompressible en équilibre, toute augmentation de pression produite en un point se transmet intégralement à tous les points du fluide.*

- **Exemple :**

Soit le vérin hydraulique ci-dessous (Fig.1.9). Le système étant en équilibre et les pistons sont sur la même horizontale. Si on applique un effort F_1 de 100 N sur le piston de la pompe, calculer la charge qu'il est possible de soulever avec le vérin. On donne : $D/d = 10$.

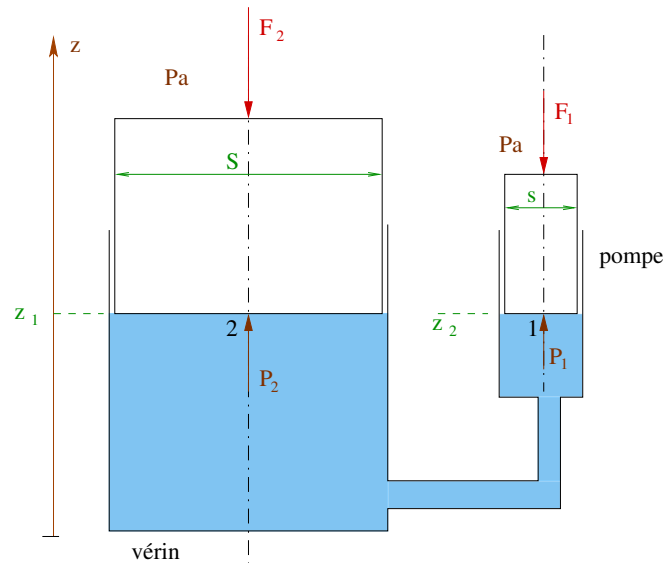


FIGURE 1.9: Vérin hydraulique. Théorème de Pascal.

- Equilibre du vérin : $F_2 + P_a S - P_2 S = 0$

- Equilibre de la pompe : $F_1 + P_a s - P_1 s = 0$

$z_1 = z_2$ et $P_1 = P_2$ d'où $\frac{F_2}{S} = \frac{F_1}{s}$

donc $F_2 = F_1 \left(\frac{D}{d}\right)^2 = 100 \cdot 10^2 = 10 \text{ KN}$.

1.7 Théorème d'Archimède

Tout corps immergé dans un liquide au repos reçoit de ce liquide une poussée égale et opposée au poids de liquide déplacé.

Si le solide est homogène alors son centre de gravité est confondu avec son centre de poussée ou centre de gravité du volume de liquide.

- Exemple :

Soit à déterminer la tension T du fil très fin qui supporte une masse d'acier de 20 Kg plongée dans l'eau (Fig.1.10). On donne :
 $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\rho_{eau} = 1000 \text{ Kg/m}^3$.

- Condition d'équilibre : $T + F = P \Rightarrow T = P - F$

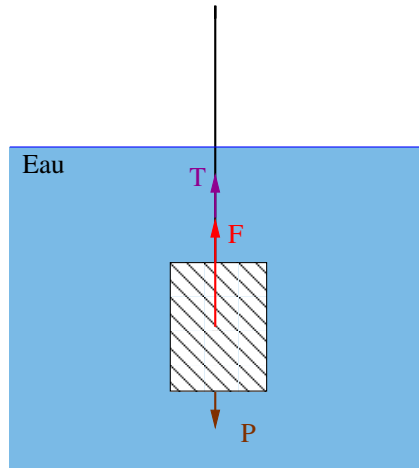


FIGURE 1.10: *Théorème d'Archimède.*

$$P = m g = 20 \cdot 10 = 200 \text{ N}$$

$$F = \rho_{\text{eau}} g V$$

V étant le volume d'eau déplacé = volume de la masse d'acier.

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{20}{7800} \Rightarrow F = 10^3 \cdot 10 \cdot \frac{2}{780} = 25,6 \text{ N}.$$

donc : $T = 200 - 25,6 = 174,4 \text{ N}.$

1.8 Calcul des forces de pression

1.8.1 Résultante des forces de pression sur une paroi plane

Soit une paroi de surface S , faisant un angle α avec l'horizontale (Fig.1.11). Nous avons :

Au point 1 : $P_1 = P_a \Rightarrow P_{\text{eff}} = 0.$

Au point G : $P_G = P_a + \rho g h \Rightarrow P_{G\text{eff}} = \rho g h.$

Au point 2 : $P_z = P_a + \rho g (z_1 - z) \Rightarrow P_{z\text{eff}} = \rho g (z_1 - z).$

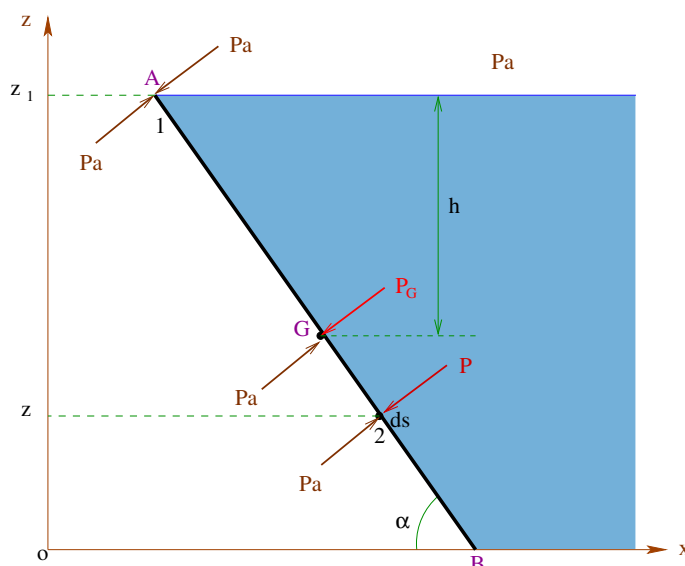


FIGURE 1.11: **Résultante des forces de pression.**

La force élémentaire exercée sur l'élément de surface ds est :

$$dF = P_{z_{eff}} ds = \rho g (z_1 - z) ds$$

$$\Rightarrow F = \int_s \rho g (z_1 - z) ds = \rho g \int_s (z_1 - z) ds$$

D'après la définition du centre de gravité, le moment statique :

$$\int_s (z_1 - z) ds = h S \quad \text{d'où la résultante :}$$

$$F = \rho g h S = P_{G_{eff}} S \quad (1.11)$$

* La résultante des forces (poussée effective) exercée par un liquide sur une paroi plane est égale au poids d'une colonne cylindrique de ce liquide ayant pour base la surface pressée et pour hauteur la distance du centre de gravité de la paroi à la surface libre du liquide.

1.8.2 Centre de poussée

On appelle ainsi le point d'application de la résultante des forces de pression sur la paroi. En général, il n'est pas confondu avec le centre de gravité. On obtient sa position par une équation de moments (Fig.1.12).

Afin de faciliter la résolution, prenons comme référence la surface libre du fluide et comme sens positif, l'axe vertical dirigé vers le bas. Nous aurons alors, d'après la figure : $z = h + x \sin \alpha$

Faisons maintenant un changement de repère et prenons (G, G_x, G_y) lié à la paroi.

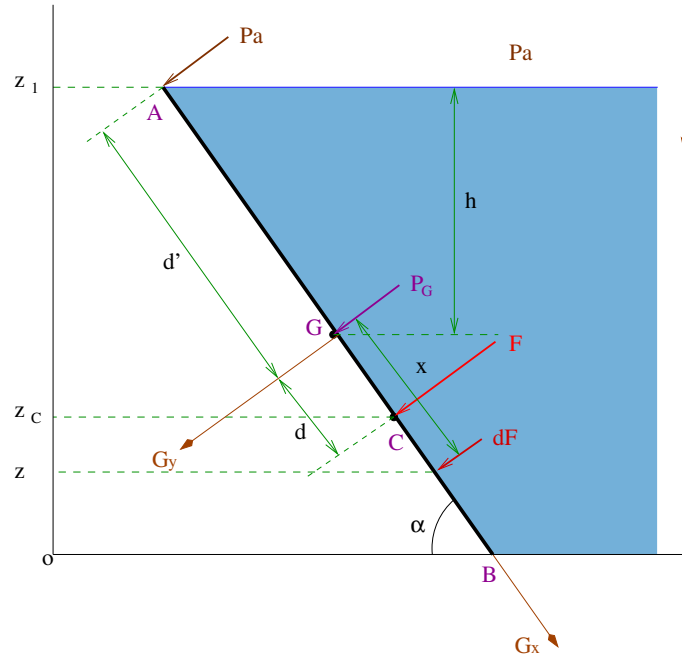


FIGURE 1.12: *Centre de poussée.*

Le moment élémentaire dM d'une force dF est : $dM_{/Gy} = dF x$

$$M_{F/Gy} = F \cdot d = \sum dM_{/Gy} = \int x dF = \int \rho g z x ds$$

$$F \cdot d = \rho g \int_s (h + x \sin \alpha) x ds = \rho g h \int_s x ds + \rho g \sin \alpha \int_s x^2 ds$$

$\int_s x ds = 0$ par définition du centre de gravité G ($x_G = 0$).

$\int_s x^2 ds = I_{Gy}$ est, par définition, le *moment d'inertie* (ou *moment quadratique*) de la surface S par rapport à l'axe Gy . Donc :

$$F \cdot d = \rho g \sin \alpha I_{Gy} = \rho g h S d$$

d'où, d'après la relation (1.11) :

$$d = \frac{I_{Gy} \sin \alpha}{h S} \quad (1.12)$$

Le point d'application de la force F se trouve donc à la distance d du point G et à $(d' + d)$ c'est-à-dire $\left(x_G + \frac{I_{Gy}}{S x_G}\right)$ du point A .

- Exercice d'application :

La porte rectangulaire AB est articulée en A (Fig.1.13). Sa longueur est $AB = L = 1,5\text{ m}$ et sa largeur est $W = 2\text{ m}$.

1. Calculer la résultante des forces F_R exercées par l'eau sur la porte AB .
2. Calculer la force F_B à appliquer au point B pour maintenir la porte fermée.

On donne : $\rho = 999\text{ kg/m}^3$, $g = 9,81\text{ m/s}^2$, $H = 3\text{ m}$ et $\theta = 25^\circ$.

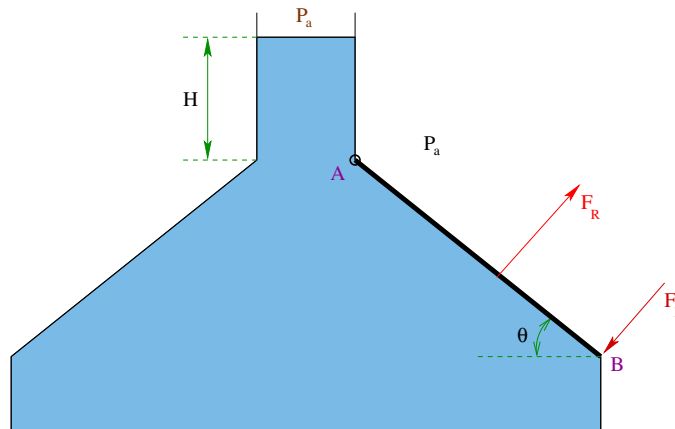


FIGURE 1.13: *Exercice d'application : Résultante des forces.*

Solution :

Dans le but de faciliter la résolution de cet exercice, faisons un changement de repère lié à la porte AB (Fig.1.14).

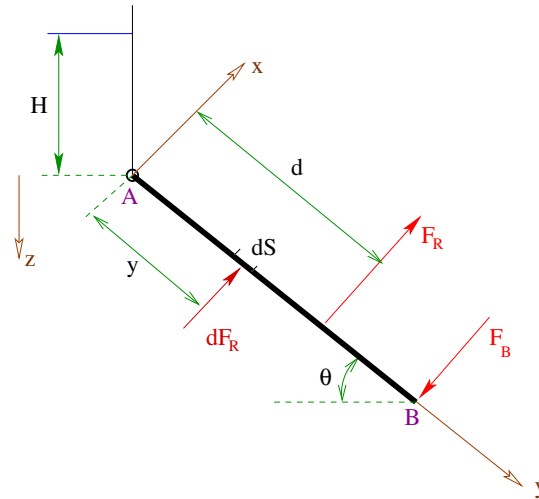


FIGURE 1.14: *Exercice d'application : Changement de repère.*

1- Chaque élément de surface dS est soumis à une force élémentaire dF_R due à la pression du fluide :

$$dF_R = P_{z_{eff}}.dS = \rho g z dS = \rho g z W dy$$

or chaque point de la porte est soumis à la hauteur de pression au dessus du point A donc : $z = H + y \sin \theta$

d'où l'expression globale de la force élémentaire en chaque point de la porte :

$$dF_R = \rho g W (H + y \sin \theta) dy$$

La résultante des forces est obtenue par intégration des forces élémentaires le long de la porte :

$$F_R = \rho g W \int_0^L (H + y \sin \theta) dy = \rho g W \left(H L + \frac{L^2}{2} \sin \theta \right)$$

d'où finalement :

$$F_R = \rho g W L \left(H + \frac{L}{2} \sin \theta \right)$$

A.N : $F_R = 999 . 9,81 . 2 . 1,5 . \left(3 + \frac{15}{2} \sin 25 \right) = 97,52 \text{ kN}.$

* Nous pouvons aussi travailler par rapport à l'axe z comme suit :

$$dF_R = \rho g z W dy = \rho g z W \frac{dz}{\sin \theta} \Rightarrow F_R = \rho g \frac{W}{\sin \theta} \int_H^{H+L \sin \theta} z dz$$

Nous retrouvons bien sûr le même résultat mais on risque de faire des erreurs au niveau de l'intégration.

2- Pour calculer la force à appliquer sur la porte pour qu'elle reste fermée, il faut considérer l'équilibre de cette porte dans la position indiquée sur la figure. Nous pouvons alors annuler le moment de la porte AB par rapport à A :

$$\sum M_{F/A} = 0 \Rightarrow F_R d = F_B L \Rightarrow F_B = \frac{d}{L} F_R \quad (*)$$

La résultante des forces F_R étant connue, il faut alors déterminer son point d'application (distance d). Pour cela, appliquons toujours une équation de moment par rapport à A des forces élémentaires :

$$\begin{aligned} \sum dM_{dF_R/A} = M_{F_R/A} &\iff \sum dF_R y = F_R d \\ \Rightarrow d = \frac{1}{F_R} \int_0^L \rho g W (H + y \sin \theta) y dy &= \frac{\rho g W}{F_R} \int_0^L (H y + y^2 \sin \theta) dy \\ \Rightarrow d = \frac{\rho g W L^2}{F_R} \left(\frac{H}{2} + \frac{L}{3} \sin \theta \right) \end{aligned}$$

ou encore, en remplaçant F_R par son expression :

$$d = \frac{\frac{HL}{2} + \frac{L^2}{3} \sin \theta}{H + \frac{L}{2} \sin \theta}$$

A.N : $d = \frac{\frac{3 \cdot 1,5}{2} + \frac{1,5^2}{3} \sin 25}{3 + \frac{1,5}{2} \sin 25} = 0,774 \text{ m.}$

et en remplaçant dans la relation (*), nous aurons finalement :

$$F_B = \rho g W d \left(H + \frac{L}{2} \sin \theta \right) = \rho g W L \left(\frac{H}{2} + \frac{L}{3} \sin \theta \right)$$

A.N : $F_B = 999 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1,5}{3} \sin 25 \right) = 50,32 \text{ kN.}$

1.9 Notion d'équilibre relatif

On peut soumettre un fluide à une translation ou à une rotation à accélération constante sans occasionner de mouvement relatif entre les particules du fluide. Dans ces conditions, il y a équilibre relatif et absence de tensions internes. Il n'existe, en général, pas de mouvement relatif entre le fluide et le récipient qui le contient. Les lois de la statique des fluides continuent à s'appliquer, avec des modifications tenant compte des effets de l'accélération.

1.9.1 Généralisation des équations fondamentales de la statique des fluides

Soit un liquide au repos par rapport au système d'axes (ox, oy, oz) . Considérons l'équilibre d'un parallélépipède élémentaire de cotés dx, dy et dz (Fig.1.15).

Les forces agissant sur ce parallélépipède sont :

- Forces surfaciques : force de pression.
- Forces volumiques par unité de masse $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$: inertie, pesanteur (ou gravité), magnétique, électrique etc...

Soient F_x, F_y et F_z les composantes de la force résultante, et dm la masse du parallélépipède.

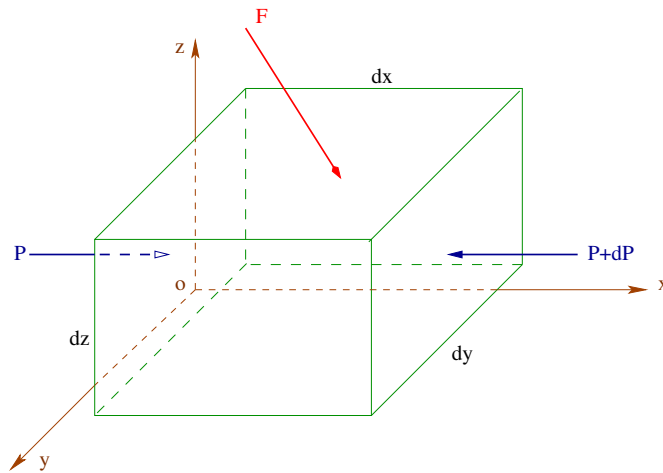


FIGURE 1.15: *Equilibre d'un parallélépipède élémentaire.*

Nous avons alors : $dm = \rho dx dy dz$

Ecrivons la condition d'équilibre de ce parallélépipède selon l'axe ox :

$$P dy dz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right) dy dz + \rho F_x dx dy dz = 0$$

car au premier ordre : $dP \simeq \frac{\partial P}{\partial x} dx$

Après simplification nous aurons : $F_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$.

Et de même pour les autres axes : $F_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$ et $F_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$.

Ces trois équations constituent les *équations d'Euler* de la statique des fluides. Elles s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (1.13)$$

- Dans le champs de pesanteur, on a : $F_x = 0$, $F_y = 0$, et $F_z = -g$ et l'équation générale se simplifie à :

$$-\rho g = \frac{dP}{dz} \Rightarrow dP + \rho g dz = 0 \quad \text{d'où en intégrant :}$$

$$P + \rho g z = C^{te} = P_g \quad (1.14)$$

P_g est appelée "*Pression motrice*".

1.9.2 Equilibre d'un liquide soumis à une accélération constante

Considérons un réservoir de liquide pesant, homogène, soumis à une accélération constante γ dans le sens de ox (Fig.1.16).

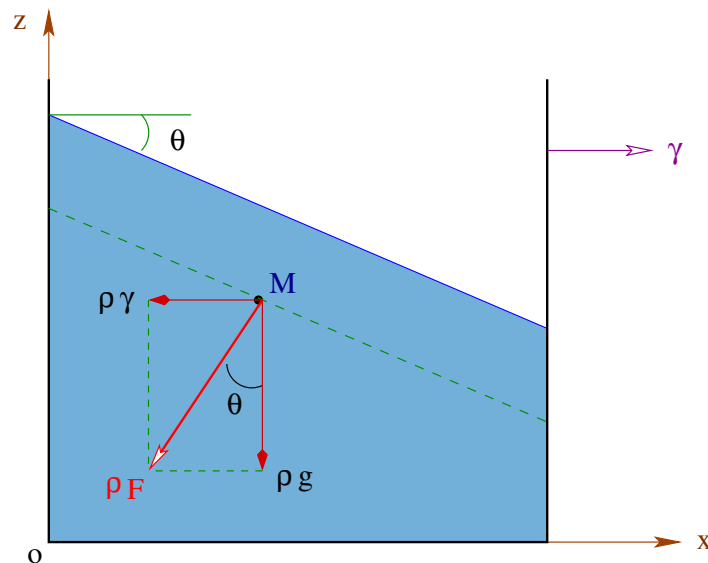


FIGURE 1.16: *Equilibre d'un liquide soumis à une accélération constante.*

D'après l'équation (1.13) on a :

$$\rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} P = 0$$

suivant ox : $-\rho \gamma - \frac{\partial P}{\partial x} = 0$

suivant oy : $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$

suivant oz : $-\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$

La différentielle totale de P est :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = -\rho \gamma dx - \rho g dz.$$

Les surfaces isobares (de même pression) sont obtenues pour $dP = 0$ et en intégrant on aura :

$$-\rho \gamma x - \rho g z = C^{te} \text{ d'où l'équation :}$$

$$z = -\frac{\gamma}{g} x + C^{te} \quad (1.15)$$

En particulier la surface libre est une droite et les surfaces isobares sont donc des droites de pente $(-\gamma/g)$ parallèles à cette surface.

La pression en un point quelconque du fluide est donnée par :

$$P(x, z) = -\rho(\gamma x + g z) + C^{te} \quad (1.16)$$

Si $\gamma = 0$ alors $P = P(z)$ et $P + \rho g z = C^{te}$ (équation de la statique des fluides (1.9)).

- Exercice d'application :

Soit un réservoir rectangulaire ouvert de largeur $1,5 \text{ m}$ contenant $1,2 \text{ m}$ d'eau (Fig.1.17). Ce réservoir est accéléré horizontalement de $3,5 \text{ m/s}^2$. Quelle est la quantité d'eau renversée pendant son mouvement et quelles sont les pressions effectives maximale et minimale qui régneront au fond du réservoir ?
On donne : $H = 1,8 \text{ m}$; $h = 1,2 \text{ m}$; $L = 3 \text{ m}$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$.

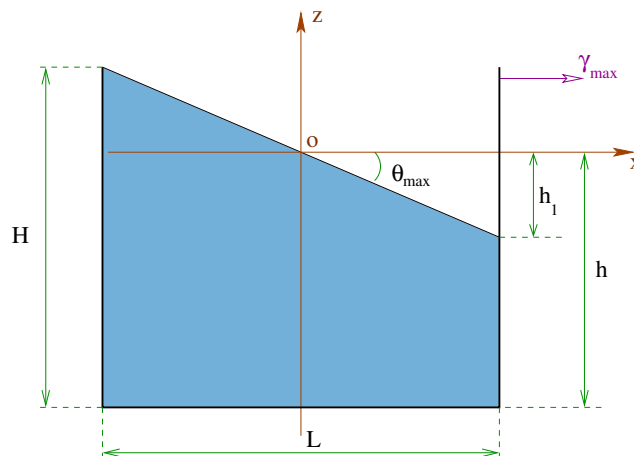


FIGURE 1.17: *Exercice d'application : Translation uniforme max.*

Solution :

- Calculons d'abord l'accélération maximale pour laquelle il n'y aura pas de renversement de l'eau :

Equation des surfaces isobares : $z = -\frac{\gamma}{g}x + C$

Conditions aux limites : l'origine O ($x = 0, z = 0$) appartient à la surface isobare (surface libre) donc $C = 0$ et alors : $z = -\frac{\gamma}{g}x$.

Si $x = -\frac{L}{2}$ et $z = H - h \Rightarrow \gamma = \gamma_{max}$

car on est à la limite du renversement, donc :

$$H - h = -\frac{\gamma_{max}}{g} \left(-\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \gamma_{max} = \frac{2g(H-h)}{L} = \frac{2 \cdot 10(1,8-1,2)}{3} = 4 \text{ m/s}^2.$$

Cette valeur étant supérieure à la valeur donnée ($3,5 \text{ m/s}^2$) donc il n'y aura pas d'eau qui se déverse !.

- Déterminons maintenant les pressions maximale et minimale au fond du réservoir pour $\gamma = 3,5 \text{ m/s}^2$ (Fig.1.18) :

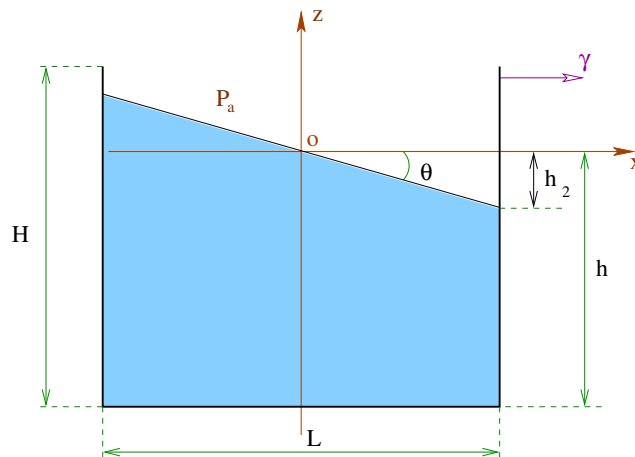


FIGURE 1.18: *Exercice d'application : Translation uniforme.*

La pression qui reigné au sein du fluide est donnée par :

$$P(x, z) = -\rho\gamma x - \rho g z + C$$

pour ($x = 0, z = 0$) on a $P = C^{te} = P_a \Rightarrow P_{eff}(x, z) = -\rho(\gamma x + g z)$

d'où les valeurs mini et maxi :

$$P_{eff\ min} = P_{eff} \left(\frac{L}{2}, -h \right) = -\rho \left(\gamma \frac{L}{2} - g h \right)$$

$$\Rightarrow P_{eff\ min} = -10^3 (3,5 \cdot 1,5 - 10 \cdot 1,2) = 6,75 \cdot 10^3 N/m^2.$$

$$P_{eff\ max} = P_{eff} \left(-\frac{L}{2}, -h \right) = \rho \left(\gamma \frac{L}{2} + g h \right)$$

$$\Rightarrow P_{eff\ max} = 10^3 (3,5 \cdot 1,5 + 10 \cdot 1,2) = 17,25 \cdot 10^3 N/m^2.$$

* Cet exercice peut encore se résoudre plus simplement de la manière suivante :

$$\tan \theta_{max} = \frac{\gamma_{max}}{g} \Rightarrow \gamma_{max} = g \tan \theta_{max} = g \frac{h_1}{L/2} = \frac{2g}{L} (H - h).$$

$$P_{eff\ min} = \rho g (h - h_2) = \rho g \left(h - \frac{L}{2} \tan \theta \right) = \rho g \left(h - \frac{L}{2} \frac{\gamma}{g} \right) = \rho \left(g h - \frac{\gamma L}{2} \right).$$

$$P_{eff\ max} = \rho g (h + h_2) = \rho g \left(h + \frac{L}{2} \tan \theta \right) = \rho g \left(h + \frac{L}{2} \frac{\gamma}{g} \right) = \rho \left(g h + \frac{\gamma L}{2} \right).$$

1.9.3 Equilibre d'un liquide soumis à une rotation uniforme

Considérons un réservoir de liquide pesant, homogène, tournant avec un mouvement uniforme autour d'un axe vertical avec la vitesse angulaire ω constante (Fig.1.19).

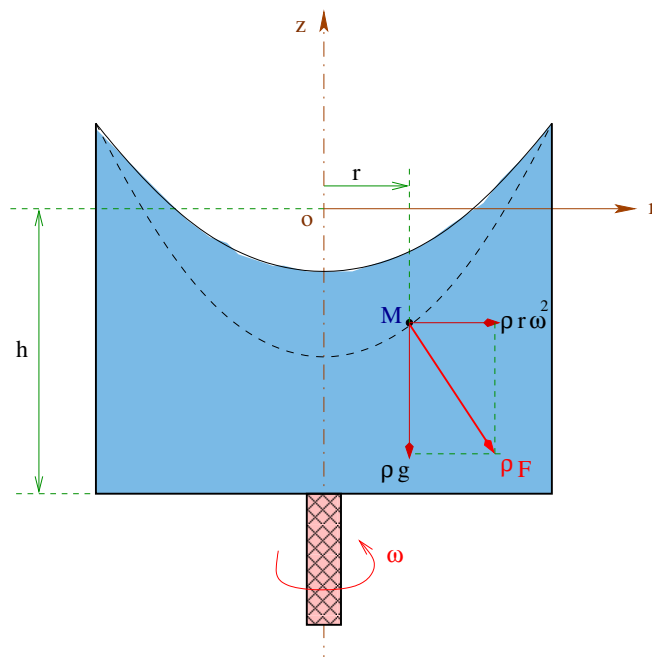


FIGURE 1.19: *Equilibre d'un liquide soumis à une rotation uniforme.*

En projetant l'équation (1.13) sur les deux axes, nous aurons :

$$\text{suivant } or : \rho r \omega^2 - \frac{\partial P}{\partial r} = 0$$

$$\text{suivant } oz : -\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

La différentielle totale de P est :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial z} dz = \rho r \omega^2 dr - \rho g dz$$

Surfaces isobares $\Rightarrow dP = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho r^2 \omega^2 - \rho g z = C^{te}$ donc

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C^{te} \quad (1.17)$$

Ce sont des paraboloides de révolution.

La pression en un point quelconque du fluide est donnée par :

$$P(r, z) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + C^{te} \quad (1.18)$$

Si $\omega = 0$ alors $P = P(z)$ et $P + \rho g z = C^{te}$ (équation de la statique des fluides (1.9)).

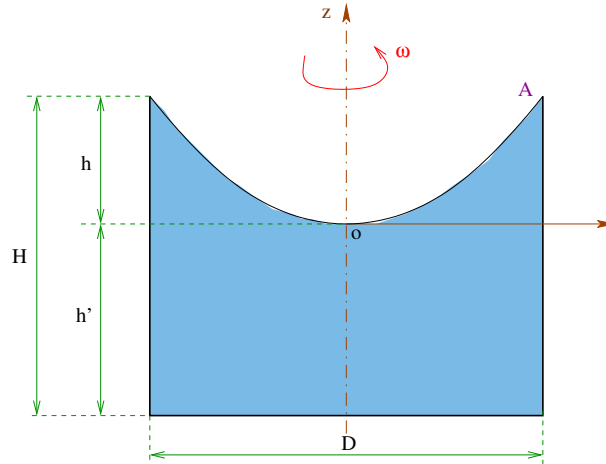
- Exercice d'application :

Un réservoir ouvert de 120 cm de diamètre et 180 cm de profondeur est rempli d'eau et tourne autour de son axe à 60 tr/mn.

1. Quelle est la quantité d'eau déversée ?
2. Calculer la profondeur de l'eau au niveau de l'axe.

Solution :

1- Le réservoir étant rempli d'eau, une quantité d'eau est déversée dès qu'il commence à tourner (Fig.1.20). Cette quantité V_{eau} est égale au volume de la parabole, donc :

FIGURE 1.20: *Exercice d'application : Réservoir soumis à une rotation.*

$$V_{eau} = V_{parabole} = \frac{1}{2}V_{cylindre} = \frac{1}{2} \pi R^2 h = \frac{\pi}{8} D^2 h$$

Déterminons maintenant l'inconnue h . Pour cela, écrivons l'équation de la surface libre de l'eau :

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C$$

Conditions aux limites : pour le point de coordonnées $(r = 0, z = 0)$, on a $C = 0$; et comme le point A appartient à la surface libre, alors :

$$h = \frac{\omega^2}{2g} \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \frac{\omega^2 D^2}{8g}$$

et enfin en remplaçant cette valeur dans l'expression du volume on aura :

$$V_{eau} = \frac{\pi}{64} \frac{\omega^2 D^2}{g}$$

A.N : $V_{eau} = \frac{\pi}{64} \frac{(2\pi)^2 1,2^2}{9,81} \simeq 0,41 \text{ m}^3.$

2- La profondeur de l'eau au niveau de l'axe est :

$$h' = H - h = H - \frac{\omega^2 D^2}{8g}$$

A.N : $h' = 1,8 - \frac{(2\pi)^2 1,2^2}{8 \cdot 9,81} = 1,075 \text{ m}.$

1.10 Exercices

S1 : Soit le solide (cône de révolution) non homogène ci-dessous. La paroi de la partie creuse, contenant de l'air, est de poids négligeable. La masse volumique du métal étant 8 fois celle de l'eau, étudier le comportement de ce solide immergé dans l'eau. Le volume de métal est défini par la cote z variable. (volume du cône = $\frac{1}{3}$ volume du cylindre).

Examiner le cas où $z = \frac{H}{3}$ et déterminer la hauteur h de la surface libre de l'eau.

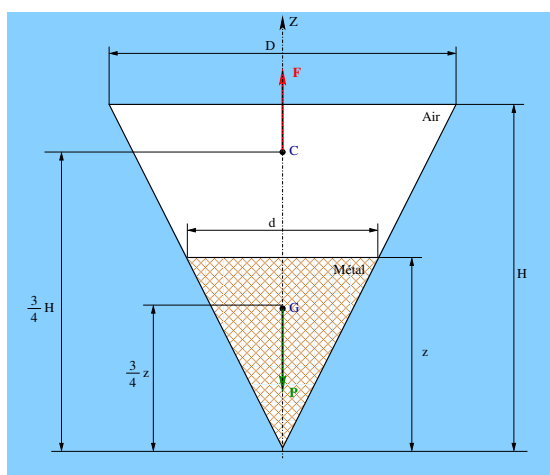


FIGURE 1.21: S1.

Rép : $F = \frac{\pi}{12} \rho g \left(\frac{D}{H}\right)^2 h^3$;

$h = \frac{2}{3} H \left(OC = \frac{H}{2}\right)$.

S2 : Déterminer la poussée sur le fond circulaire ($D = 200 \text{ mm}$) du réservoir de la figure ci-dessous :

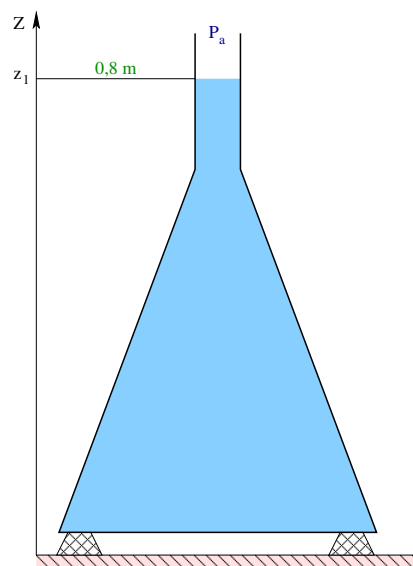


FIGURE 1.22: S2.

Rép : 251, 2 N.

S3 : Déterminer la tension T du fil très fin qui supporte une masse d'acier de 20 kg plongée dans l'eau (voir figure). On donne : $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg/m}^3$.

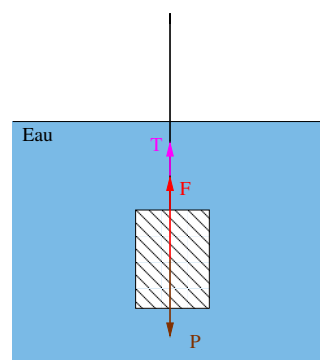


FIGURE 1.23: S3.

Rép : 174, 4 N.

S4 : Dans deux récipients remplis d'un même liquide règnent des pressions différentes. Les récipients sont reliés par deux manomètres différentiels.

Quelle sera la différence de niveau h_1 dans le manomètre du bas ?.

On donne : $\rho_1, \rho_2, \rho_3, h_2$ et a .

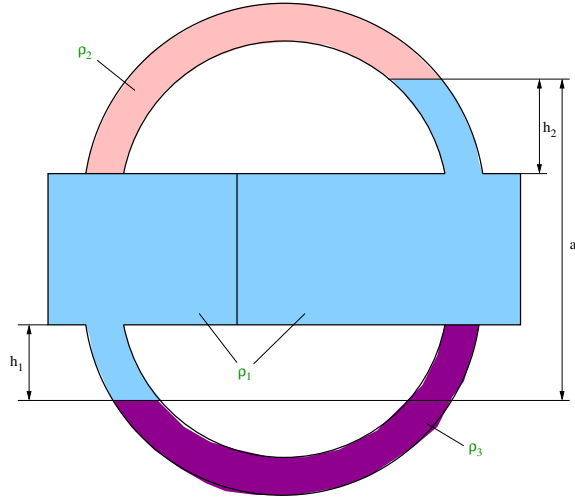


FIGURE 1.24: S4.

Rép : $h_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_3 - \rho_1} h_2$.

S5 : Calculer la pression de l'eau au point bas d'une conduite de distribution d'eau. L'altitude de la surface libre dans le château d'eau est $z_1 = 195\text{ m}$; l'altitude du point bas est $z_2 = 82\text{ m}$.

A quelle pression effective est soumise la paroi de la conduite ?

On donne : $g = 10\text{ m/s}^2$, pression atmosphérique $P_a = 10\text{ N/cm}^2$.

Rép : $12,3 \cdot 10^5\text{ N/m}^2$; $11,3 \cdot 10^5\text{ N/m}^2$.

S6 : Déterminer le module et la direction de la force résultante F exercée par l'eau sur une paroi cylindrique AB de rayon R et de largeur b .

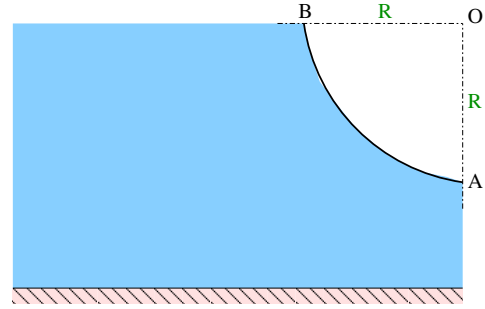


FIGURE 1.25: S6.

Rép : $F = \frac{1}{2} \rho g R^2 b \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}$; $\varphi = 57,5^\circ$.

S7 : Soit le vérin hydraulique ci-dessous. Le système étant en équilibre et les pistons sont sur la même horizontale. Si on applique un effort F_1 de 100 N sur le piston de la pompe, calculer la charge qu'il est possible de soulever avec le vérin. On donne : $D/d = 10$.

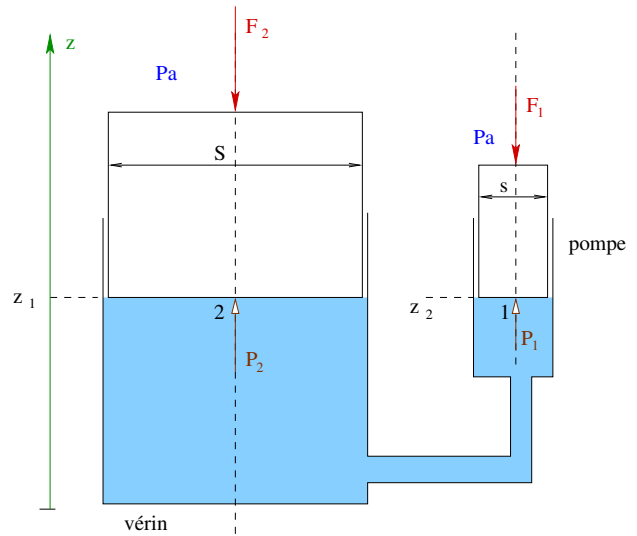


FIGURE 1.26: S7.

Rép : $F_2 = 10\text{ kN}$.

S8 : Déterminer la masse volumique ρ de l'objet cylindrique qui flotte à l'interface huile/eau de la figure ci-dessous :

On donne : $h = 50\text{ cm}$; $R = 15\text{ cm}$; densité de l'huile : $d = 0,87$.

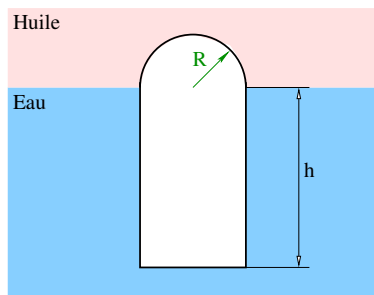


FIGURE 1.27: S8.

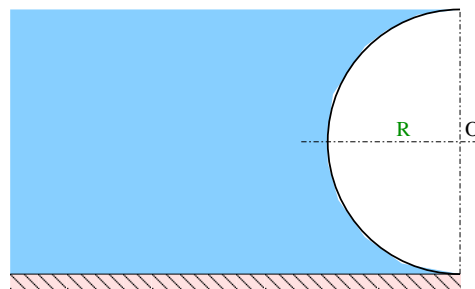


FIGURE 1.28: S11.

Rép : $\rho = 978,33 \text{ kg/m}^3$.

S9 : Un cube de côté a et de masse volumique ρ_c est plongé dans un récipient contenant deux fluides immiscibles de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 tel que $\rho_2 < \rho_1$. Trouver la hauteur du cube immergée dans le liquide de masse volumique ρ_1 .

Rép : $h = \frac{\rho_c - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} a$.

S10 : Soit un cube d'aluminium de 15 cm de côté est suspendu par une corde. Le cube est immergé moitié dans de l'huile de densité $0,8$ et moitié dans de l'eau. Trouver la tension de la corde si la masse volumique de l'aluminium est $\rho_a = 2640 \text{ kg/m}^3$.

Rép : $T = 57,61 \text{ N}$.

S11 : Calculer la résultante des forces F exercées par l'eau sur la paroi cylindrique de rayon $R = 0,5 \text{ m}$ et de largeur (perpendiculaire au papier) $b = 2 \text{ m}$. On prendra : $g = 10 \text{ m/s}^2$. Expliquez comment déterminer les centres de poussées des composantes horizontales et verticale.

Rép : $F = 1,27 \cdot 10^4 \text{ N}$.

S12 : Un réservoir ouvert de 120 cm de diamètre et 180 cm de profondeur est rempli d'eau et tourne autour de son axe à 60 tr/mn .
1- Quelle est la quantité d'eau déversée ?
2- Calculer la profondeur de l'eau au niveau de l'axe.

Rép : 1) $0,41 \text{ m}^3$; 2) $1,075 \text{ m}$.

S13 : Un cylindre en bois de diamètre $D = 1 \text{ m}$ et de hauteur $h = 2 \text{ m}$ est fixé au fond d'un réservoir d'eau par une corde. Calculer la tension de la corde sachant que $\rho_e = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\rho_b = 819 \text{ kg/m}^3$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$.

A un instant donné on coupe la corde pour libérer le cylindre. A l'état d'équilibre, déterminer le volume du cylindre qui sort de l'eau (volume émergé).

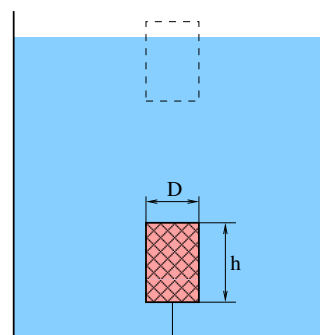


FIGURE 1.29: S13.

Rép : $T = 2843,14 N$; $0,284 m^3$.

S14 : Un compartiment rectangulaire ouvert, de $10 m$ par $4 m$ de base et $5 m$ de profondeur, pèse 54 tonnes et flotte dans l'eau douce ($\rho_e = 10^3 kg/m^3$).

- 1- De combien s'enfonce-t-il ?
- 2- Si l'eau a $5 m$ de profondeur, quel poids de pierres faut-il placer dans le compartiment pour le faire reposer sur le fond ?

Rép : 1) $1,35 m$; 2) $1460 kN$.

S15 : Un bassin contenant de l'eau sur une profondeur $h = 9 m$ est fermé par une porte verticale constituée par 3 panneaux plans superposés.

- 1-Quelle doit être la hauteur de chaque panneau pour que chacun supporte le même effort total.
- 2-Chaque panneau doit être renforcé au centre de poussée. Calculer la position des ces renforts.
- 3- Quelle est la force par unité de largeur agissant sur chaque panneau ?

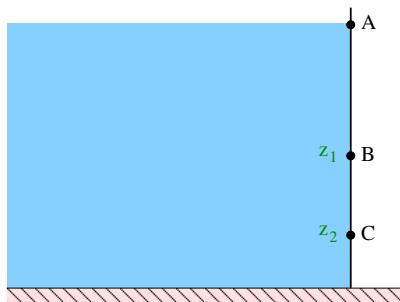


FIGURE 1.30: S15.

- Rép :** 1) $5,20 m$; 2) $15 m$; 1, $66 m$.
 2) $3,46 m$; $6,32 m$; $8,20 m$;
 3) $1,35 \cdot 10^5 N$.

S16 : Déterminer la pression à l'intérieure de la conduite où circule un fluide de masse volumique ρ . Le manomètre est rempli de mercure de masse volumique ρ_0 .

- A.N : $\rho = 10^3 kg/m^3$; $g = 9,805 m/s^2$;
 $\rho_0 = 13590 kg/m^3$; $P_a = 1 bar$;
 $h_1 = 0,3245 m$; $h_2 = 0,1925 m$.

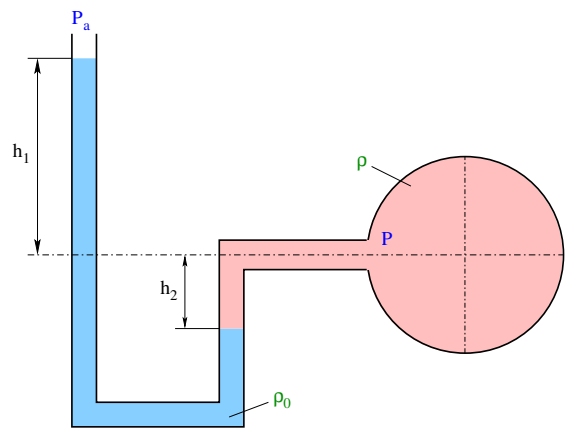


FIGURE 1.31: S16.

Rép : $1,67 bar$.

S17 : Un réservoir cylindrique ouvert, de $2 m$ de hauteur et de $1 m$ de diamètre contient $1,5 m$ d'eau. Si le réservoir tourne autour de son axe :

- 1- Déterminer ω_{max} qu'on peut atteindre sans renverser d'eau ?
- 2- Quelle sera la pression effective en C et D au fond du réservoir si $\omega = 6 rd/s$.
- 3- On ferme le réservoir et on soumet l'espace d'air à une pression de $= 1,09 kgf/cm^2$. Déterminer P_C et P_D en kgf/cm^2 pour $\omega = 12 rd/s$.
- 4- Le réservoir restant fermé, quelle sera la valeur de ω pour qu'il y ait une hauteur d'eau nulle au point C .

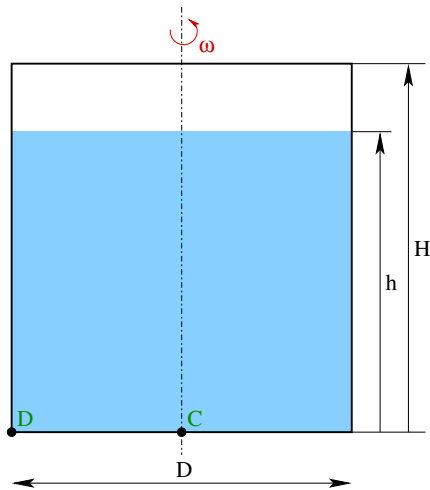


FIGURE 1.32: S17.

- Rép :** 1) $8,94 \text{ rd/s}$.
 2) $1,275 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$; $1,725 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$.
 3) $1,156 \text{ kg/cm}^2$; $1,336 \text{ kg/cm}^2$.
 4) $17,88 \text{ rd/s}$.

S18 : Un réservoir cylindrique ouvert, de 1 m de hauteur et $0,6 \text{ m}$ de diamètre est rempli d'eau à une hauteur de $0,7 \text{ m}$ à partir de son fond.

A- S'il est mis en translation uniformément accélérée parallèlement à son fond, en négligeant tout frottement, déterminer :

- 1- L'accélération maximale qui permet d'éviter le déversement de l'eau ainsi que les pressions effectives minimale et maximale qui régneront au fond du réservoir.
 - 2- L'inclinaison de la surface libre pour une accélération de $5,77 \text{ m/s}^2$ ainsi que les pressions effectives maximale et minimale correspondantes qui régneront au fond du réservoir.
- On prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$.

B- Le même réservoir est mis en rotation uniforme autour de son axe de révolution. Déterminer :

- 1- ω_{max} qui permet d'éviter le déversement de l'eau.
- 2- Les pressions effectives minimale et maxi-

male qui régneront au fond du réservoir pour $\omega = \omega_{max}$.

Rép :

- A.1) 10 m/s^2 ; $0,4 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$; 10^4 N/m^2 .
 A.2) 30° ; $0,527 \text{ N/m}^2$; $0,873 \text{ N/m}^2$.
 B.1) $11,547 \text{ rd/s}$.
 B.2) $0,4 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$; 10^4 N/m^2 .

S19 : Soit un réservoir d'eau fermé soumis à la pression $P_0 = 14 \text{ kPa}$. En négligeant la pression à droite de la vanne AB , déterminer la résultante des forces exercée sur la vanne de hauteur H et de largeur b (perpendiculaire au papier) ainsi que son centre de poussée.

On donne : $H = 1 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$.

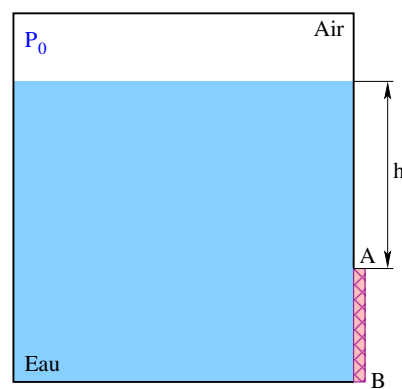


FIGURE 1.33: S19.

Rép : 39 kN ; $0,521 \text{ m}$.

S20 : Calculer le moment s'exerçant sur la trappe (de largeur $b = 1 \text{ m}$) et préciser la position des centres de poussées.

On donne :

- $Z_1 = 1 \text{ m}$, $Z_2 = 0,8 \text{ m}$, $l = 0,3 \text{ m}$,
 $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_2 = 900 \text{ kg/m}^3$.

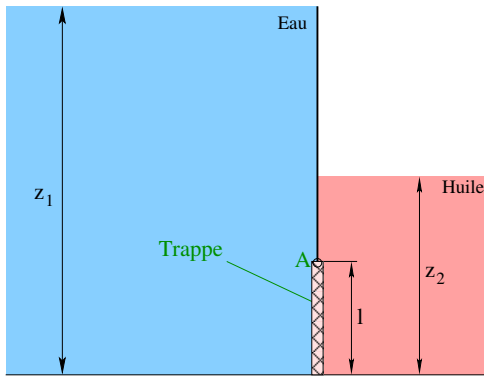


FIGURE 1.34: S20.

Rép : 121,5 N.m ; 0,1588 m ; 0,1615 m.

S21 : Calculer la force résultante due à l'action de l'eau sur la surface triangulaire CD ($b \times h$) représentée sur la figure ci-dessous et déterminer son centre de poussée. Le sommet du triangle étant en C . On donne :

$H = 1\text{ m}$; $\alpha = 45^\circ$; $g = 10\text{ m/s}^2$; $b = 1,2\text{ m}$; $h = 1,8\text{ m}$.

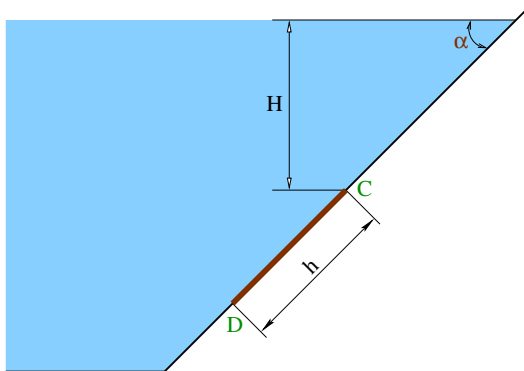


FIGURE 1.35: S21.

Rép : 20 kN ; 1,268 m à partir de C ou 2,682 m à partir de A .

S22 : Un tube très fin de section uniforme est courbé en forme de carré de côté a et rempli avec un même volume de trois liquides pesants, immiscibles, de densités ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 tels

que $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Dans le cas de la disposition ci-dessous, déterminer la condition sur ρ_2 pour que le système soit en équilibre.

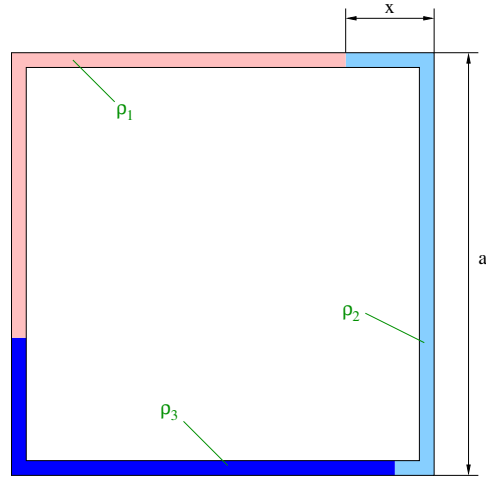


FIGURE 1.36: S22.

Rép : $\frac{1}{3}(2\rho_1 + \rho_3) < \rho_2 < \frac{1}{3}(2\rho_3 + \rho_1)$.

S23 : Soit un réservoir d'eau $ACDB$ sur lequel on fixe un conduit de section s dont le niveau est au point E (figure ci-dessous) :

En négligeant le poids du conduit et celui du réservoir déterminer :

- 1- la résultante des forces F_{CD} exercée sur la surface CD ainsi que sont point d'application ;
- 2- la force totale F_{BD} s'exerçant sur le fond du réservoir ;
- 3- le poids total de l'eau.
- 4- En comparant les résultats trouvés en (2) et (3) expliquer la différence ?

On donne : $s = 0,1\text{ m}^2$; $H = 3,6\text{ m}$;

$h = 1,8\text{ m}$; $L = 6\text{ m}$; $g = 10\text{ m/s}^2$

et $b = 2,4\text{ m}$ (largeur du réservoir).

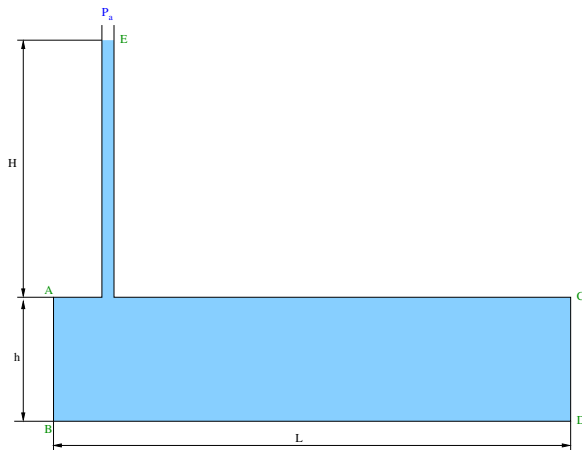


FIGURE 1.37: S23.

Rép : 1) $194,4 \text{ kN}$; $0,96 \text{ m}$ à partir de C .
2) $777,6 \text{ kN}$. 3) $262,8 \text{ kN}$.

S24 : Un iceberg de masse volumique 912 kg/m^3 flotte dans l'océan de masse volumique 1025 kg/m^3 . La partie émergée de l'iceberg (qui sort de l'eau) a un volume de 600 m^3 .

- 1- Quelle est le volume total de l'iceberg ?
- 2- Un ours polaire de masse $m \text{ kg}$ monte sur cet iceberg et le fait descendre d'un volume de $0,2 \text{ m}^3$ dans l'eau. Quel est la masse de cet ours ?

Rép : 1) $5442,47 \text{ m}^3$. 2) $204,11 \text{ kg}$.

S25 : Soit un réservoir rectangulaire ouvert de largeur $1,5 \text{ m}$ contenant $1,2 \text{ m}$ d'eau. Ce réservoir est accéléré horizontalement de $3,5 \text{ m/s}^2$. Quelle est la quantité d'eau renversée pendant son mouvement et quelles sont les pressions effectives maximale et minimale qui régneront au fond du réservoir ?

On donne : $H = 1,8 \text{ m}$; $h = 1,2 \text{ m}$; $L = 3 \text{ m}$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$.

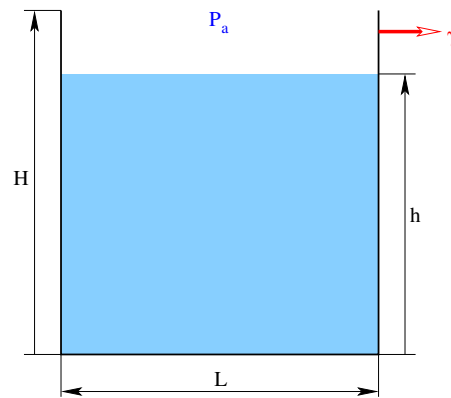


FIGURE 1.38: S25.

Rép : 0 m^3 ; $6,75 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$; $17,25 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$.

S26 : La porte rectangulaire AB est articulée en A . Sa longueur est $AB = L = 1,5 \text{ m}$ et sa largeur est $W = 2 \text{ m}$.

- 1- Calculer la résultante des forces F_R exercées par l'eau sur la porte AB .
- 2- Calculer la force F_B à appliquer au point B pour maintenir la porte fermée.

On donne : $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$,
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $H = 3 \text{ m}$ et $\theta = 25^\circ$.

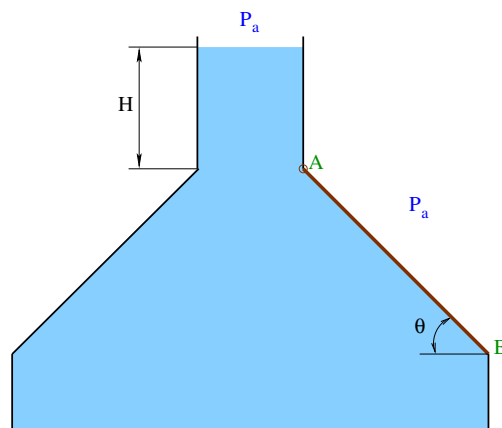


FIGURE 1.39: S26.

Rép : 1) $97,52 \text{ kN}$. 2) $50,32 \text{ N}$.

S27 : Soit une porte trapézoïdale $ABDE$ se trouvant comme une paroi d'un réservoir

fermé et complètement rempli d'eau.

Sous l'action de la force Q appliquée au point K , cette porte peut pivoter autour de DE . En supposant que le poids de la porte est négligeable et que l'on lit sur le manomètre à mercure une dénivellation de 90 cm de mercure :

- 1- Calculer la valeur de la force de pression exercée par l'eau sur la porte ainsi que son point d'application.
- 2- Déterminer la valeur de la force Q à appliquer pour maintenir la porte fermée.

On donne :

$$P_a = 10^5\text{ Pa}; h_1 = 90\text{ cm}; h_2 = 60\text{ cm};$$

$$l_1 = 8\text{ m}; l_2 = 7\text{ m}; ED = b_1 = 12\text{ m};$$

$$AB = b_2 = 4\text{ m}; \alpha = 45^\circ; \rho = 10^3\text{ kg/m}^3;$$

$$\rho_m = 13600\text{ kg/m}^3.$$

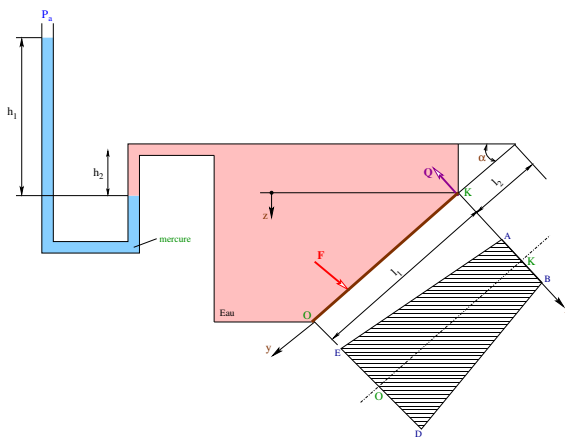


FIGURE 1.40: S27.

Rép : 1) $12,73 \cdot 10^6\text{ N}$; 3,817 à partir de K .
2) $6,65 \cdot 10^6\text{ N}$.

S28 : Déterminer la pression exercée sur le fond du réservoir de la figure ci-dessous.

On donne : $\rho_e = 10^3\text{ kg/m}^3$, $\rho_h = 900\text{ kg/m}^3$,
 $g = 9,81\text{ m/s}^2$, $h = 3,05\text{ m}$ et $d = 0,9\text{ m}$.

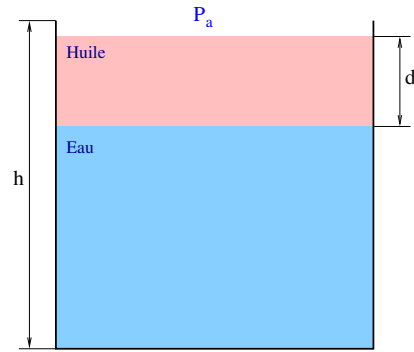


FIGURE 1.41: S28.

Rép : $1,29 \cdot 10^5\text{ Pa}$.

S29 : Les récipients A et B contiennent de l'eau aux pressions respectives de $2,8$ et $1,4\text{ bar}$. Déterminer la dénivellation h du mercure dans le manomètre différentiel.

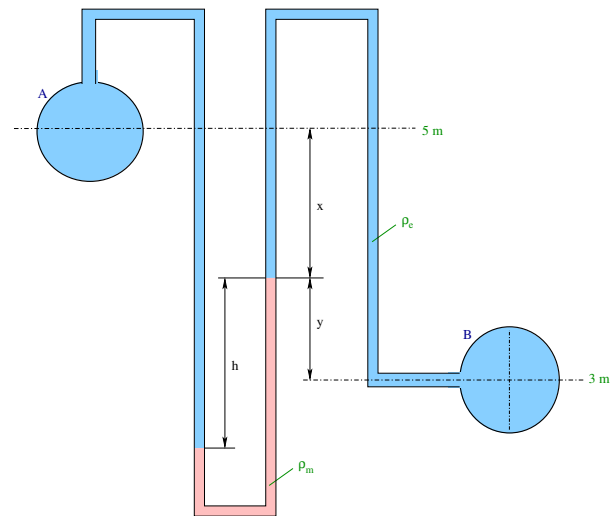


FIGURE 1.42: S29.

Rép : $1,269\text{ m}$.

S30 : Pour maintenir un objet ayant un volume de 170 dm^3 immergé dans l'eau, il nous faut exercer une force $F_1 = 265\text{ N}$. Nous n'avons besoin que de $F_2 = 157\text{ N}$ pour maintenir ce même objet immergé dans un autre

liquide.

1- Quelle est la masse volumique de ce liquide ?

2- Que se passe-t-il si on supprime la force F_2 ? justifier votre réponse. Déterminer alors le volume émergé de l'objet en dm^3 .

Rép : 1) $936,47 \text{ kg/m}^3$. 2) $16,76 \text{ dm}^3$.

S31 : Soit un réservoir de $6,096 \text{ m}$ de profondeur et $2,133 \text{ m}$ de largeur dans lequel repose trois fluides immiscibles. L'épaisseur de la couche d'eau ($\rho_e = 999,65 \text{ kg/m}^3$) est de $1,829 \text{ m}$, celle de la couche de mercure ($\rho_m = 13552,92 \text{ kg/m}^3$) est de $1,219 \text{ m}$ et enfin celle de la couche d'huile ($\rho_h = 881,10 \text{ kg/m}^3$) est de $2,438 \text{ m}$. En prenant la surface libre comme référence et $g = 10 \text{ m/s}^2$:

1- Calculer la résultante des forces F exercées sur la paroi du réservoir.

2- Déterminer le centre de poussée de cette résultante.

Rép : 1) $493,5 \text{ kN}$. 2) $4,175 \text{ m}$.

S32 : La vanne-clapet représentée ci-dessous est articulée en O . Sa forme est donnée par l'équation : $x = \frac{y^2}{4}$.

1- Calculer la résultante des forces horizontale F_x et verticale F_y exercées par l'eau sur cette vanne ainsi que leurs centres de poussées.

2- Calculer le moment nécessaire pour la maintenir dans la position représentée.

On donne : $g = 10 \text{ m/s}^2$; $h = 2 \text{ m}$; $b = 1,5 \text{ m}$

(largeur de la vanne).

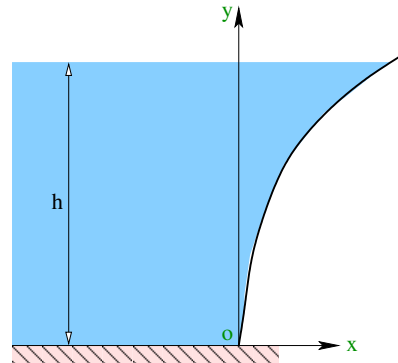


FIGURE 1.43: S32.

Rép : 1) $xxx \text{ kN}$. 2) 23000 N.m .

S33 : Déterminer les pressions effectives exercées sur la vanne de retenue d'eau schématisée ci-dessous.

On donne : $g = 10 \text{ m/s}^2$, $P_a = 10^5 \text{ N/m}^2$.

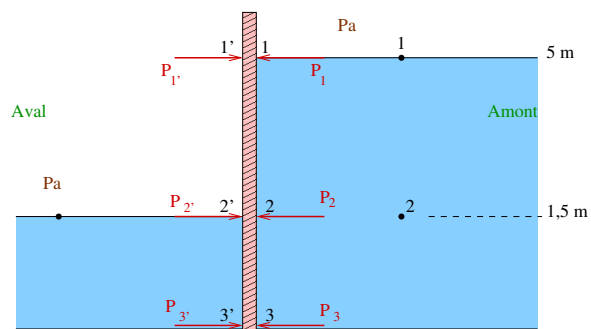


FIGURE 1.44: S33.

Rép : 0 ; $0,35 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$; $0,35 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

Écoulements idéaux

2.1 Méthodes de description d'un écoulement

Pour la description mathématique d'un écoulement on dispose de deux méthodes différentes:

2.1.1 Description Lagrangienne

Le mouvement d'une particule de fluide étiquetée est étudié (Fig.2.1). Le vecteur lieu \vec{r} de la particule à un temps initial t_0 est donc utilisé comme étiquette. L'image de l'écoulement est complète quand on connaît le vecteur lieu \vec{r} de la particule et qui est une fonction de \vec{r}_0 et du temps t : $\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0)$.

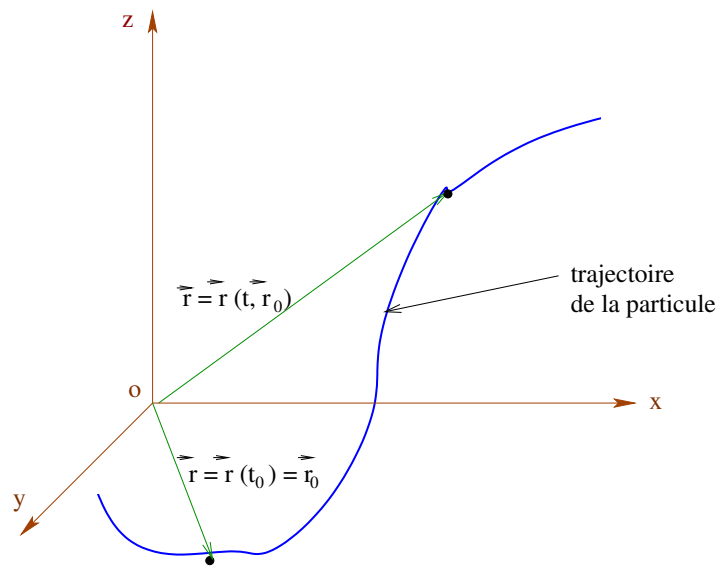


Figure 2.1: *Description Lagrangienne.*

2.1.2 Description Eulérienne

Par cette méthode, toutes les grandeurs d'écoulement (vitesse q , pression P , etc...) sont données comme fonctions du vecteur lieu \vec{r} et du temps t . Au lieu de suivre une particule le long de sa trajectoire, l'étude est concentrée sur un point donné de l'espace. A chaque instant, les différentes particules passent par le point considéré et on étudie en ce point les variations temporelles des grandeurs physiques (P, q, \dots).

Donc dans la description lagrangienne les coordonnées x, y, z des particules sont fonctions du temps mais elles sont indépendantes dans la description eulérienne.

2.2 Ecoulement permanent et non permanent

Dans la description eulérienne nous avons les variables indépendantes x, y, z et t . Si en chaque point de l'espace l'écoulement est indépendant du temps, il est alors appelé *permanent* (ou *stationnaire*). S'il varie avec le temps en un point, l'écoulement est dit *non permanent* (ou *instationnaire*).

2.3 Ligne de courant -Tube de courant

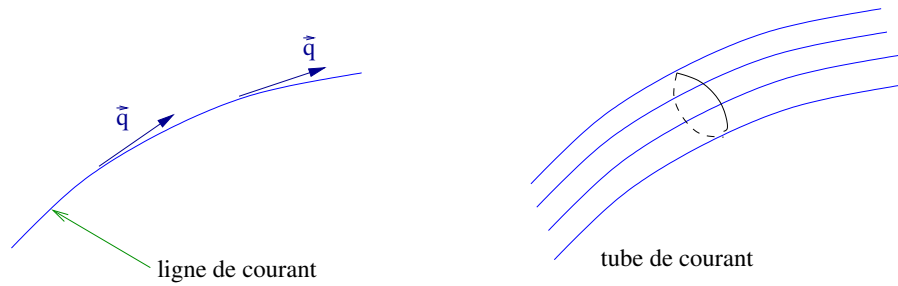
A l'instant t , on peut définir en chaque point de l'espace le vecteur \vec{q} qui est celui de la vitesse de la particule fluide qui y passe à ce moment. L'ensemble de ces vecteurs constitue un *champ de vitesses*.

On appelle ligne de courant, une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse $\vec{q}(u, v, w)$ en ce point.

Les lignes de courant sont donc définies par les équations suivantes:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (2.1)$$

* Toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe fermée constituent un *tube de courant* (Fig.2.2). Si le tube est de section infiniment petite, il est alors appelé *filet de courant*.

Figure 2.2: *Ligne de courant - Tube de courant.*

Deux lignes de courant ne peuvent pas avoir un point d'intersection sauf au point d'arrêt ($q = 0$). Autrement, on aura pour une même particule une vitesse avec deux directions différentes!

2.4 Fonction de courant

Elle fournit une mesure du débit-masse dans l'écoulement. Elle représente les lignes de courant sous la forme: $\psi(x, y) = C^{te}$ pour un écoulement plan (bidimensionnel) dans le plan xy . Elle est définie telle que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.2)$$

On a: $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$

Or sur une ligne de courant nous avons d'après (2.1): $v dx = u dy$

alors: $d\psi = -u dy + u dy = 0$ et de ce fait nous pouvons conclure que:

La fonction de courant $\psi = C^{te}$ le long d'une ligne de courant.

2.5 Ecoulement axisymétrique

Un écoulement est dit axisymétrique si les composantes du vecteur vitesse référées à des coordonnées cylindriques r, z et θ sont toutes *indépendantes de l'angle θ* .

2.6 Dérivée particulaire

Pour connaître le taux de variation de la quantité de mouvement d'une particule, on doit la suivre dans son déplacement (description Lagrangienne) pour tenir compte de toute variation spatiale et temporelle. D'où la notion de dérivée particulaire:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.3)$$

Elle est traitée comme un opérateur différentiel applicable sur une fonction scalaire ou vectoriel.

$\frac{D}{Dt}$: représente le taux de variation par rapport au temps en suivant la particule dans son mouvement;

$\frac{\partial}{\partial t}$: représente le taux de variation local;

$\vec{q} \cdot \vec{\nabla}$: représente le taux de variation convectif.

2.7 Volume de contrôle

C'est un volume arbitraire (région dans l'écoulement) perméable (le fluide passe librement à travers sa surface) mais fixe dans l'écoulement.

2.8 Equation de conservation de la masse

2.8.1 Forme différentielle

Cette équation exprime la conservation de la masse contenue dans un volume élémentaire dV (description Lagrangienne) ou encore pour un élément fixe (description Eulérienne): la diminution de masse contenue dans le volume dV est égale à la masse ayant traversée la surface extérieure de l'élément (débit sortant).

En utilisant cette seconde description, nous aurons (Fig.2.3):

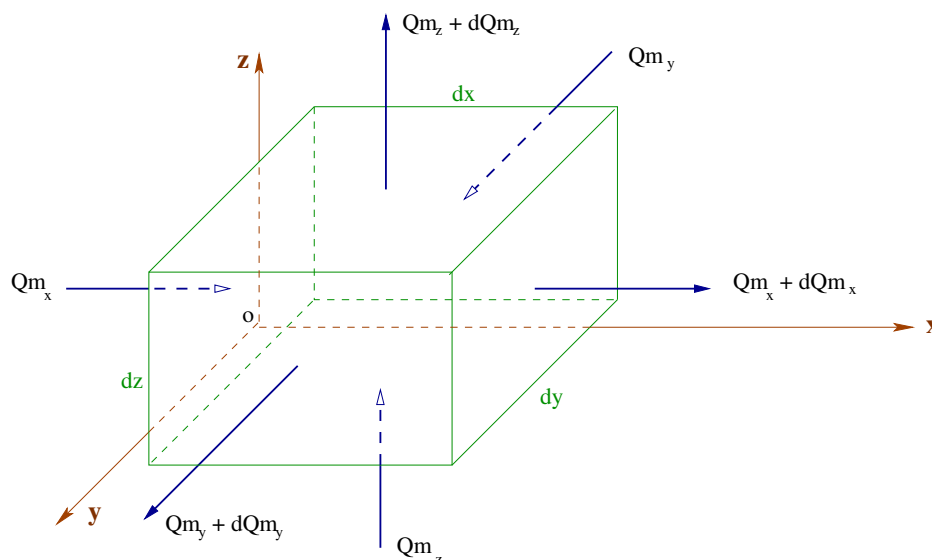


Figure 2.3: Flux à travers la surface de l'élément de fluide.

La diminution de la masse à travers le volume de contrôle est donnée par:

$$Q_m = \frac{dm}{dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (*)$$

et d'autre part, d'après la figure (2.3) on a:

$$\frac{dm}{dt} = Q_m|_{x+dx} - Q_m|_x + Q_m|_{y+dy} - Q_m|_y + Q_m|_{z+dz} - Q_m|_z \quad (**)$$

Le vecteur vitesse étant défini par ses composantes $\vec{q}(u, v, w)$ on a alors les débits massiques qui passent à travers chaque facette du cube:

$$Q_m|_x = \rho u dy dz; \quad Q_m|_y = \rho v dx dz \quad \text{et} \quad Q_m|_z = \rho w dx dy$$

$$Q_m|_{x+dx} = Q_m|_x + \frac{\partial Q_m|_x}{\partial x} dx = Q_m|_x + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz$$

$$Q_m|_{y+dy} = Q_m|_y + \frac{\partial Q_m|_y}{\partial y} dy = Q_m|_y + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz$$

$$Q_m|_{z+dz} = Q_m|_z + \frac{\partial Q_m|_z}{\partial z} dz = Q_m|_z + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz$$

en combinant les équations (*) et (**) nous aurons:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

d'où l'équation de conservation de la masse ou encore l'équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

En coordonnées cylindriques $\vec{q}(u_r, v_\theta, w_z)$ l'équation (2.4) devient, en posant: $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

L'équation (2.4) s'écrit encore sous forme plus compacte:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = 0 \quad (2.6)$$

et puisque:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \rho$$

nous aurons alors:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0 \quad (2.7)$$

Cette équation générale peut s'utiliser selon les formes particulières suivantes:

*** Cas d'un écoulement permanent:**

La masse volumique en un point est constante même si sa valeur peut varier d'un point à un autre.

C'est-à-dire: $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ d'où:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

*** Cas d'un écoulement incompressible:**

La masse volumique reste constante quelque soit les valeurs de la pression et de la température au sein du fluide.

C'est-à-dire: $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ d'où:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

2.8.2 Forme intégrale

*** Cas particulier:**

Considérons en premier lieu un écoulement stationnaire d'un fluide compressible dans une conduite de section S variable le long de sa fibre moyenne (Fig.2.4).

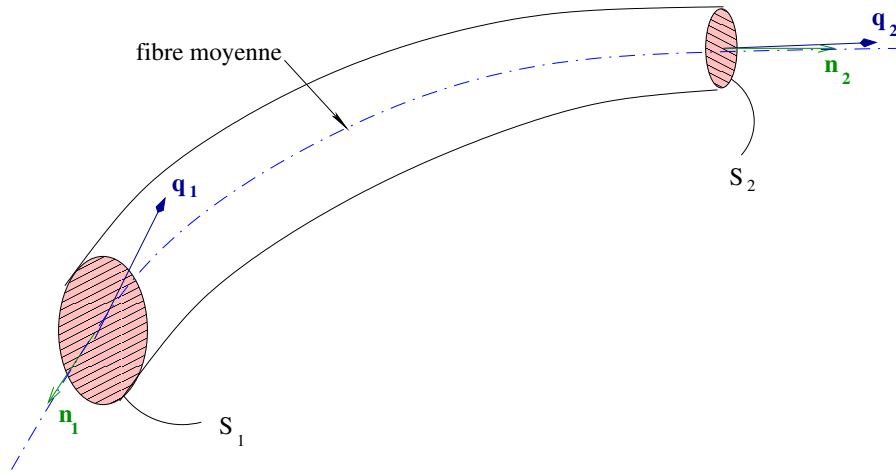


Figure 2.4: *Equation de continuité. Forme intégrale.*

Si la vitesse \vec{q} et la densité ρ sont constantes (ou uniformes) dans les sections S_1 et S_2 , l'écoulement est unidimensionnel et nous pouvons écrire que la variation du débit massique est constante: $Q_{m2} - Q_{m1} = 0$ d'où:

$$\rho_1 q_1 S_1 = \rho_2 q_2 S_2 \quad (2.10)$$

- Si le fluide est incompressible alors: $\rho = C^{te}$ et donc:

$$q_1 S_1 = q_2 S_2 \Leftrightarrow Q_{v1} = Q_{v2} \quad (2.11)$$

Q_v étant le *débit volumique* (ou *volumétrique*).

Donc $q = \frac{Q_v}{S}$ est la *vitesse moyenne* si le profil de vitesse n'est pas uniforme dans la section de passage.

- Exemple:

Un piston de pompe à eau de diamètre $D = 60 \text{ cm}$ se déplace à la vitesse $q_1 = 1.5 \text{ m/s}$. Quelle est la vitesse de l'eau dans la conduite de refoulement de la pompe dont le diamètre est $d = 40 \text{ cm}$?.

Le débit déplacé par le piston étant égal à celui qui passe dans la conduite de refoulement, on a alors :

$$Q_{v1} = Q_{v2} \Leftrightarrow q_1 S_1 = q_2 S_2 \Rightarrow q_2 = q_1 \frac{S_1}{S_2} = q_1 \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

$$q_2 = 1,5 \left(\frac{6}{4}\right)^2 \quad \text{d'où :} \quad q_2 = 3,375 \text{ m/s.}$$

* Cas général :

L'équation (2.6) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int_v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) \right] dv = 0$$

car le volume de contrôle ne dépend pas de t . En utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski (Annexe A.9), nous aurons :

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_s \rho (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

et par suite, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho dv}_{(1)} + \underbrace{\int_s \rho (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS}_{(2)} = \frac{Dm}{Dt} = 0 \quad (2.12)$$

La première partie (1) de l'équation (2.12) représente le *taux de variation locale* de m à travers le volume de contrôle v ; la seconde partie (2) représente quant-à-elle, le *débit masse* (ou *flux*) à travers la surface de contrôle S .

- Remarques :

1. L'équation (2.12) représente la continuité de masse dans l'écoulement sous forme intégrale. Pour avoir la conservation de la masse dans un volume de contrôle (v.c) la somme des taux de changement local de m et du débit masse net Q_m doit être nulle.
2. Si les variables ρ et \vec{q} sont uniformes alors :

$$Q_m = \rho q S \quad (2.13)$$

3. Puisque (v.c) est indépendant du temps, la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ dans (2.12) s'applique uniquement à l'intégrant ρdv .
4. Si l'écoulement est permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), l'équation (2.12) devient :

$$\int_s \rho (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (2.14)$$

5. Le (v.c) peut prendre une forme quelconque dans l'analyse de l'écoulement. Son choix est important pour obtenir une solution simple du problème.

- Exemple d'application :

Un jet d'eau de diamètre d sort d'un réservoir de diamètre D . Si on suppose que la vitesse d'écoulement dans le jet est donnée par $q = \sqrt{2gh}$. Trouver le temps nécessaire pour que la surface du réservoir s'abaisse de la hauteur h_1 à h_2 (Fig.2.5). La masse volumique et la vitesse sont supposées uniformes à travers la section de sortie.

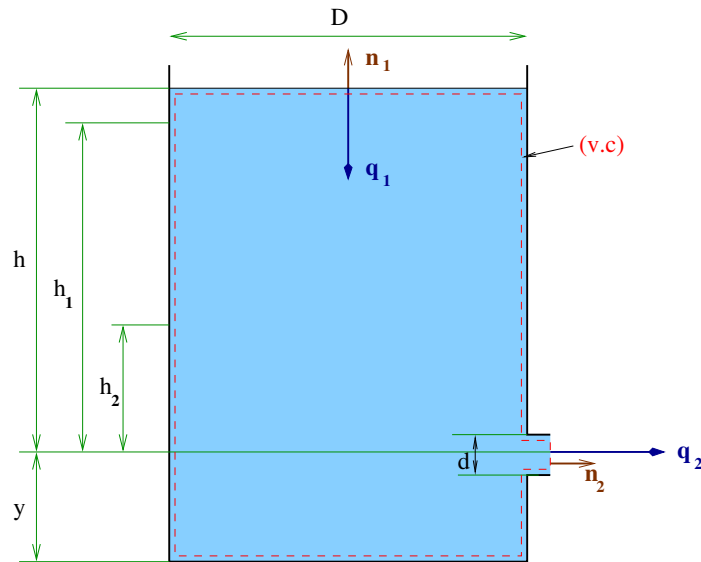


FIGURE 2.5: *Vidange d'un réservoir.*

Le débit masse net à travers la section de contrôle est :

$$Q_m = \int_{s_1} \rho (\vec{q}_{1r} \cdot \vec{n}_1) dS + \int_{s_2} \rho (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) dS$$

$$Q_m = -\rho q_{1r} S_1 + \rho q_2 S_2 = -\rho q_{1r} S_1 + \rho \sqrt{2gh} S_2$$

Puisque la surface S_1 se déplace avec le (v.c) alors sa vitesse relative q_{1r} est nulle. En d'autres termes, il n'y a pas de particules de fluides qui passent à travers la section S_1 .

$$\int_v \rho dv = \rho v = \rho(y + h) S_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_v \rho dv = \rho S_1 \frac{dh}{dt}$$

en remplaçant dans l'équation de continuité :

$$\rho S_1 \frac{dh}{dt} + \rho S_2 \sqrt{2gh} = 0 \Rightarrow \int_0^t dt = -\frac{S_1}{S_2 \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

et en intégrant le temps entre 0 et t et la hauteur entre h_1 et h_2 on aura :

$$t = \frac{2 S_1}{S_2 \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{D^2}{d^2} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})$$

* Dans le cas où le réservoir est percé en bas alors $y = 0$ et la hauteur varie de h à 0 (vidange). Le temps de vidange sera donc :

$$t_v = \frac{2 S_1}{S_2 \sqrt{2g}} \sqrt{h} = \frac{2 S_1 h}{S_2 \sqrt{2gh}} = \frac{2 V_0}{Q_{v0}}$$

où :

V_0 : volume initial ;

Q_{v0} : débit volumétrique initial.

Application numérique :

Soit une boîte de hauteur 115 mm et de diamètre 100 mm qui se vidange par un petit orifice de $1,5 \text{ mm}$ de diamètre. Sachant que $g = 10 \text{ m/s}^2$, le temps de vidange de la boîte est :

$$t_v = \sqrt{\frac{2}{10} \frac{100^2}{1,5^2}} \sqrt{0,115} = 674 \text{ s} \Rightarrow t_v = 11 \text{ mn } 14 \text{ s.}$$

2.9 Equations de quantité de mouvement

Avant d'établir les équations du mouvement d'un écoulement idéal, donnons en premier lieu la définition des forces massiques et surfaciques :

- Une force massique est une force dont la valeur est proportionnelle à la masse de l'élément de fluide sur lequel elle agit (force de gravité, magnétique, ...etc.).

- Une force de surface est une force qui agit sur la surface de l'élément de fluide et elle est exercée soit par les autres éléments adjacents soit par un solide en contact avec le fluide (force de pression, contrainte de cisaillement, ...etc.).

* Dans un écoulement idéal, on néglige les frottements entre les éléments de fluide ($\mu \rightarrow 0$). Donc les contraintes de cisaillement ne se produisent pas et on trouve, comme

en hydrostatique, que la pression ne dépend pas de la direction.

Les équations de quantité de mouvement sont obtenues par application de la seconde loi de Newton : *Le taux de variation de la quantité de mouvement par rapport au temps d'une particule de fluide est égale à la résultante de toutes les forces qui exercent une influence ou une action sur cette particule.*

2.9.1 Forme différentielle

Soit une particule de fluide de dimensions dx , dy , dz (Fig.2.6).

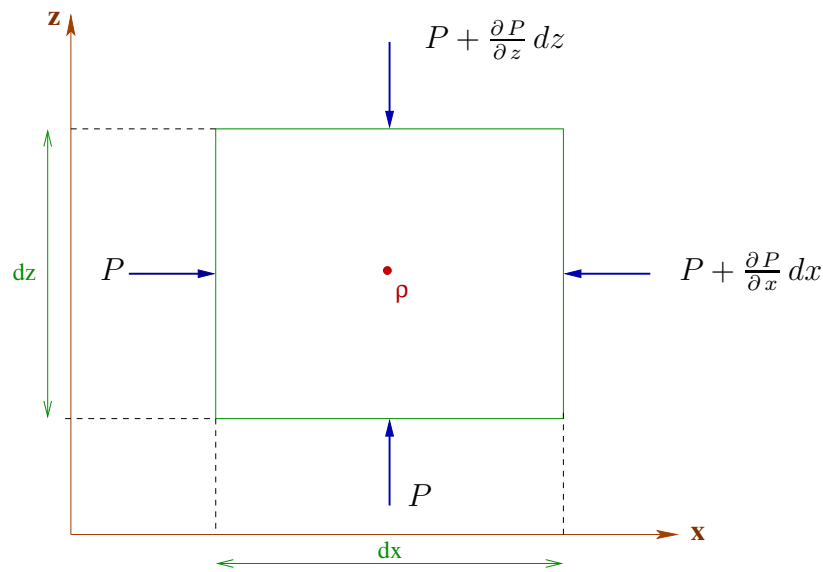


FIGURE 2.6: *Schéma d'une particule de fluide soumise aux diverses forces.*

La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m \vec{\gamma} \quad (2.15)$$

La projection de l'équation (2.15) selon l'axe OX nous donne :

$$\sum F_x = m \gamma_x = \rho dx dy dz \frac{Du}{Dt} = \rho dx dy dz \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

d'autre part, d'après la figure (2.6) on a :

$$\sum F_x = P dy dz - \left(P + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho dx dy dz f_x$$

f_x étant la composante suivant X de toutes les forces volumiques par unité de masse. Dans ce cours, nous considérons seulement les forces de pesanteur (ou de gravité).

En simplifiant l'équation ci-dessus et en faisant la même démarche suivant les autres axes, nous obtenons les équations d'Euler (2.16).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = f_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases} \quad (2.16)$$

Le premier membre du système (2.16) représente les *forces d'inertie*, le second membre représente respectivement les *forces de pression* ainsi que les *forces de pesanteur*.

Dans un référentiel cartésien, les composantes f_x et f_y sont nulles : $f_x = f_y = 0$ et $f_z = -g$, mais dans d'autres repères, il est possible d'avoir toutes les composantes non nulles.

Les équations (2.16) peuvent s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{D \vec{q}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \quad (2.17)$$

Comme nous avons la propriété suivante :

$$\frac{D \vec{q}}{Dt} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \vec{q} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} q^2 + \vec{rot} \vec{q} \wedge \vec{q}$$

et en désignant par $\vec{\Omega}$ le *vecteur tourbillon* du champ de vitesse (ou *taux de rotation de la particule*) défini par :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{rot} \vec{q} \quad (2.18)$$

nous aurons l'équation vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} q^2 + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = \vec{f} - 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{q} \quad (2.19)$$

Si $\vec{\Omega} = \vec{0}$ on aura alors un *écoulement irrotationnel*.

2.9.2 Forme intégrale

La quantité de mouvement d'un élément de fluide compris dans un volume arbitraire (v) est définie par :

$$I_v = \int_v \rho \vec{q} dv \quad (2.20)$$

D'après la loi de Newton, nous avons :

$$\frac{DI_v}{Dt} = \sum F_{ex} \quad (2.21)$$

d'où en appliquant le théorème de Gauss-Ostrogradski (Annexe A.9) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho \vec{q} dv + \int_s \rho \vec{q} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = \int_v \rho \vec{f}_v dv - \int_s P \cdot \vec{n} dS + \vec{R} \quad (2.22)$$

\vec{R} représente, dans l'équation (2.22), la *force de réaction* exercée par la paroi solide sur le fluide.

- Exemple d'application :

Considérons l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible dans une conduite coudée d'un angle α (Fig.2.7). On cherche la force exercée par le fluide sur la conduite entre les sections S_1 et S_2 . La masse volumique du fluide est ρ et on suppose que les variables d'écoulement sont uniformes dans les deux sections et on peut négliger l'effet de la pesanteur.

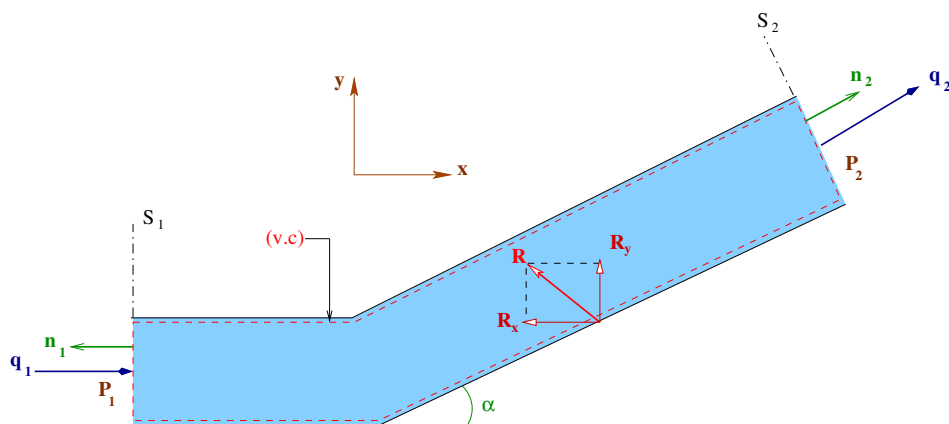


FIGURE 2.7: *Exemple d'application. Force exercée sur un coude.*

Écoulement permanent $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$ et l'équation (2.22) devient :

$$\int_s \rho \vec{q} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = \sum \vec{F}_{ex} = - \int_s P \cdot \vec{n} dS + \vec{R}$$

* Décomposition selon l'axe X :

$$\int_{s_1} \rho \vec{q}_{1x} (\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1) dS + \int_{s_2} \rho \vec{q}_{2x} (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) dS = - \int_{s_1} P_1 \cdot \vec{n}_{1x} dS - \int_{s_2} P_2 \cdot \vec{n}_{2x} dS + \vec{R}_x$$

* Projection suivant l'axe X :

$$\int_{s_1} \rho u_1 (\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1) dS + \int_{s_2} \rho u_2 (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) dS = \int_{s_1} P_1 dS - \int_{s_2} P_2 \cdot \cos \alpha dS - R_x$$

$$-\rho q_1^2 S_1 + \rho q_2^2 \cos \alpha S_2 = P_1 S_1 - P_2 \cos \alpha S_2 + F_x$$

car $F_x = -R_x$ d'où :

$$F_x = S_2 \cos \alpha (P_2 + \rho q_2^2) - S_1 (P_1 + \rho q_1^2)$$

* Décomposition selon l'axe Y :

$$\int_{s_1} \rho \vec{q}_{1y} (\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1) dS + \int_{s_2} \rho \vec{q}_{2y} (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) dS = - \int_{s_1} P_1 \cdot \vec{n}_{1y} dS - \int_{s_2} P_2 \cdot \vec{n}_{2y} dS + \vec{R}_y$$

* Projection suivant l'axe Y :

$$\int_{s_1} \rho v_1 (\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1) dS + \int_{s_2} \rho v_2 (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) dS = - \int_{s_1} P_1 \cdot 0 dS - \int_{s_2} P_2 \cdot \sin \alpha dS + R_y$$

$$\rho q_2^2 \sin \alpha S_2 = -P_2 \sin \alpha S_2 - F_y \quad \text{car} \quad F_y = -R_y \quad \text{et} \quad v_1 = 0$$

d'où :

$$F_y = -S_2 \sin \alpha (P_2 + \rho q_2^2)$$

et enfin la résultante des forces exercées par le fluide sur la conduite :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

2.10 Equation de Bernoulli

Considérons une particule de fluide qui occupe un volume infinitésimal et fixe à l'instant t dans un écoulement stationnaire et idéal. Cette particule suit une ligne de courant durant son mouvement (Fig.2.8).

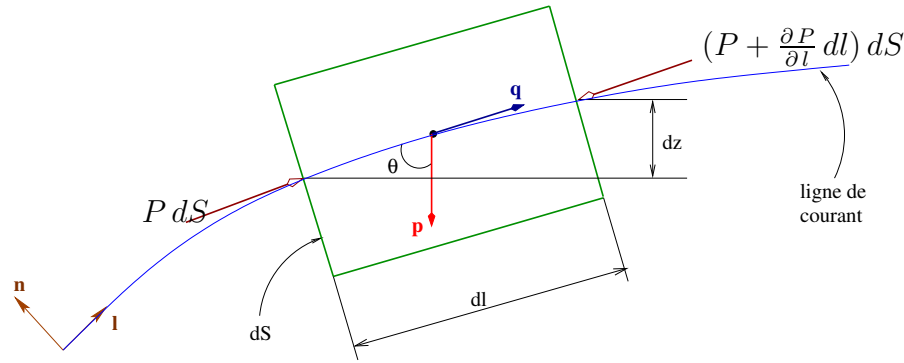


FIGURE 2.8: *Etablissement de l'équation de Bernoulli.*

En appliquant la deuxième loi de Newton dans la direction de la ligne de courant nous obtenons :

$$\sum F = m \gamma \quad \text{avec} \quad p = m g = \rho g dl ds \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{Dq}{Dt}$$

$$\Rightarrow \rho dl ds \frac{Dq}{Dt} = P ds - \left(P + \frac{\partial P}{\partial l} dl \right) ds - \rho g dl ds \cos \theta$$

$$\Rightarrow \rho \frac{Dq}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial l} - \rho g \cos \theta = -\frac{\partial P}{\partial l} - \rho g \frac{\partial z}{\partial l} \quad \text{car} \quad dz = dl \cos \theta = \frac{\partial z}{\partial l} dl$$

d'autre part :

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} q = q \vec{l} \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial l} \vec{l} + \frac{\partial q}{\partial n} \vec{n} \right) = q \frac{\partial q}{\partial l}$$

et en remplaçant dans l'équation principale on aura :

$$\rho q \frac{\partial q}{\partial l} = -\frac{\partial P}{\partial l} - \rho g \frac{\partial z}{\partial l} \Rightarrow \rho \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{2} q^2 + \frac{P}{\rho} + g z \right) = 0$$

Suivant la même ligne de courant, nous aurons donc :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + g z = C^{te} \quad (2.23)$$

L'équation (2.23) est l'équation de Bernoulli; elle est valable seulement pour un écoulement idéal, permanent, incompressible et suivant la même ligne de courant (l'écoulement n'est pas forcément homogène).

2.11 Interprétation de l'équation de Bernoulli

Soit une masse de 1 Kg de liquide parfait passant de l'état (1) à l'état (2). Nous pouvons donc écrire :

$$\underbrace{\frac{P_2 - P_1}{\rho}}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2} (q_2^2 - q_1^2)}_{(2)} + \underbrace{g (z_2 - z_1)}_{(3)} = 0 \quad [J/kg] \quad (2.24)$$

où :

- (1) : variation de l'énergie potentielle due à la variation de pression ;
- (2) : variation de l'énergie cinétique due à la variation de vitesse ;
- (3) : variation de l'énergie potentielle due à la variation d'altitude.

L'équation de Bernoulli nous indique donc que l'énergie mécanique totale d'une particule de fluide est conservée le long d'une ligne de courant (bien que l'une des formes d'énergie peut se transformer en une autre) (Fig.2.9).

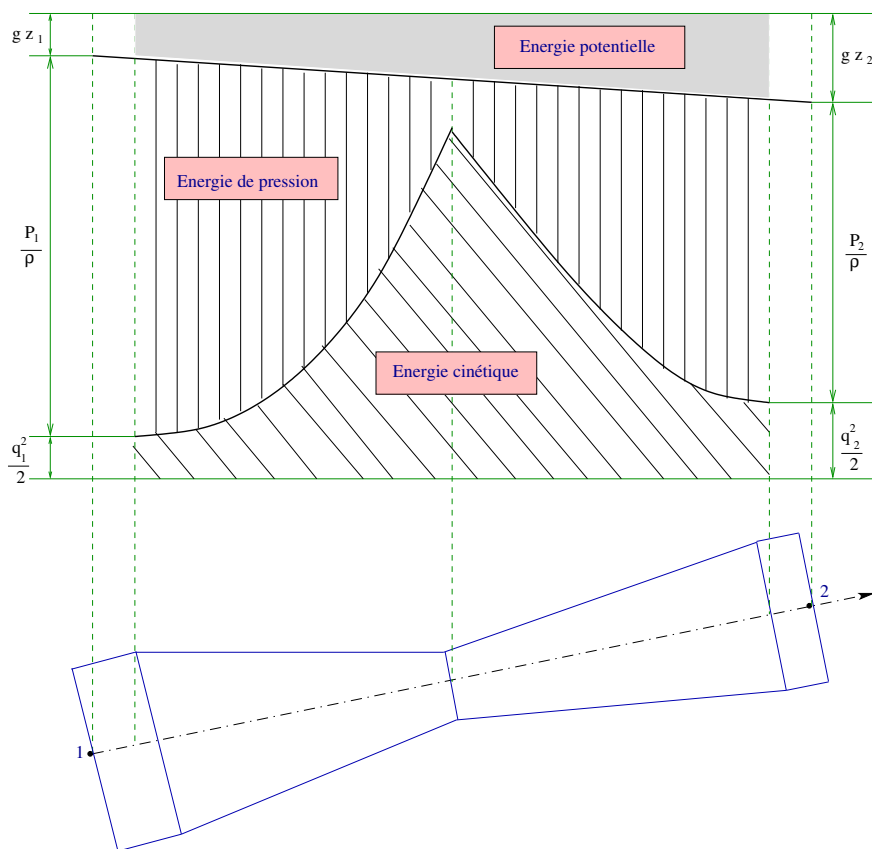


FIGURE 2.9: *Différentes formes d'énergie dans un écoulement idéal.*

Remarques :

1. Entre les états (1) et (2), l'équation de Bernoulli ne fait pas état de la forme de la conduite ou du tube de courant.
2. Suivant les cas d'utilisation, l'équation de Bernoulli peut s'écrire de différentes manières :

$$(P_2 - P_1) + \frac{\rho}{2} (q_2^2 - q_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) = 0 \quad [N/m^2] \quad (2.25)$$

$$\frac{(P_2 - P_1)}{\rho g} + \frac{1}{2g} (q_2^2 - q_1^2) + (z_2 - z_1) = 0 \quad [m] \quad (2.26)$$

- Exemple :

Soit à transporter de l'eau dans une conduite d'un point (1) à un point (2) avec les données suivantes :

$P_1 = 15 \text{ N/cm}^2$ $q_1 = 8 \text{ m/s}$ $z_1 = 12 \text{ m}$

$P_2 = 10 \text{ N/cm}^2$ $q_2 = ?$ $z_2 = 2 \text{ m}$

On donne : $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$

- Quelle est la vitesse au point (2) ?
- Si le débit transporté est de $6 \text{ dm}^3/\text{s}$; calculer les diamètres de la conduite aux points (1) et (2).

Appliquons l'équation (2.24) entre les points (1) et (2) :

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{1}{2} (q_2^2 - q_1^2) + g (z_2 - z_1) = 0$$

$$\Rightarrow -50 + \frac{1}{2} (q_2^2 - 64) - 100 = 0 \Rightarrow q_2 = 19 \text{ m/s}.$$

D'après l'équation (2.11), le débit volumique est donné par :

$$Q_v = S_1 q_1 = S_2 q_2 \quad \text{avec} \quad S_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} \quad \text{d'où :}$$

$$D_1 = \sqrt{\frac{4Q_v}{\pi q_1}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,006}{3,1415 \cdot 8}} = 31 \text{ mm}$$

et

$$D_2 = \sqrt{\frac{4Q_v}{\pi q_2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,006}{3,1415 \cdot 19}} = 20 \text{ mm}.$$

2.12 Applications pratiques de l'équation de Bernoulli

2.12.1 Mesure de la pression statique

La pression statique (ou locale) au voisinage d'une paroi peut être mesurée au moyen d'un trou fin percé sans bavures et perpendiculairement à la surface de la paroi.

Cette dernière peut être considérée comme une ligne de courant qui n'est pas modifiée par la présence de la cavité qui se remplit de fluide mort (Fig.2.10).

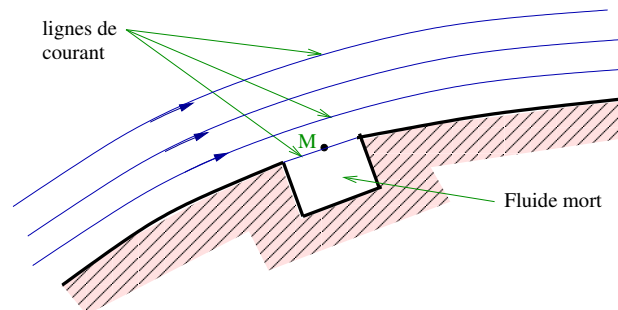


FIGURE 2.10: *Mesure de la pression statique.*

Le fluide mort et le fluide en mouvement sont en contact au point M et on peut écrire d'après l'équation de Bernoulli :

$$\frac{P_M}{\rho} + \frac{1}{2} q_M^2 + g z_M = C^{te} \Rightarrow P_M = C^{te}$$

La pression dans la cavité est donc constante et on peut la mesurer avec un *manomètre*. Elle sera égale à celle du fluide en mouvement.

2.12.2 Mesure de la pression dynamique

La pression dynamique (ou totale ou encore pression d'arrêt) est la pression qu'on obtiendrait si l'écoulement était décéléré sans pertes (frottements) jusqu'à la vitesse nulle. Elle peut être mesurée au moyen d'un *tube de Pitot*.

Cet instrument est constitué d'un tube mince inséré dans l'écoulement de telle manière que l'ouverture du tube soit orientée dans le sens opposé à l'écoulement (Fig.2.11).

Ecrivons l'équation de Bernoulli entre l'amont et le point d'arrêt :

$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho q_\infty^2 + \rho g z_\infty = P_0 + \frac{1}{2} \rho q_0^2 + \rho g z_0$$

d'où :

$$P_0 = P_\infty + \frac{1}{2} \rho q_\infty^2 \quad (2.27)$$

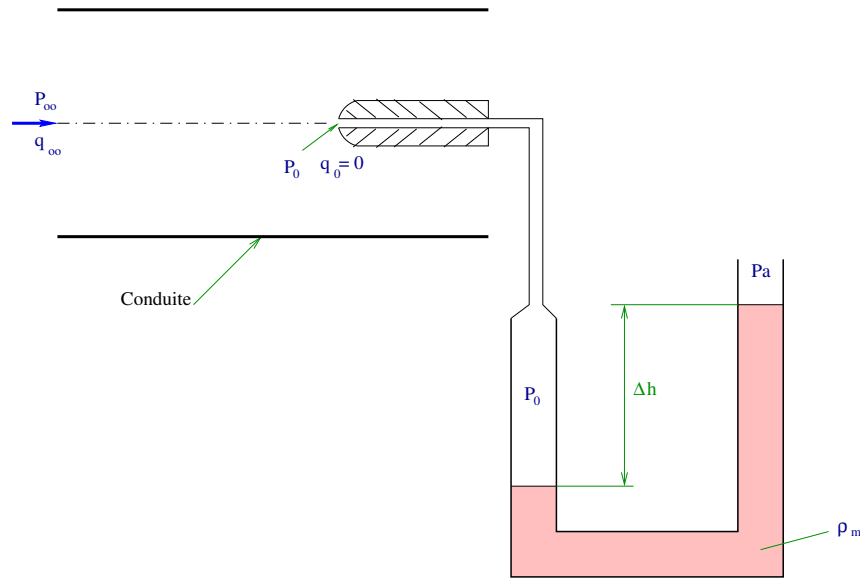


FIGURE 2.11: *Mesure de la pression totale.*

C'est donc la pression statique augmentée de la pression dynamique.

Par la connexion du tube de Pitot à un manomètre, on peut mesurer la pression P_0 relativement par rapport à la pression atmosphérique P_a :

$$P_0 - P_a = \rho_m g \Delta h \quad (2.28)$$

2.12.3 Mesure de la vitesse dans un écoulement incompressible

Il existe une variante du tube de Pitot (Fig.2.12) permettant de mesurer simultanément les pressions locale et totale. Un tel instrument est dénommé *tube de Prandtl*.

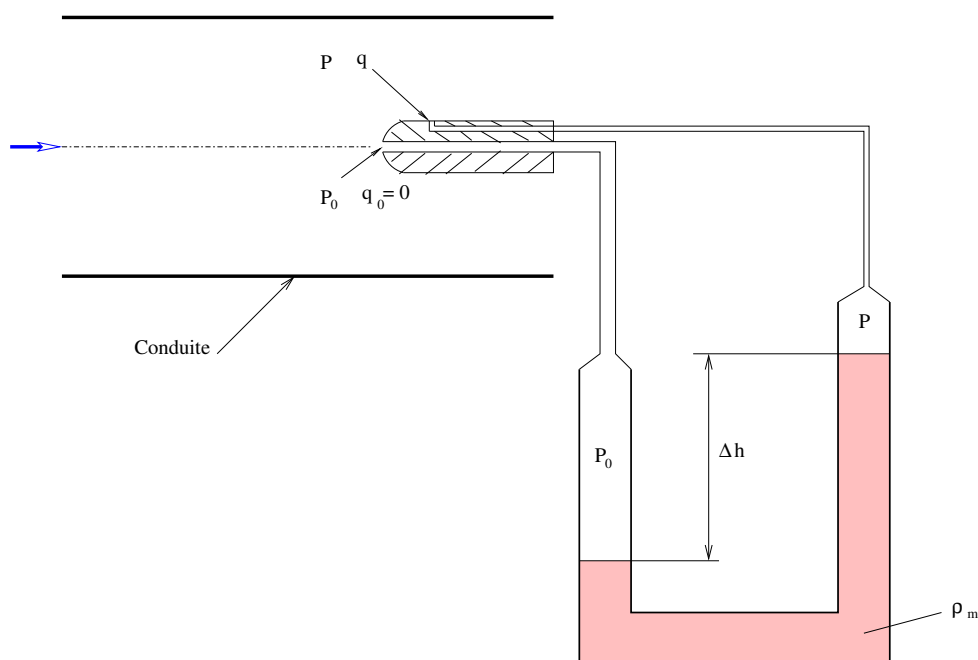
Nous pouvons écrire :

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho q_0^2 + \rho g z_0 = P + \frac{1}{2} \rho q^2 + \rho g z$$

Le tube étant assez mince pour ne pas perturber l'écoulement, alors : $z = z_0$.

Le tube de Prandtl sert donc à mesurer la vitesse en un point quelconque de l'écoulement par la formule suivante :

$$q = \sqrt{\frac{2 (P_0 - P)}{\rho}} \quad (2.29)$$

FIGURE 2.12: *Mesure de la vitesse.*

Si on met du mercure dans le manomètre, à l'équilibre nous aurons :

$$P_0 - P = \rho_m g \Delta h \quad (2.30)$$

2.12.4 Mesure du débit-masse

Pour déterminer le débit-masse dans une conduite, on utilise souvent un *tube de Venturi* comme il est indiqué sur la figure (Fig.2.13). Il est formé d'un convergent, d'un col et d'un divergent. Il est muni de deux prises de pression statique : une à l'entrée de l'appareil et une au col.

Dans les sections S_1 et S_2 , le tube est muni de trous capables de mesurer les pressions locales P_1 et P_2 . Au moyen d'une mesure de la différence de pression ($P_1 - P_2$), le débit-masse d'un écoulement incompressible est donné par la relation suivante :

$$Q_m = S_2 \sqrt{\frac{2 \rho (P_1 - P_2)}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \quad (2.31)$$

Cette relation est obtenue en combinant l'équation de continuité et celle de Bernoulli ; la différence de pression est directement proportionnelle à la dénivellation Δh . En effet :

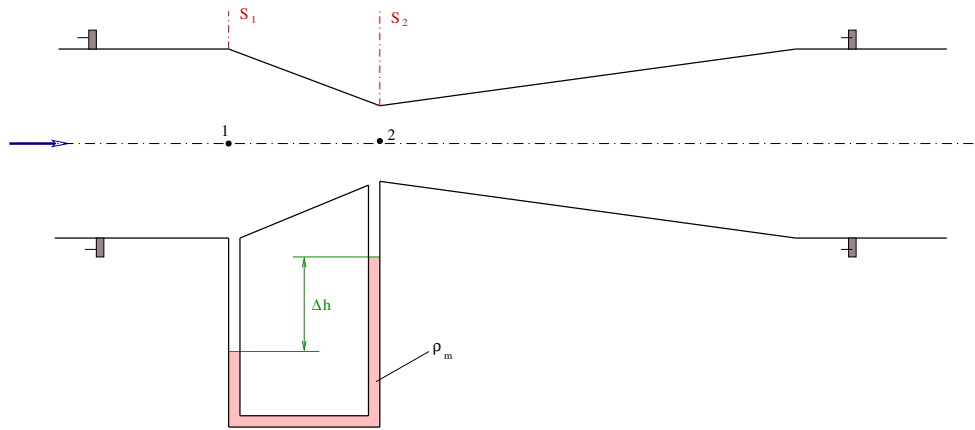


FIGURE 2.13: *Mesure du débit-masse.*

$$Q_m = \rho S_1 q_1 = \rho S_2 q_2 \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho q_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho q_2^2 + \rho g z_2$$

et puisque $z_1 = z_2$ alors :

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (q_2^2 - q_1^2) = \frac{1}{2} \rho q_2^2 \left[1 - \left(\frac{q_1}{q_2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \rho q_2^2 \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q_m}{\rho S_2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{Q_m}{S_2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]$$

ce qui permet de retrouver la relation (2.31).

Nous pouvons utiliser le même raisonnement en utilisant d'une façon générale la pression motrice P_g qui est constante le long d'une section droite de la conduite et définie par :

$$P_g = P + \rho g h \quad (2.32)$$

On retrouve alors la relation suivante :

$$Q_m = S_2 \sqrt{\frac{2\rho(P_{g1} - P_{g2})}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \quad (2.33)$$

- Exemple d'application :

Un circuit hydraulique horizontal a les dimensions indiquées (Fig.2.14). Il comporte un venturi, une prise de pression statique et une prise de pression double. Ces divers appareils sont reliés à des manomètres à mercure. Les tubes de liaison aux manomètres sont remplis d'eau. On donne :

- Masse volumique du mercure : $\rho_m = 13600 \text{ Kg/m}^3$.
- Pression absolue au point 0 : $P_0 = 1,5 \text{ bar}$.
- Pression atmosphérique : $P_a = 1 \text{ bar}$.
- Hauteur z : $z = 1 \text{ m}$.

1. Sachant que la dénivellation $h_v = 40 \text{ mm}$, calculer le débit volumique dans la conduite.
2. Calculer la dénivellation h_s .
3. Calculer la dénivellation h_d dans la prise de pression double.

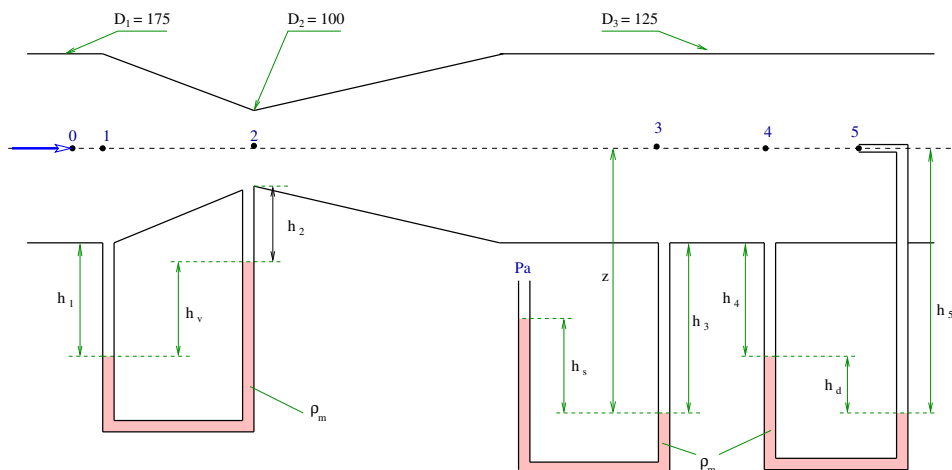


FIGURE 2.14: *Exemple d'application. Circuit hydraulique horizontal.*

Solution détaillée :

1- Pour calculer le débit volumique, nous écrivons la conservation du débit entre les points 1 et 2 dans le Venturi.

$$Q_v = S_1 q_1 = S_2 q_2 \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

d'autre part, l'équation de Bernoulli entre ces deux points nous donne :

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{1}{2} (q_2^2 - q_1^2) + g (z_2 - z_1) = 0$$

et puisque $z_1 = z_2$ alors :

$$\begin{aligned} \frac{P_1 - P_2}{\rho} &= -\frac{1}{2} q_1^2 \left[1 - \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} q_1^2 \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right] \\ \Rightarrow q_1 &= \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right]}} \end{aligned}$$

Comme la pression motrice P_g est constante dans chaque section de la conduite, alors :

$$P_{g1} = P_1 + \rho g \frac{D_1}{2} \quad \text{et} \quad P_{g2} = P_2 + \rho g \frac{D_2}{2}$$

Au niveau du Venturi nous pouvons écrire :

$$P_{g1} + \rho g h_1 = P_{g2} + \rho g h_2 + \rho_m g h_v$$

et en remplaçant les pressions motrices :

$$P_1 + \rho g \left(h_1 + \frac{D_1}{2} \right) = P_2 + \rho g \left(h_2 + \frac{D_2}{2} \right) + \rho_m g h_v$$

d'où, en simplifiant :

$$P_1 - P_2 = g h_v (\rho_m - \rho)$$

En remplaçant cette différence de pression dans l'équation donnant q_1 , puis dans celle de la conservation du débit, nous aurons finalement :

$$Q_v = \frac{\pi D_1^2}{4} \sqrt{\frac{2 g h_v (\rho_m - \rho)}{\rho \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right]}} = \frac{\pi (0,175)^2}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,04 (13,6 - 1)}{(1,75)^4 - 1}} = 0,02613 \text{ m}^3/\text{s}$$

2- L'équation de Bernoulli entre les points 2 et 3 nous donne (sachant que $z_2 = z_3$) :

$$\frac{P_3 - P_2}{\rho} + \frac{1}{2} (q_3^2 - q_2^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_3 = P_2 + \frac{\rho}{2} (q_2^2 - q_3^2)$$

l'équilibre du manomètre nous donne :

$$P_a + \rho g h_s = P_{g3} + \rho g h_3 = P_3 + \rho g \frac{D_3}{2} + \rho g \left(z - \frac{D_3}{2} \right) = P_3 + \rho g z$$

$$\text{d'où : } h_s = \frac{P_3 - P_a + \rho g z}{\rho_m g}$$

Il faut donc calculer la pression P_3 pour pouvoir évaluer la dénivellation h_s . Pour cela, calculons d'abord les vitesses dans les différentes sections de la conduite :

$$q_1 = \frac{4Q_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0,02613}{3,1415 (0,175)^2} \Rightarrow q_1 = 1,086 \text{ m/s}$$

$$q_2 = \frac{4Q_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0,02613}{3,1415 (0,1)^2} \Rightarrow q_2 = 3,327 \text{ m/s}$$

$$q_3 = \frac{4Q_v}{\pi D_3^2} = \frac{4 \cdot 0,02613}{3,1415 (0,125)^2} \Rightarrow q_3 = 2,129 \text{ m/s}$$

$$\frac{P_1 - P_0}{\rho} + \frac{1}{2} (q_1^2 - q_0^2) = 0$$

$$\text{et } Q_v = S_0 q_0 = S_1 q_1 \Rightarrow q_0 = q_1 \text{ d'où : } P_0 = P_1$$

$$\frac{P_2 - P_0}{\rho} + \frac{1}{2} (q_2^2 - q_0^2) = 0 \Rightarrow P_2 = P_0 - \frac{\rho}{2} (q_2^2 - q_0^2)$$

$$P_2 = 1,5 \cdot 10^5 - \frac{10^3}{2} (3,327^2 - 1,086^2) \Rightarrow P_2 = 1,450 \text{ bar}$$

$$P_3 = P_2 - \frac{\rho}{2} (q_3^2 - q_2^2) = 1,45 \cdot 10^5 - \frac{10^3}{2} (3,327^2 - 2,129^2) = 1,482 \text{ bar}$$

En remplaçant ces valeurs dans l'expression de h_s , nous aurons :

$$h_s = \frac{1,482 \cdot 10^5 - 10^5 + 10^3 \cdot 9,81}{13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81} = 0,4348 \text{ m.}$$

3- Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points 3 et 4 :

$$\frac{P_4 - P_3}{\rho} + \frac{1}{2} (q_4^2 - q_3^2) = 0 \text{ et } Q_v = S_4 q_4 = S_3 q_3 \Rightarrow q_4 = q_3$$

$$\text{d'où : } P_4 = P_3$$

La condition d'équilibre dans la prise de pression double nous donne :

$$P_{g4} + \rho g h_4 + \rho_m g h_d = P_5 + \rho g h_5$$

et en remplaçant les pressions motrices :

$$(P_4 + \rho g \frac{D_3}{2}) + \rho g h_4 + \rho_m g h_d = P_5 + \rho g (h_d + h_4 + \frac{D_3}{2})$$

$$\Rightarrow P_3 + \rho_m g h_d = P_5 + \rho g h_d$$

Pour calculer h_d , il suffit maintenant de calculer la pression P_5 .

$$\frac{P_5 - P_4}{\rho} + \frac{1}{2} (q_5^2 - q_4^2) = 0$$

mais $q_5 = 0$ car c'est un point d'arrêt, d'où :

$$P_5 = P_4 + \frac{1}{2} \rho q_4^2 = P_3 + \frac{1}{2} \rho q_3^2$$

et en remplaçant dans la relation précédente :

$$P_3 + \rho_m g h_d = \rho g h_d + P_3 + \frac{1}{2} \rho q_3^2$$

$$\Rightarrow h_d = \frac{\rho q_3^2}{2g(\rho_m - \rho)} = \frac{10^3 \cdot 2,129^2}{2 \cdot 9,81 (13600 - 1000)} = 18,3 \text{ mm.}$$

2.13 Exercices

C1 : Quelle doit être la pression P de l'eau que l'on doit mesurer dans une lance à incendie de section S pour que la vitesse à la sortie du tuyau de section s soit égale à q_0 .

On donne : $q_0 = 40 \text{ m/s}$; $S = 5 \text{ cm}^2$; et $s = 0,5 \text{ cm}^2$.

Rép : $8,92 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

C2 : Un réservoir de section $S_r = 0,5 \text{ m}^2$ et de hauteur $H = 1,5 \text{ m}$ est muni de deux entrées latérales 1 et 2 de diamètres respectifs $D_1 = 25 \text{ mm}$ et $D_2 = 70 \text{ mm}$. Les vitesses du fluide, supposées uniformes au niveau des deux entrées, sont respectivement $q_1 = 0,91 \text{ m/s}$ et $q_2 = 0,60 \text{ m/s}$.

Calculer le temps de remplissage du réservoir.

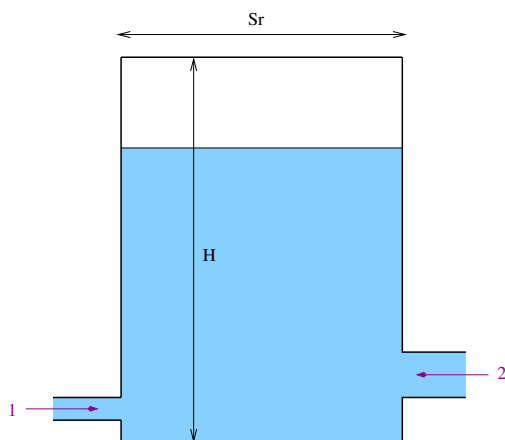


FIGURE 2.15: C2.

Rép : $4 \text{ mn } 32 \text{ s}$.

C3 : Un jet, incliné de 30° par rapport à l'horizontale, de diamètre 50 mm et de vitesse 30 m/s , frappe la surface libre d'un réservoir monté sur un chariot.

1- Calculer la force horizontale qu'il faut appliquer au chariot pour l'immobiliser.

2- Si le chariot se déplace horizontalement dans le sens du jets à une vitesse de 5 m/s , calculer la poussée horizontale exercée par le jet sur le chariot.

3- Quel sera le rendement de ce mode de propulsion (rapport de la puissance utile à la puissance fournie).

Rép : 1) $1530,4 \text{ N}$. 2) $1309,5 \text{ N}$. 3) $0,247$.

C4 : Le champ de vitesse d'un écoulement incompressible est donné par :

$$u = V_0 \frac{x}{L}, v = 0, w = -V_0 \frac{z}{L}$$

V_0 étant une constante ayant la dimension d'une vitesse et L une longueur donnée.

En utilisant le volume de contrôle d'épaisseur b délimité par $O(0,0)$, $A(0,L)$ et $B(L,L)$, déterminer les débits volumiques à travers les facettes 1, 2 et 3. Conclure.

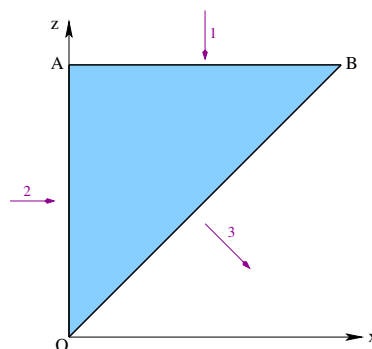


FIGURE 2.16: C4.

Rép : $-V_0 L b$; 0 ; $V_0 L b$.

C5 : Un turboréacteur d'avion est schématisé par la figure ci-dessous :

D_f étant le débit de fuel (kérosène) injecté dans la chambre de combustion et q_a la vitesse de l'avion. On suppose que ce dernier est fixe et que c'est l'air qui se déplace à la vitesse q_a suivant X .

En supposant l'écoulement stationnaire et incompressible, et en négligeant les forces de pesanteur déterminent, en utilisant le (v.c) donné, l'expression de la poussée F du turboréacteur en fonction de $P_a, P_e, S_a, S, D_a, q_a, q_e$ et f .

f étant le rapport de mélange = débit de fuel (D_f) / débit d'air (D_a).

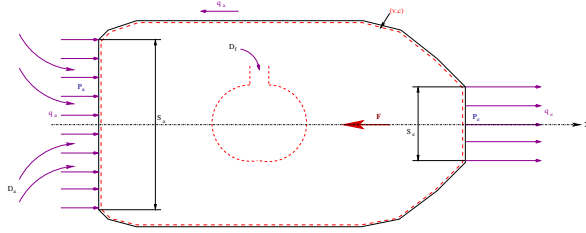


FIGURE 2.17: C5.

Rép : $F = P_e S_e - P_a S + D_a [(1 + f) q_e - q_a]$.

C6 : Un réservoir de forme parallélépipédique de 10 m de longueur, 5 m de largeur et 2 m de profondeur se vide par un orifice percé dans le fond horizontal débouchant à l'air libre, et dont la section vaut $0,5\text{ dm}^2$. Quel est le temps (heure/ minute/ seconde) nécessaire à sa vidange totale ? $g = 10\text{ m/s}^2$.

Rép : $1\text{ h } 45\text{ mn } 24\text{ s}$.

C7 : Une conduite forcée va d'un barrage-réservoir d'altitude 845 m à la turbine d'altitude 625 m . Le débit maximal est de $0,4\text{ m}^3/\text{s}$ et la vitesse de l'eau dans la conduite doit être $\leq 6\text{ m/s}$. Déterminer le diamètre de la conduite et la pression effective maximale à laquelle est soumise sa paroi. On prendra $g = 10\text{ m/s}^2$.

Rép : 300 mm ; $2,184 \cdot 10^6\text{ N/m}^2$.

C8 : Une conduite divergente est dessinée de telle sorte que le long de l'axe, supposé horizontal, la vitesse varie linéairement en fonction de l'abscisse de 5 m/s à 1 m/s sur une distance AB de $0,5\text{ m}$. Dans le cas d'un fluide de masse volumique $\rho = 800\text{ kg/m}^3$:

- 1- Déterminer la variation de pression correspondant à cette diminution de vitesse.
- 2- Calculer le gradient de pression aux points A et B .

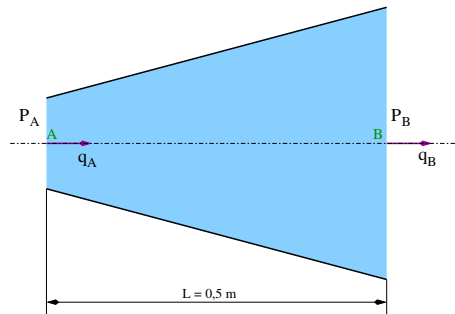


FIGURE 2.18: C8.

Rép : 1) 9600 Pa . 2) 32000 Pa/m ; 6400 Pa/m .

C9 : On veut mesurer et enregistrer le débit d'une conduite de diamètre nominal 600 mm à l'aide d'un débitmètre électromagnétique \mathcal{D} . L'appareil adopté a un diamètre de passage de 300 mm . On installe donc un convergent 1 – 2 à 45° , le débitmètre \mathcal{D} et un divergent 3 – 4 à 7° .

On mesure sur le manomètre \mathcal{M} une pression de 6 bar et sur le débitmètre un débit de 438 l/s .

En supposant que l'écoulement est stationnaire et idéal et on négligeant les forces de gravité déterminer les efforts auxquels sera soumis le débitmètre ?

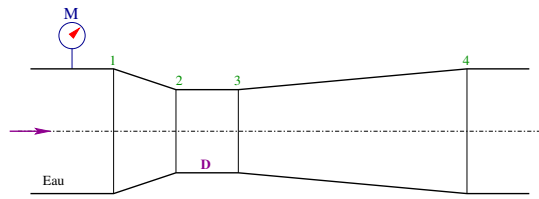


FIGURE 2.19: C9.

Rép : 126,47 kN ; -126,47 kN.

C10 : On considère l'écoulement permanent entre deux conduites cylindriques coaxiales C_1 et C_2 de diamètres D_1 et D_2 . Le fluide arrive par C_1 et repart par l'espace annulaire entre C_1 et C_2 ainsi que par le haut. La distribution des vitesses est uniforme dans les conduites et linéaire entre A et C .

1- Trouver la hauteur de débordement h ainsi que le diamètre D du noyau central en fonction de D_1 et D_2 .

2- Trouver le rapport D_1/D_2 pour lequel il n'y aura pas de débordement.

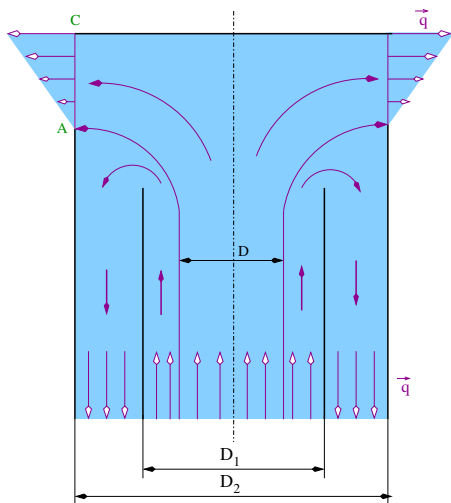


FIGURE 2.20: C10.

Rép : 1) $h = \frac{2D_1^2 - D_2^2}{2D_2}$; $D = \sqrt{2D_1^2 - D_2^2}$.
 2) $\frac{D_1}{D_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

C11 : De l'huile de masse volumique $\rho = 860 \text{ kg/m}^3$ s'écoule à travers deux petits orifices A et B de largeur unité ($L = 1 \text{ m}$). En supposant l'écoulement stationnaire et parfait, calculer les débits volumiques sortant par les deux orifices.

On donne : $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $H = 3 \text{ m}$ et $h = 70 \text{ m}$.

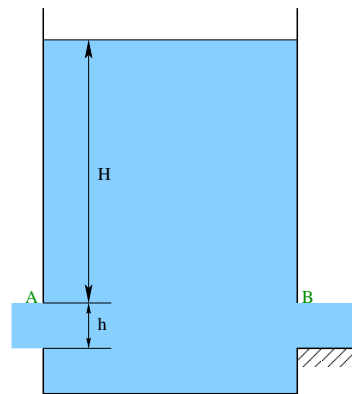


FIGURE 2.21: C11.

Rép : $5,675 \text{ m}^3/\text{s}$; $5,370 \text{ m}^3/\text{s}$.

C12 : On considère un écoulement d'un fluide de densité ρ à travers un orifice dans le fond d'un réservoir. La section basse du réservoir est désignée par S_r et celle de l'orifice par S_0 . On suppose que le débit de fluide à travers l'orifice est grand de telle sorte que la vitesse des particules à la surface n'est pas nulle. Aussi, on désigne par h la hauteur du fluide dans le réservoir à l'instant t et par l la distance entre l'orifice et une plaque placée en bas. Finalement P_r est la pression maintenue dans le réservoir et P_a la pression atmosphérique à travers le jet.

1- Déterminer l'expression de la vitesse q en fonction de ρ , h , P_r , P_a , S_0 et S_r sachant que l'écoulement est stationnaire, idéal et incompressible.

2- Déterminer la force exercée par le jet sur

la plaque horizontale qui l'intercepte à la distance l .

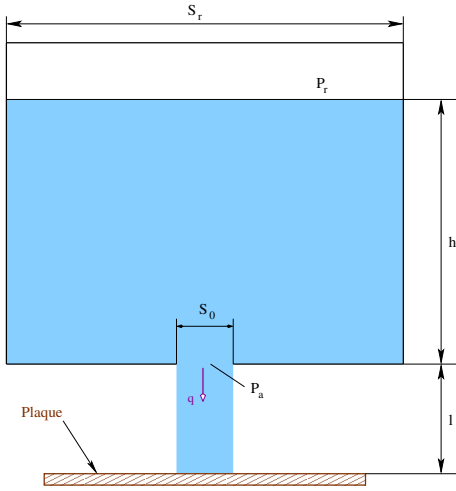


FIGURE 2.22: C12.

Rép : 1) $q = \sqrt{\frac{2(P_r - P_a + \rho g h)}{\rho \left[1 - \left(\frac{S_0}{S_r}\right)^2\right]}}$.

2) $|F| = S_0 (P_a + \rho q^2 + \rho g l)$.

C13 : Pour étudier les forces exercées par les fluides sur les corps et vice versa, on introduit un petit parallélépipède de profondeur unité dans un réservoir.

Le corps étant au repos sur la surface libre du liquide, un courant d'air de masse ρ_a constante est produit horizontalement. En supposant l'écoulement d'air stationnaire et en négligeant les forces volumiques ainsi que les forces de pression, déterminer :

- 1- L'expression du profil de vitesse dans la section 2 en fonction de y , h_2 et U_a .
- 2- L'expression du débit masse m_a qui sort à travers la section 3 en fonction de ρ_a , h_2 et U_a .
- 3- L'expression de la force exercée par l'air sur le corps en fonction de ρ_a , h_2 et U_a .

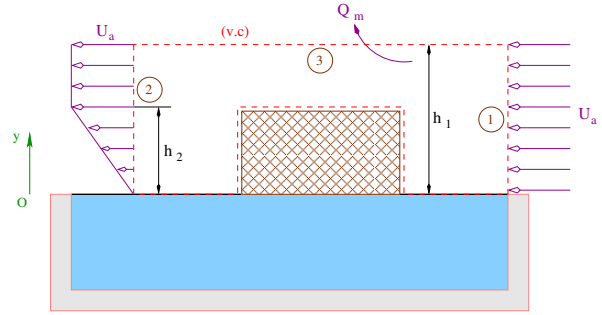


FIGURE 2.23: C13.

Rép : 1) $q = \begin{cases} \frac{U_a}{h_2} y & \text{si } 0 \leq y < h_2 \\ U_a & \text{si } y \geq h_2 \end{cases}$;
 2) $m_a = \frac{1}{2} \rho_a U_a h_2$. 3) $|F| = \frac{1}{6} \rho_a U_a^2 h_2$.

C14 : Calculer le module et la direction de la résultante des forces dues à l'action de l'eau sur le Té de raccordement ci-contre. On suppose que l'écoulement est stationnaire, que les variables d'écoulement sont uniformes et que les forces de pesanteur sont négligeables. On donne :

- $D_1 = 4 \text{ dm}$; $P_1 = 65 \text{ m}$ d'eau ; $Q_{v1} = 201 \text{ l/s}$;
 $D_2 = 25 \text{ cm}$; $P_2 = 65 \text{ m}$ d'eau ; $Q_{v2} = 81 \text{ l/s}$;
 $D_3 = 4 \text{ dm}$; $P_3 = 64 \text{ m}$ d'eau ; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
 et $\alpha = 30^\circ$.

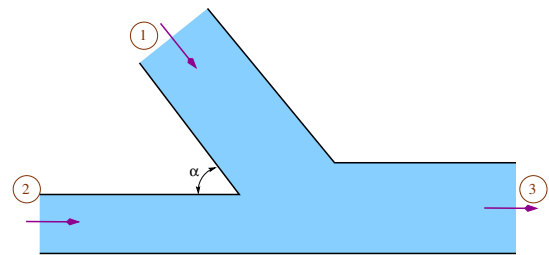


FIGURE 2.24: C14.

Rép : 32, 24 kN ; 29, 17°.

C15 : Un tube circulaire de rayon R_B est connecté à un large tube circulaire de rayon R_A . Le profil de vitesse dans la section A est donné par :

$$q_A = 2\beta \left[1 - \frac{r^2}{R_A^2} \right]$$

où β est une constante.

En considérant que l'écoulement est stationnaire et incompressible, trouver l'expression de la vitesse q_B en fonction de R_A , R_B et β .

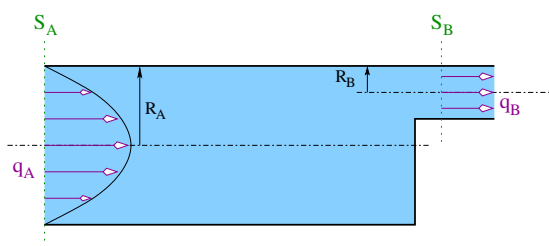


FIGURE 2.25: C15.

Rép : $q_B = \beta \left(\frac{R_A}{R_B} \right)^2$.

C16 : Un venturi est disposé sur une conduite d'eau inclinée. Les tubes des liaisons du manomètre à mercure sont remplis d'eau. Calculer la dénivellation h au manomètre en fonction de q_1 , D_1 , D_2 , ρ , ρ_m et g . Expliquer pourquoi l'inclinaison de la conduite n'intervient pas dans les calculs.

On donne : $D_1 = 25 \text{ cm}$; $D_2 = 10 \text{ cm}$;

$g = 10 \text{ m/s}^2$; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$;

$\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3$; $h = 8 \text{ cm}$.

- Calculer le débit volumique en l/s .

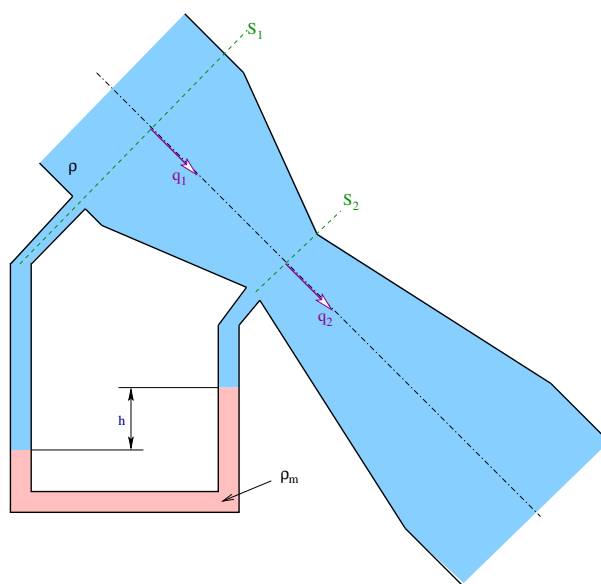


FIGURE 2.26: C16.

Rép : $30,64 \text{ l/s}$.

C17 : Un circuit hydraulique horizontal a les dimensions indiquées sur la figure ci-dessous. Il comporte un venturi, une prise de pression statique et une prise de pression double. Ces divers appareils sont reliés à des manomètres à mercure. Les tubes de liaison aux manomètres sont remplis d'eau. On donne :

- Masse volumique du mercure :

$$\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3.$$

- Pression absolue au point 0 : $P_0 = 1,5 \text{ bar}$.

- Pression atmosphérique : $P_a = 1 \text{ bar}$.

- Hauteur z : $z = 1 \text{ m}$.

1- Sachant que la dénivellation $h_v = 40 \text{ mm}$, calculer le débit volumique dans la conduite.

2- Calculer la dénivellation h_s .

3- Calculer la dénivellation h_d dans la prise de pression double.

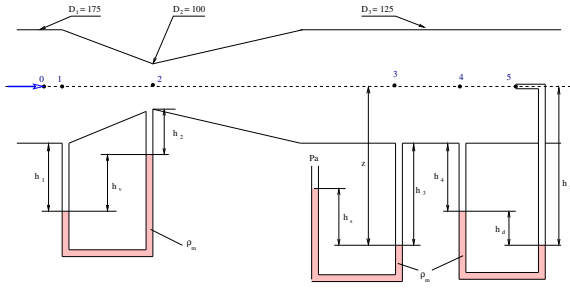


FIGURE 2.27: C17.

Rép : 1) $0,02613\text{ m}^3/s$. 2) $434,8\text{ mm}$.
3) $18,3\text{ mm}$.

C18 : Un écoulement permanent d'eau entre dans un tube perforé ($D_1 = 0,2\text{ m}$) avec une vitesse $q_1 = 6\text{ m/s}$. Le profil de la vitesse d'écoulement à travers la paroi perforée du tube est supposée linéaire sur une longueur $L = 0,5\text{ m}$.

- 1- Trouver la vitesse de décharge q_2 .
- 2- L'eau qui sort continue son écoulement le long du tronçon du tube non perforé et s'échappe radialement entre deux disques circulaires distants de $h = 0,1\text{ m}$.

En supposant que les variables d'écoulement sont uniformes dans les sections d'entrée et de sortie (située à $R_2 = 0,3\text{ m}$), déterminer la vitesse q_3 .

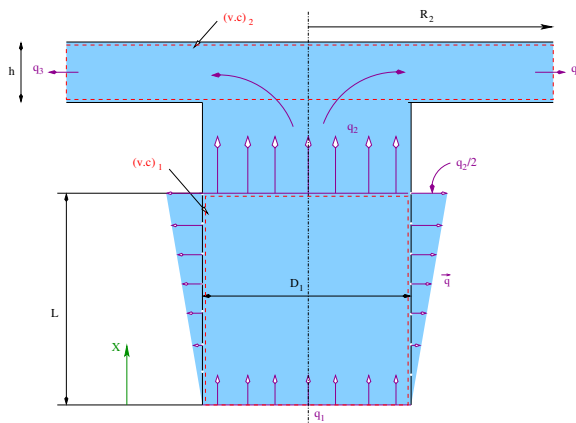


FIGURE 2.28: C18.

Rép : 1) $1,714\text{ m/s}$. 2) $0,285\text{ m/s}$.

C19 : Soit un réservoir avec un tube d'entrée et un tube de sortie. Les sections de ces tubes sont circulaires. Le fluide s'écoule à travers le 1^{er} tube avec une vitesse de profil parabolique :

$$q_e = q_{\max} \left[1 - \frac{r^2}{R_e^2} \right]$$

où R_e est le rayon du 1^{er} tube et q_{\max} une constante.

Le fluide sort à travers le second tube avec une vitesse q_m dans la section de sortie.

Trouver l'expression de q_m en fonction de R_e et R_s sachant que l'écoulement est stationnaire et incompressible.

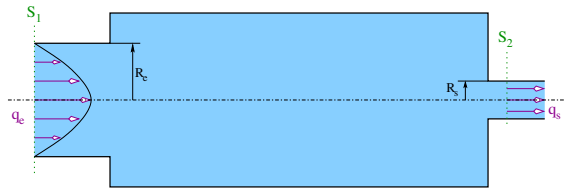


FIGURE 2.29: C19.

Rép : $q_m = \frac{1}{2} q_{\max} \left(\frac{R_e}{R_s} \right)^2$.

C20 : Le profil de vitesse d'un écoulement d'huile entre deux plaques convergentes de largeurs 45 cm (perpendiculaires au papier) est donné par l'expression suivante :

$$\frac{u}{U_{\max}} = \left(\frac{2y}{y_0} \right) \left(1 - \frac{y}{y_0} \right)$$

Avec :

$y_0 = 5\text{ m}$ et $U_{\max} = 0,3\text{ m/s}$.

- 1- Calculer le débit volumique total ainsi que la vitesse débitante.
- 2- Evaluer la vitesse débitante pour $y = 2\text{ m}$.

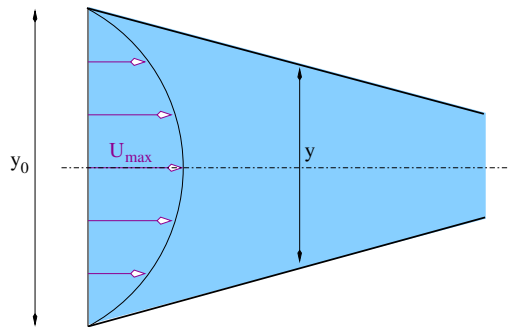


FIGURE 2.30: C20.

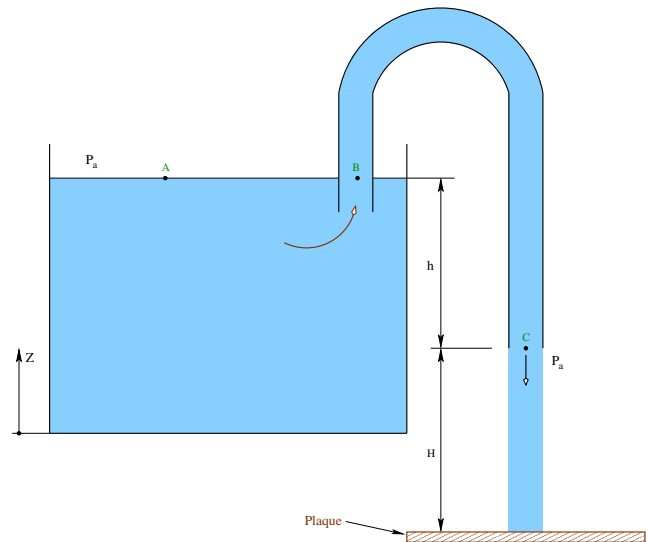


FIGURE 2.31: C21.

Rép : 1) $0,225 \text{ m}^3/\text{s}$; $0,1 \text{ m/s}$. 2) $0,25 \text{ m/s}$.

C21 : Un siphon de section uniforme est utilisé pour drainer l'eau du réservoir. h étant la hauteur entre la surface libre du liquide dans le réservoir et le bout du tube.

Rép : 1) $q_B = \sqrt{2gh}$. 2) $P_B = P_a - \rho gh$.
4) $|F| = S_C (P_a + 2\rho gh + \rho gH)$.

1- Déterminer la vitesse moyenne du fluide à travers le tube ?

2- Déterminer la pression qui règne dans le tube au point B ?

3- Montrer que si le bout du tube est au dessus de la surface libre du liquide dans le réservoir alors le liquide ne s'écoule pas à travers le siphon ?

4- L'eau sortant du tube au point C tombe sur une plaque horizontale située à la distance H du bout du tube. Déterminer l'expression de la force exercée par le jet sur la plaque ?

C22 : Une barrière rectangulaire intercepte l'écoulement stationnaire d'un fluide idéal et incompressible dans un canal. En utilisant le volume de contrôle indiqué sur la figure et en supposant que les vitesses sont uniformes au travers des sections (1) et (2), trouver l'expression de la force F exercée par le fluide sur la barrière en fonction de q_1 , q_2 , h_1 , h_2 , ρ , g et L (Largeur de la barrière dans le sens perpendiculaire à l'écoulement).

On suppose que la distribution de pression est hydrostatique et on néglige les forces de gravité.

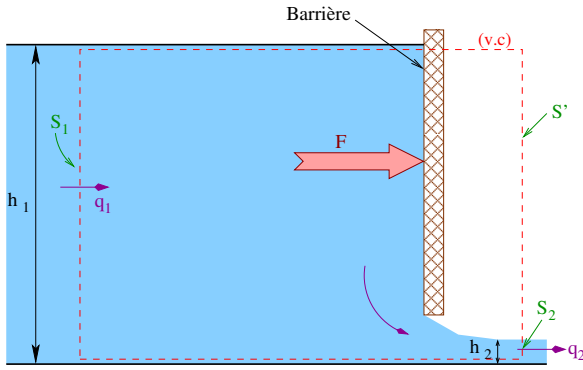


FIGURE 2.32: C22.

Rép : $F = \rho L [q_2^2 h_2 - q_1^2 h_1 - \frac{1}{2} g (h_1^2 - h_2^2)]$

C23 : Soit un écoulement permanent dans la conduite cylindrique schématisée ci-dessous :

L'eau passe à travers un venturi puis dans une tuyère convergente de diamètre initial D_2 et final D_3 . Cette tuyère est vissée sur la conduite et le jet qui s'échappe frappe une plaque fixe. En supposant le fluide non visqueux et en négligeant les forces de pesanteur :

- 1- Calculer les pressions à l'entrée P_0 et au col P_1 du venturi ;
- 2- Calculer la composante horizontale F_t de la force exercée sur la tuyère par le fluide.
- 3- Déterminer les expressions des forces horizontale F_x et verticale F_y exercées sur la plaque. Prendre : $S_4 = S_5 = S_3/2$.
- 4- Calculer la résultante des forces F appliquées sur la plaque en supposant que l'écoulement est symétrique de part et d'autre de l'axe du jet principal.
- 5- Si les forces de pesanteur n'étaient pas négligeables, quelle serait alors le sens de cette résultante ? Justifier votre réponse.

On donne : $Q_v = 0,2 m^3/s$; $D_0 = D_2 = 0,2 m$; $D_1 = 0,1 m$; $D_3 = 0,05 m$ et $P_3 = 10^5 N/m^2$.

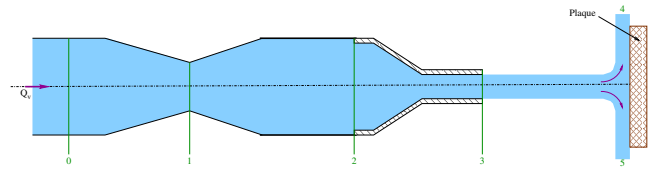


FIGURE 2.33: C23.

Rép : 1) $5,267.10^6 Pa$; $4,963.10^6 Pa$.

2) $146,2 kN$.

3) $F_x = \frac{\pi D_3^2}{4} (P_a + \rho q_3^2)$;

$F_y = \frac{\pi D_3^2}{8} \rho (q_4^2 - q_5^2)$.

4) $20,57 kN$.

C24 : Une conduite de diamètre D_2 munie d'un divergent est raccordée à une conduite de diamètre D_1 . L'assemblage est réalisé par des boulons. Lorsque de l'eau circule dans le circuit de 1 vers 2, le manomètre à mercure relié aux prises de pression statique indique une dénivellation $h = 30 cm$. Déterminer la force supportée par l'assemblage (ensemble des boulons) si la pression statique qui règne dans la partie du circuit de diamètre D_2 est approximativement égale à la pression atmosphérique.

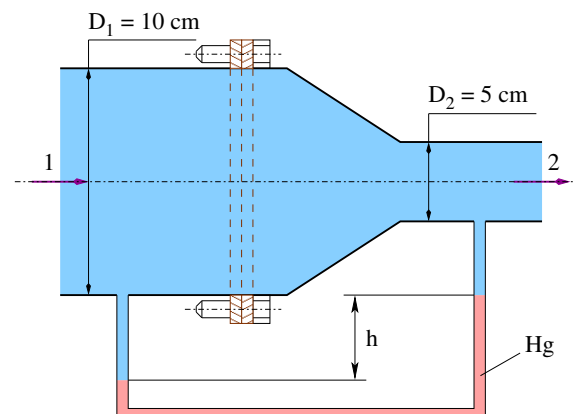


FIGURE 2.34: C24.

Rép : $767,177 N$.

C25 : Un jet horizontal de diamètre D_1 et de vitesse q_1 , frôlant une plaque montée sur un chariot en mouvement, est dévié vers le haut de $\theta = 60^\circ$ par rapport à l'horizontale.

Si $D_2 = D_1$ et $q_2 = q_1$, établir l'expression de la force horizontale à laquelle doit être soumis le chariot pour qu'il reste en mouvement uniforme avec une vitesse horizontale dans le sens du jet $q_{ch} = q_1/3$.

Négliger tout frottement ainsi que l'effet de la pesanteur.

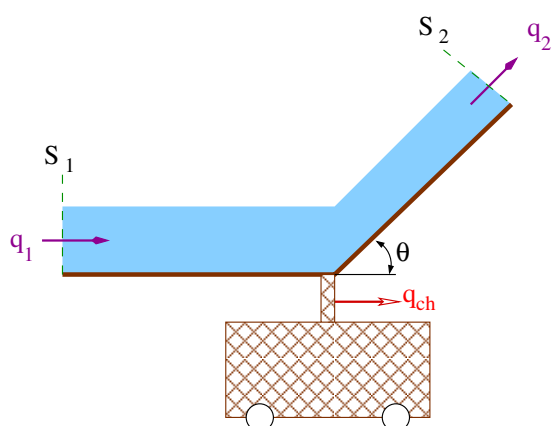


FIGURE 2.35: C25.

Rép : 3) $F_x = \frac{\pi D_1^2}{4} (P_2 - P_1 - \frac{1}{2} \rho q_1^2)$.
 $F_x = \frac{\pi D_1^2}{4} \rho [g (z_2 - z_1) - \frac{1}{2} \rho q_1^2]$.

C26 : Un réservoir plein d'eau, ouvert à l'atmosphère et de forme cubique de 10 m de côté se vide par deux orifices percés dans le fond horizontal débouchant à l'air libre et dont les sections valent $0,1\text{ dm}^2$ chacune. Quel est le temps (heure/ minute/ seconde) nécessaire à sa vidange totale ?

On suppose que les vitesses de sorties (dont on donnera les expressions) ne dépendent que de la hauteur h du liquide dans le réservoir.

Justifier toutes vos simplifications. Prendre : $g = 10\text{ m/s}^2$.

Rép : $19\text{ h } 38\text{ mn } 30\text{ s}$.

C27 : Pour mesurer le débit volumique, on utilise le tube de Venturi représenté sur la figure ci-dessous :

La dénivellation indiquée par le manomètre est $\Delta h = 35,8\text{ cm}$. En supposant que l'écoulement est stationnaire et que les variables d'écoulements sont uniformes dans les sections correspondantes, calculer le débit d'eau passant à travers le Venturi.

On donne : $D_A = 300\text{ mm}$; $D_B = 150\text{ mm}$;
 $H = 750\text{ mm}$; $g = 10\text{ m/s}^2$;
 $\rho_m = 13600\text{ kg/m}^3$.

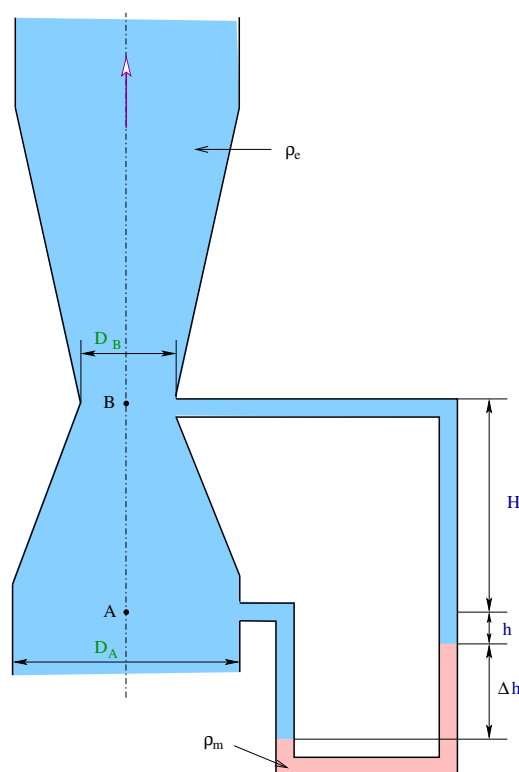


FIGURE 2.36: C27.

Rép : $0,172\text{ m}^3/\text{s}$.

C28 : Le circuit de la figure est constitué d'un réservoir rempli d'eau, d'une conduite de diamètre $D_2 = 125\text{ mm}$ et d'un convergent

débitant à l'air libre de diamètre de sortie $D_3 = 75\text{ mm}$. La différence de niveau entre la surface libre et l'axe de la conduite est $h = 3\text{ m}$.

Si on néglige toutes les pertes et on suppose que le débit réel est égal au débit calculé, déterminer :

1- Le débit volumique du circuit et la pression effective dans la conduite (qu'on exprime en hauteur d'eau).

2- Le temps nécessaire pour que le niveau de la surface libre descende de 1 m ainsi que le temps de vidange complet du réservoir si sa section est $s = 5\text{ m}^2$.

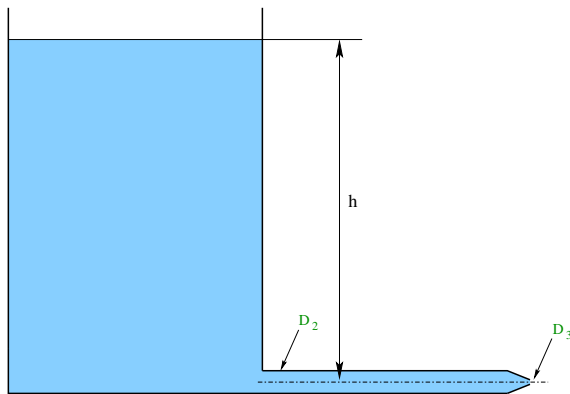


FIGURE 2.37: C28.

Rép : 1) $33,9\text{ l/s}$; 2, 61 m . 2) $14\text{ mn } 46\text{ s}$.

C29 : Un jet d'eau, sortant d'une lance et ayant une section S_j et une vitesse q_j horizontale, frappe une plaque fixée sur un support (voir figure ci-contre). En négligeant les forces de pesanteur et en supposant l'écoulement permanent :

1- Déterminer les expressions des forces horizontale F_x et verticale F_y exercées sur la plaque. Prendre : $S_1 = S_2 = S_j/2$.

2- Calculer la résultante des forces F appliquées sur la plaque en supposant que l'écoulement est symétrique de part et d'autre de

l'axe du jet principal.

On donne : $S_j = 3\text{ cm}^2$, $q_j = 20\text{ m/s}$.

3- Si les forces de pesanteur n'étaient pas négligeables, quelle serait alors le sens de cette résultante ? Justifier votre réponse.

N.B : Les variables d'écoulement sont uniformes dans tout le problème.

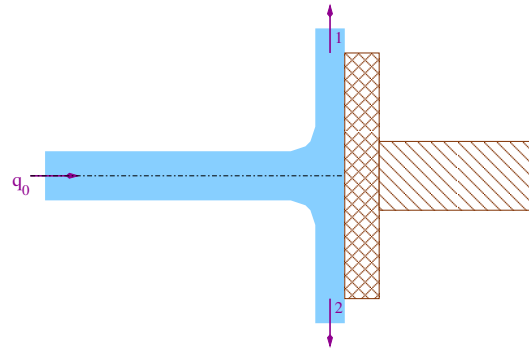


FIGURE 2.38: C29.

Rép : . 1) $F_x = S_j (P_a + \rho q_j^2)$;

$$F_y = \frac{1}{2} \rho S_j (q_2^2 - q_1^2).$$

2) 1550 N .

C30 : Deux réservoirs A et B sont réunis par un orifice noyé de section $s = 1\text{ cm}^2$. La section du réservoir A est $S_A = 1\text{ m}^2$, celle du réservoir B est $S_B = 0,5\text{ m}^2$. A l'instant $t = 0$, la différence de niveau entre A et B est $h = 0,5\text{ m}$. Calculer le temps T pour que le liquide soit au même niveau en A et B .

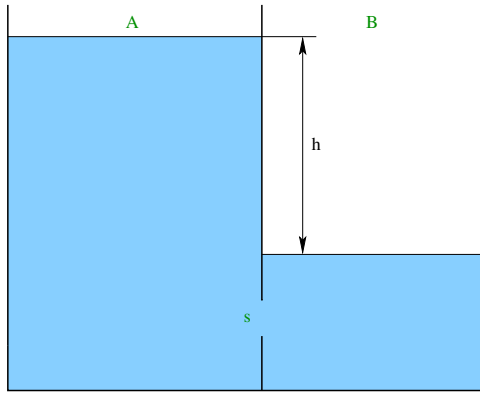


FIGURE 2.39: C30.

Rép : 17 mn 44 s.

C31 : L'embout d'une lance d'incendie a un diamètre intérieur D_2 , il est vissé à un tube cylindrique de diamètre intérieur D_1 . Quand l'embout est ouvert, la lance débite Q_v m^3 d'eau par seconde.

Déterminer la résultante des forces à laquelle doit résister le pas de vis.

On suppose que l'écoulement est stationnaire, ces variables sont uniformes et que la pression $P_2 = 0$ sur l'axe du tube (la vitesse étant très élevée).

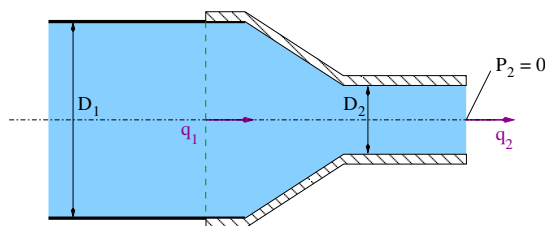


FIGURE 2.40: C31.

Rép : $F = \frac{4}{\pi} \rho Q_v^2 \left[\frac{1}{D_2^2} - \frac{1}{D_1^2} - \frac{D_2^2}{2} \left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4} \right) \right]$.

C32 : L'écoulement circulant dans une conduite horizontale de diamètre $d = 12$ cm rempli un réservoir cylindrique de diamètre $D = 75$ cm et de hauteur $H = 1$ m. Au temps

$t = 0$, la hauteur de l'eau dans le réservoir est $h = 30$ cm. Calculer le temps nécessaire pour remplir ce réservoir.

On donne : $q_1 = 2,5$ m/s et $q_2 = 1,9$ m/s.

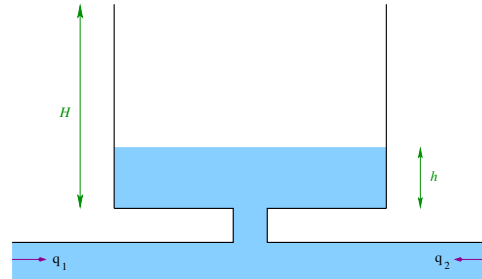


FIGURE 2.41: C32.

Rép : 46 s.

C33 : On considère l'écoulement permanent de l'eau dans une conduite de diamètre D . Le fluide la traverse entre les sections S_1 et S_2 et sort aussi par la partie perforée de longueur $5D$. La distribution de vitesses étant uniforme dans les sections S_1 et S_2 , trouver la vitesse q_2 dans la section S_2 .

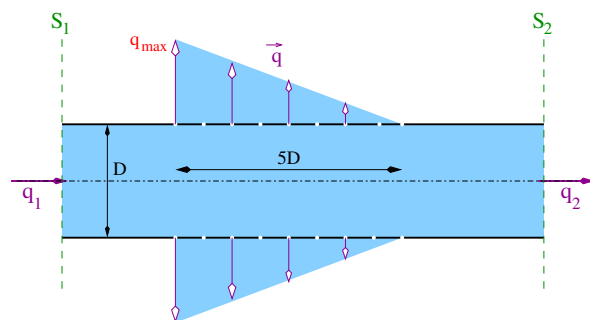


FIGURE 2.42: C33.

Rép : $q_2 = q_1 - 10 q_{max}$

C34 : Soient deux disques parallèles entre lesquels se trouve de l'huile. A l'instant $t = 0$,

le disque supérieur situé à la hauteur h_0 commence à se déplacer uniformément vers le bas avec une vitesse constante q_0 . L'huile se déplace alors avec une vitesse q uniforme dans la direction horizontale. Déterminer l'expression du profil des vitesses q .

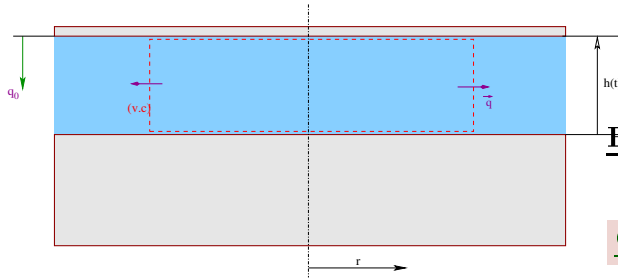


FIGURE 2.43: C34.

Rép : $q(r, t) = \frac{q_0 r}{2(h_0 - q_0 t)}$.

C35 : Soit un jet d'eau de diamètre D_1 supportant un objet de révolution conique. On suppose que l'écoulement est idéal, stationnaire et que les variables d'écoulement sont uniformes dans chaque section. En négligeant les forces de pression, calculer la masse M de l'eau et du cône ensemble.

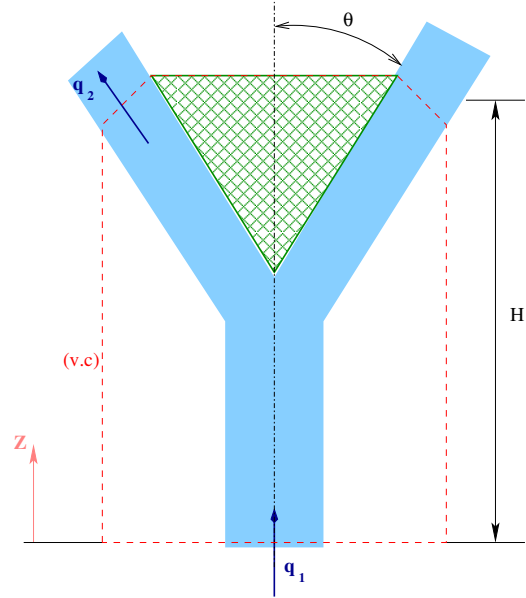


FIGURE 2.44: C35.

Rép : $M = 4,48 \text{ kg}$.

C36 : Un piston de pompe à eau de diamètre $D = 60 \text{ cm}$ se déplace à la vitesse $q_1 = 1,5 \text{ m/s}$. Quelle est la vitesse de l'eau dans la conduite de refoulement de la pompe dont le diamètre est $d = 40 \text{ cm}$?

Rép : $3,375 \text{ m/s}$.

C37 : Un jet d'eau de diamètre d sort d'un réservoir de diamètre D . Si on suppose que la vitesse d'écoulement dans le jet est donnée par $q = \sqrt{2gh}$. Trouver le temps nécessaire pour que la surface du réservoir s'abaisse de la hauteur h_1 à h_2 . La masse volumique et la vitesse sont supposées uniformes à travers la section de sortie.

Application Numérique : Calculer le temps de vidange d'une boîte de hauteur 115 mm , de diamètre 100 mm qui se vide par un petit orifice de $1,5 \text{ mm}$ de diamètre ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

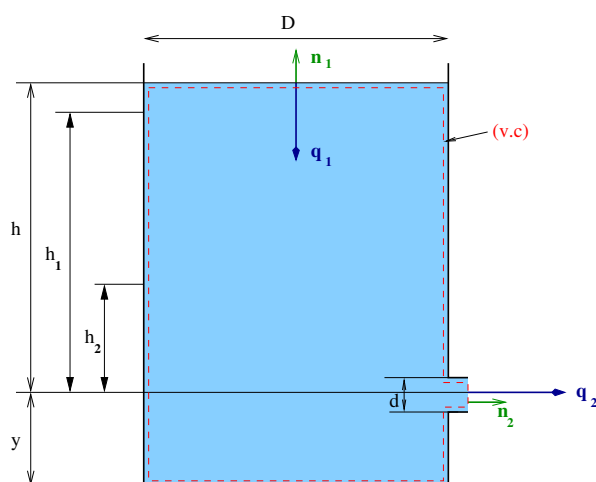


FIGURE 2.45: C37.

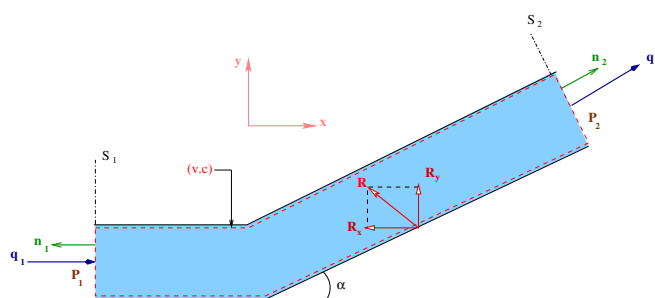


FIGURE 2.46: C38.

Rép :

$$F_x = S_2 \cos \alpha (P_2 + \rho q_2^2) - S_1 (P_1 + \rho q_1^2) ;$$

$$F_y = -S_2 \sin \alpha (P_2 + \rho q_2^2).$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

C39 : Soit à transporter de l'eau dans une conduite d'un point (1) à un point (2) avec les données suivantes :

Rép : 11 mn 14 s.

C38 : Considérons l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible dans une conduite coudée d'un angle α . On cherche la force F exercée par le fluide sur la conduite entre les sections S_1 et S_2 . La masse volumique du fluide est ρ et on suppose que les variables d'écoulement sont uniformes dans les deux sections et on peut négliger l'effet de la pesanteur.

$$P_1 = 15 \text{ N/cm}^2, \quad q_1 = 8 \text{ m/s}, \quad z_1 = 12 \text{ m},$$

$$P_2 = 10 \text{ N/cm}^2, \quad q_2 = ?, \quad z_2 = 2 \text{ m},$$

$$\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3, \quad g = 10 \text{ m/s}^2.$$

- 1- Quelle est la vitesse au point (2) ?
- 2- Si le débit transporté est de $6 \text{ dm}^3/\text{s}$; calculer les diamètres de la conduite aux points (1) et (2).

Rép : 1) 19 m/s . 2) 31 mm ; 20 mm .

Écoulements irrotationnels

3.1 Introduction

Malgré que nous avons négligé les effets visqueux dans l'écoulement idéal, les équations du mouvement (Euler) obtenues demeurent difficiles à résoudre à cause des termes non linéaires $\frac{Dq}{Dt}$. Dans ce chapitre, nous allons traiter certains types d'écoulements dans lesquels les éléments de fluide ne subissent pas de rotation pendant leurs mouvements. Un tel écoulement est dit *irrotationnel* ou *potentiel*. Avec cette restriction, nous obtiendrons des équations linéaires qui sont faciles à résoudre. On peut avoir ce type d'écoulement dans les régions où l'effet de viscosité est négligeable c'est-à-dire loin des couches limites adjacentes aux frontières des corps. En plus, nous considérons un fluide barotrope ($\rho = \rho(P)$).

Toujours en fluide parfait, nous allons introduire ici les propriétés de l'écoulement plan bidimensionnel particulièrement intéressantes dans le cadre de l'étude des problèmes "*direct*" et "*inverse*" :

- Problème direct: Il consiste à définir le champ de vitesse correspondant à une géométrie donnée (analyse).
- Problème inverse: Il consiste à définir la géométrie des enveloppes correspondant à un champ de vitesse fixé à priori (conception).

3.2 Circulation du vecteur vitesse

On appelle circulation Γ du vecteur vitesse \vec{q} le long d'une courbe \widetilde{AB} , dont l'abscisse curviligne (ou élément d'arc) \vec{ds} (Fig.3.1), l'intégrale curviligne:

$$\Gamma_{AB} = \int_{\widetilde{AB}} \vec{q} \cdot \vec{ds} \quad (3.1)$$

avec:

$$\vec{q} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \quad \text{et} \quad d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

Dans le cas général, Γ_{AB} dépend des points A et B et de la forme du trajet \widetilde{AB} .

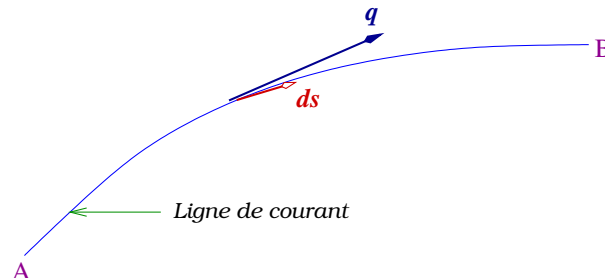


Figure 3.1: *Circulation du vecteur vitesse.*

3.3 Potentiel des vitesses

Si le champ des vitesses est tel que Γ_{AB} ne dépend que de la position des points A et B et non du chemin suivi, on dit que le champ dérive d'un potentiel. On peut alors écrire :

$$\Gamma_{AB} = \Phi_B - \Phi_A = \int_{\widetilde{AB}} d\Phi \quad (3.2)$$

avec

$$\vec{q} = \vec{\nabla} \Phi = \overrightarrow{grad} \Phi$$

En effet,

$$\vec{q} = \vec{\nabla} \Phi \Leftrightarrow u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} \quad \text{donc:}$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.3)$$

$$\Gamma_{AB} = \int_{\widetilde{AB}} (u dx + v dy + w dz) = \int_{\widetilde{AB}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right).$$

$$\Gamma_{AB} = \int_{\widetilde{AB}} d\Phi = \Phi_B - \Phi_A$$

Remarques:

1. Dans un écoulement avec potentiel des vitesses et à un instant donné, le vecteur vitesse est en tout point perpendiculaire à la surface équipotentielle $\Phi(x, y, z) = C^{te}$ qui passe par ce point. Par suite, les lignes de courant sont orthogonales aux surfaces équipotentiels. Le sens des lignes de courant est celui des Φ croissants.
2. En coordonnées cylindriques, les composantes du vecteur vitesse sont u_r, v_θ et w_z . Leurs expressions en fonction du potentiel s'écrivent :

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad w_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.4)$$

3. La circulation Γ_{AB} est constante de A à B si l'écoulement est irrotationnel (ou à potentiel de vitesses).

3.4 Fonction de courant

Soit une tranche d'épaisseur unité et deux lignes de courant ψ_A et ψ_B . Soit \vec{ds} l'abscisse curviligne de la courbe reliant les points A et B et passant par le point M . Soit \vec{q} la vitesse du fluide en M (Fig.3.2). Le débit volumétrique à l'intérieur du tube de courant est donné par:

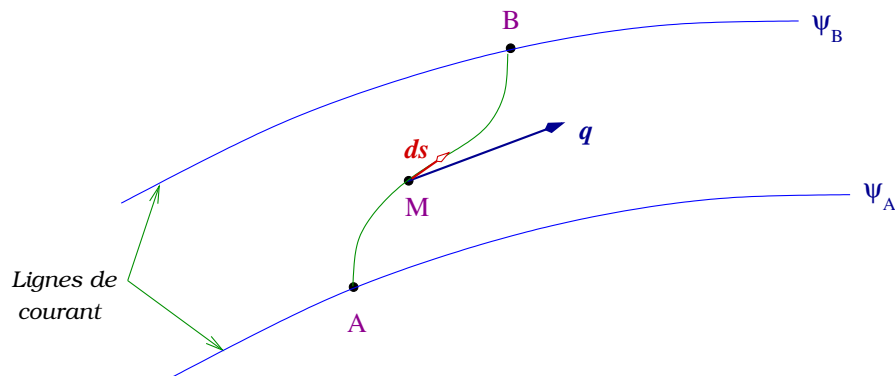


Figure 3.2: *Fonction de courant.*

$$q_v = \psi_A - \psi_B \quad (3.5)$$

q_v : débit par unité de profondeur [m^2/s].

Les composantes du vecteur vitesse en fonction de ψ en coordonnées cartésiennes sont:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (3.6)$$

et en coordonnées cylindriques:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad (3.7)$$

3.5 Propriétés importantes

1. L'écoulement irrotationnel est décrit par la fonction ϕ et les lignes de courant par la fonction ψ .
2. Les fonctions ϕ et ψ sont des fonctions des coordonnées du point considéré et sont en tout point orthogonales.
3. Les fonctions ϕ et ψ sont des fonctions harmoniques, c'est-à-dire:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.8)$$

et

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.9)$$

Il s'ensuit que toute solution de l'équation de Laplace peut être soit un équipotentiel de vitesses, soit une fonction de courant; en fait, chacune des fonctions est définie à un instant t par des conditions aux limites.

4. On démontre que le module de la vitesse \vec{q} est égale en tout point à la variation transversale de la fonction ψ . Il est aussi donné en tout point par le taux de variation de la fonction ϕ en fonction de l'abscisse curviligne s .

$$q = \frac{\Delta \psi}{\Delta n} = \frac{\Delta \phi}{\Delta s} \quad (3.10)$$

5. Certaines lignes de courant (ψ_1 et ψ_5) forment la frontière de l'écoulement (Fig.3.3). Pour ces lignes de courant particulières d'équation $S(x, y) = 0$; la condition de glissement sera observée lorsque le produit scalaire entre la vitesse \vec{q} et la normale à la paroi est nul:

$$u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (3.11)$$

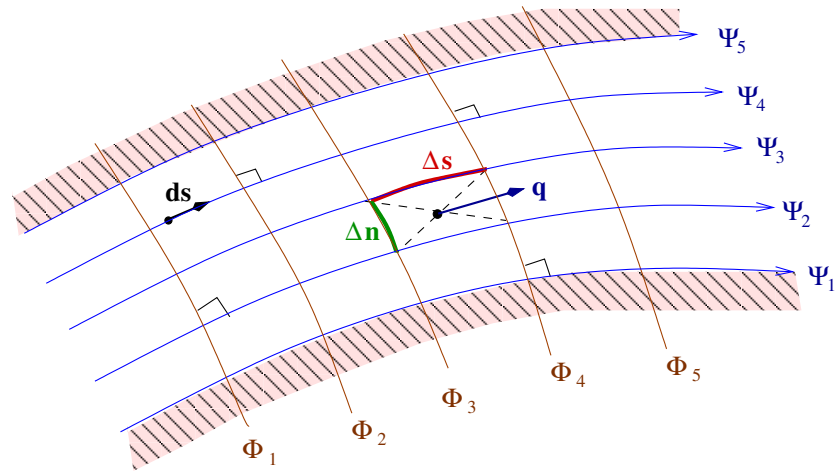


Figure 3.3: *Condition de glissement.*

6- L'écoulement irrotationnel n'est le siège d'aucun vecteur tourbillon. Il ne peut donc être utilisé que pour la description des écoulements en fluide parfait ou, par extension, des écoulements en fluide réel exempts de décollements. Cette propriété n'est pas applicable aux écoulements réels présentant soit une forte incidence sur des obstacles minces (désadaptation) soit de grandes variations de direction ou de section de passage.

Pour un écoulement irrotationnel, le *vecteur tourbillon* $\vec{\Omega}$ du champ de vitesse (ou *taux de rotation de la particule*) doit être nul:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{q} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{0} \quad (3.12)$$

et en développant ce produit vectoriel, nous aurons:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = \frac{1}{2} \eta \vec{i} + \frac{1}{2} \zeta \vec{j} + \frac{1}{2} \xi \vec{k}$$

Pour un écoulement bidimensionnel, il suffit alors de vérifier que la " *vorticité* " ξ soit nulle pour qu'il soit irrotationnel (condition suffisante). c'est-à-dire:

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3.13)$$

3.6 Exemples d'écoulements simples

3.6.1 Écoulement rectiligne plan

Soit un écoulement rectiligne plan de vitesse \vec{q}_0 que nous supposons uniforme et dirigée selon les x positifs.

$$\text{On a : } u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = q_0 \Rightarrow \psi(x, y) = q_0 y + f(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = C^{te} = C_1$$

$$\text{d'où: } \psi(x, y) = \psi(y) = q_0 y + C_1$$

$$\text{De même: } u = \frac{\partial \phi}{\partial y} = q_0 \Rightarrow \phi(x, y) = q_0 x + g(y)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C^{te} = C_2$$

$$\text{d'où: } \phi(x, y) = \phi(x) = q_0 x + C_2$$

Le réseau des lignes équipotentielles et des lignes de courant forme donc un damier (Fig.3.4).

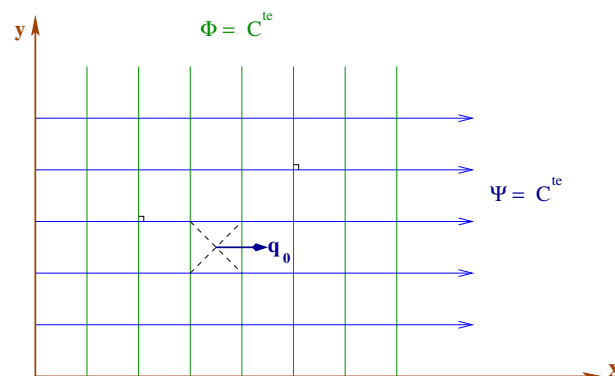


Figure 3.4: *Écoulement uniforme.*

3.6.2 Écoulement autour d'une source de débit q_v par unité de profondeur

Une *ligne source* est une ligne droite infinie le long de laquelle on suppose qu'un fluide incompressible est envoyé radialement à l'extérieur .

q_v est appelée *intensité de la ligne source* et l'écoulement est distribué uniformément à une distance r , sur une surface cylindrique dont la circonférence est $2\pi r$ (Fig.3.5).

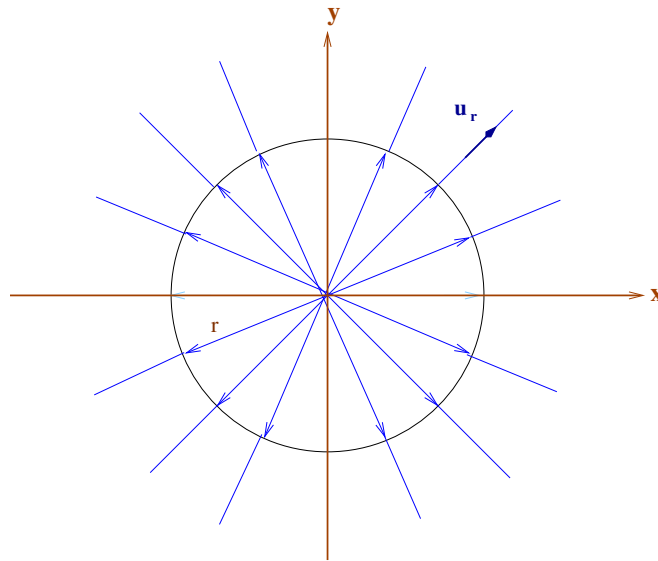


Figure 3.5: *Définition d'une source.*

Le débit de la source est donné par:

$$q_v = 2\pi r h \cdot u_r \quad \text{où} \quad h = 1 \Rightarrow u_r = \frac{q_v}{2\pi r}$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{q_v}{2\pi r} \Rightarrow \phi(r, \theta) = \frac{q_v}{2\pi} \ln r + f(\theta)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow f'(\theta) = 0 \Rightarrow f(\theta) = C^{te} = C_1$$

$$\text{d'où: } \phi(r, \theta) = \frac{q_v}{2\pi} \ln r + C_1 \Leftrightarrow \phi(x, y) = \frac{q_v}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C_1.$$

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{q_v}{2\pi r} \Rightarrow \psi(r, \theta) = \frac{q_v}{2\pi} \theta + g(r)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \Rightarrow g(r) = C^{te} = C_2$$

$$\text{d'où: } \psi(r, \theta) = \frac{q_v}{2\pi} \theta + C_2 \Leftrightarrow \psi(x, y) = \frac{q_v}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} + C_2.$$

Les lignes de courant sont donc des rayons issus de la source et les équipotentielles des tubes concentriques (Fig.3.6).

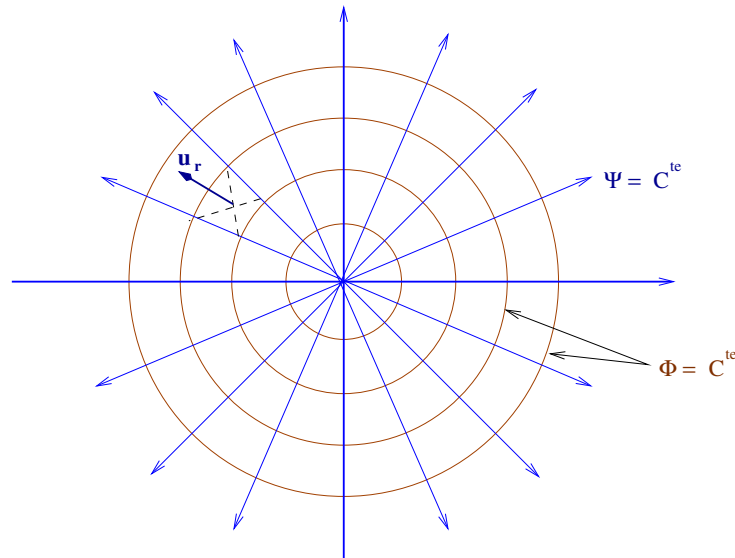


Figure 3.6: *Écoulement autour d'une source.*

Les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes s'expriment par:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{q_v x}{2\pi(x^2+y^2)} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{q_v y}{2\pi(x^2+y^2)} \end{cases}$$

3.7 Utilisation de la variable complexe

3.7.1 Fonction analytique

L'étude des écoulements plans à potentiel des vitesses est facilité par l'introduction des fonctions complexes. A un point $M(x, y)$ on fait correspondre un affixe complexe (Fig.3.7) tel que:

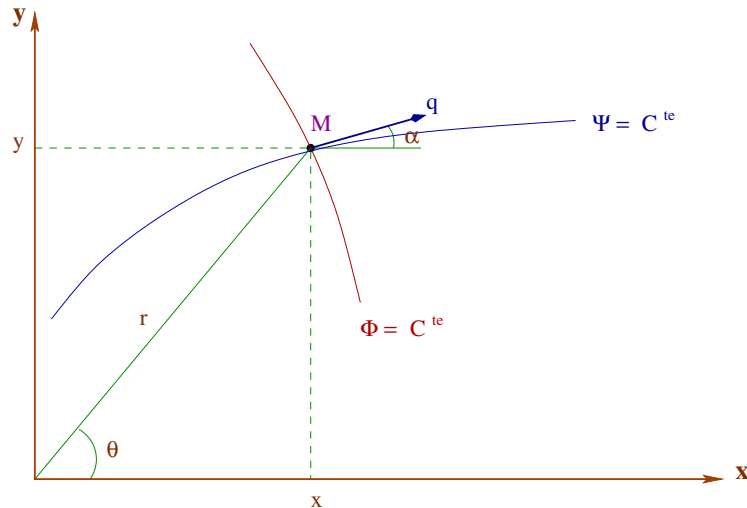


Figure 3.7: *Coordonnées complexes.*

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{module de } z) \quad \text{et} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{argument de } z)$$

De même, la vitesse \vec{q} au point M de composantes (u, v) peut être écrite sous forme vectorielle complexe:

$$q = u + iv = q(\cos \alpha + i \sin \alpha) = q e^{i\alpha} \quad (3.14)$$

Nous avons vu que ψ et ϕ peuvent être introduites à partir des composantes de la vitesse \vec{q} , l'une satisfaisant l'équation de continuité, l'autre l'irrotationalité de l'écoulement:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.15)$$

Les relations de l'équation (3.15) sont dites: *conditions de Cauchy-Riemann.*

Dans le cadre de l'étude analytique, on introduit ψ et ϕ par l'intermédiaire de la *fonction potentiel complexe* $F(z)$:

$$F(z) = \phi + i\psi \quad (3.16)$$

La fonction $F(z)$ pour laquelle ψ et ϕ satisfont aux relations (3.15) est une fonction analytique dont les parties réelle et imaginaire satisfont l'équation de Laplace.

3.7.2 Propriétés de la fonction potentiel complexe

Nous avons d'une part:

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - i v$$

et d'autre part:

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{i \partial y} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -i v + u$$

$F(z)$ possède donc une dérivée unique en un point M quelconque. On retiendra donc:

$$\frac{dF}{dz} = u - i v \quad (3.17)$$

qui est une vitesse complexe \vec{q}' appelée *vitesse conjuguée* de \vec{q} et définie par:

$$q' = q e^{-i\alpha} \quad (3.18)$$

3.7.3 Exemples d'application

3.7.3.1 Ecoulement uniforme

Il est défini par la fonction potentiel complexe suivante:

$$F(z) = q_0 z \quad (3.19)$$

$$F(z) = q_0 (x + i y) = q_0 x + i q_0 y = \phi + i \psi \Rightarrow \begin{cases} \phi = q_0 x \\ \psi = q_0 y \end{cases}$$

La vitesse locale est calculable à partir de:

$$\vec{q} \left| \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = q_0 \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

La vitesse d'écoulement est donc uniforme en valeur et en direction en tout point du plan.

* Dans le cas où l'écoulement n'est pas parallèle à l'axe OX mais forme un angle α avec celui-ci, les équations seront les suivantes:

$$F(z) = q_0 z e^{-i\alpha} \quad (3.20)$$

L'opérateur $e^{-i\alpha}$ correspondant à une rotation d'angle α dans le sens trigonométrique (anti-horaire).

$$F(z) = q_0 z e^{-i\alpha} = q_0 r e^{i\theta} e^{-i\alpha} = q_0 r e^{i(\theta-\alpha)} = q_0 r [\cos(\theta - \alpha) + i \sin(\theta - \alpha)]$$

$$F(z) = q_0 r [(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) + i(\sin \theta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \theta)]$$

$$F(z) = q_0 [(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + i(y \cos \alpha - x \sin \alpha)] = \phi + i\psi$$

Donc l'écoulement sera défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = q_0 (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ \psi = q_0 (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \vec{q} \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = q_0 \cos \alpha \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = q_0 \sin \alpha \end{array} \right.$$

3.7.3.2 Ecoulement de type source ou puits

Il est défini par la fonction potentiel complexe suivante:

$$F(z) = \pm C_0 \ln z \quad (3.21)$$

Dans le cas d'une source:

$$F(z) = C_0 \ln z = C_0 \ln(r e^{i\theta}) = C_0 \ln r + i C_0 \theta = \phi + i\psi$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi = C_0 \ln r = C_0 \ln \sqrt{x^2 + y^2} \\ \psi = C_0 \theta = C_0 \arctan \frac{y}{x} \end{array} \right.$$

Les équipotentielles sont donc des cercles centrés sur la source ($r = C_0^{te}$) et les lignes de courant des droites passant par l'origine ($\frac{y}{x} = C_0^{te}$) comme il est indiqué sur la figure (Fig.3.6).

Déterminons maintenant la valeur de la constante C_0 :

Nous avons par définition du débit volumique:

$$q_v = 2\pi r \cdot u_r = C_0 2\pi \Rightarrow C_0 = \frac{q_v}{2\pi}$$

La vitesse locale est donnée par:

$$\vec{q} \left\{ \begin{array}{l} u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{C_0}{r} = \frac{q_v}{2\pi r} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \end{array} \right.$$

- Remarque:

Dans le cas d'un puits, le raisonnement est le même que ci-dessus et la vitesse d'écoulement est de sens opposé (Fig.3.8).

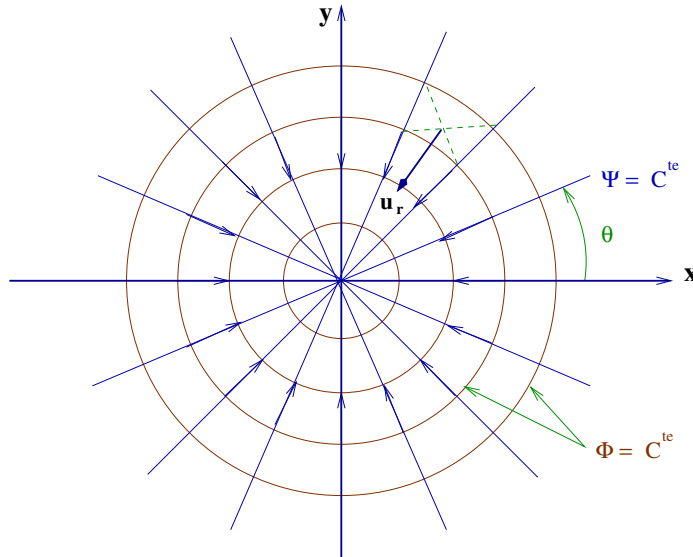


Figure 3.8: *Écoulement de type puits.*

* Si la source ou le puits sont décentrés de l'affixe z_0 , il seront définis par la relation générale suivante:

$$F(z) = \pm \frac{q_v}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (3.22)$$

3.7.3.3 Écoulement tourbillonnaire

Il est défini par la fonction potentiel complexe suivante:

$$F(z) = \pm i C_0 \ln z \quad (3.23)$$

Traisons le cas positif:

$$F(z) = i C_0 \ln z = i C_0 \ln(r e^{i\theta}) = -C_0 \theta + i C_0 \ln r = \phi + i \psi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = -C_0 \theta = -C_0 \arctan \frac{y}{x} \\ \psi = C_0 \ln r = C_0 \ln \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Les lignes de courant sont cette fois-ci des cercles concentriques tandis que les équipotentielles forment un faisceau de droites centrées sur l'origine (Fig. 3.9).

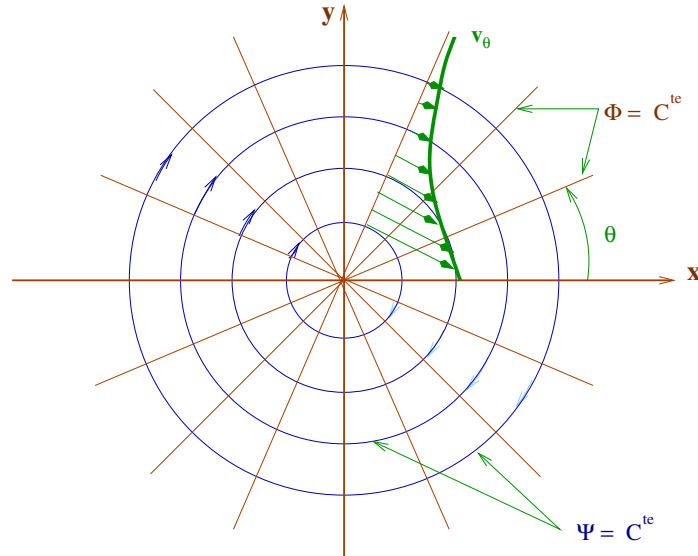


Figure 3.9: *Écoulement tourbillonnaire.*

La vitesse locale est donnée par:

$$\vec{q} \left| \begin{array}{l} u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{C_0}{r} \end{array} \right.$$

La vitesse radiale est donc nulle et la vitesse circonférentielle est inversement proportionnelle au rayon r . Il s'agit de l'écoulement tourbillonnaire centré sur l'origine des axes et désigné par *Vortex libre*.

* L'écoulement tourbillonnaire est caractérisé par la circulation du vecteur vitesse définie précédemment par les relations (3.1) et (3.2):

$$\Gamma = \int_{(\psi)} \vec{q} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} -\frac{C_0}{r} (-r d\theta) = \int_0^{2\pi} C_0 d\theta = 2\pi C_0$$

$$\Rightarrow \Gamma = 2\pi C_0 = C^{te} \quad \text{quelque soit le cercle retenu.}$$

La vitesse locale est donc:

$$q = v_\theta = -\frac{C_0}{r} \quad \text{d'où le vitesse induite par le tourbillon:}$$

$$q = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{3.24}$$

Donc, en choisissant comme sens positif le sens trigonométrique, l'écoulement tourbil-

lonnaire sera caractérisé par les relations:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \\
 \phi &= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\
 \psi &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \\
 q &= \frac{\Gamma}{2\pi r}
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

* Dans le cas d'un tourbillon décentré, par rapport au centre du repère, de l'affixe z_0 , on écrira:

$$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) \tag{3.26}$$

3.8 Application de la superposition d'écoulements élémentaires

Soient deux écoulements distincts:

$$F_1(z) = \phi_1 + i\psi_1 \quad \text{et} \quad F_2(z) = \phi_2 + i\psi_2$$

La superposition de ces deux écoulements aura comme potentiel complexe:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= F_1(z) + F_2(z) = \phi + i\psi \\
 \phi &= \phi_1 + \phi_2 \\
 \psi &= \psi_1 + \psi_2
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

Donc la vitesse obtenue pour ϕ en un point est obtenue par l'addition des vecteurs vitesses correspondant à ϕ_1 et ϕ_2 :

$$\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \tag{3.28}$$

On démontre ci-dessous que les composantes exprimées dans le même repère possèdent la propriété d'additivité:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = u_1 + u_2 \\
 v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = v_1 + v_2
 \end{aligned}$$

Nous allons étudier quelques unes des superpositions les plus significatives et des plus utiles en mécanique des fluides.

3.8.1 Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source

Rappelons les caractéristiques de ces fonctions complexes, avec q_0 la vitesse axiale de l'écoulement uniforme et q_v le débit par unité de profondeur de la source.

$$F_1(z) = q_0 z \quad \text{avec} \quad \phi_1 = q_0 x \quad \text{et} \quad \psi_1 = q_0 y$$

$$F_2(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln z \quad \text{avec} \quad \phi_2 = \frac{q_v}{2\pi} \ln r \quad \text{et} \quad \psi_2 = \frac{q_v}{2\pi} \theta$$

La superposition de ces deux écoulements donnera:

$F(z) = q_0 z + \frac{q_v}{2\pi} \ln z = \phi + i\psi$ d'où l'on tire, en comparant les parties réelle et imaginaire:

$$\phi = q_0 x + \frac{q_v}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \psi = q_0 y + \frac{q_v}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}$$

La ligne de courant $\psi = 0$ est obtenue pour $y = 0$ ou $y_0 = -\frac{q_v}{2\pi q_0} \theta$ correspondant à la courbe en trait fort. C'est une courbe à deux asymptotes distantes de $\frac{q_v}{q_0}$ et obtenue pour $\theta = -\pi$ et $\theta = +\pi$ (Fig.3.10).

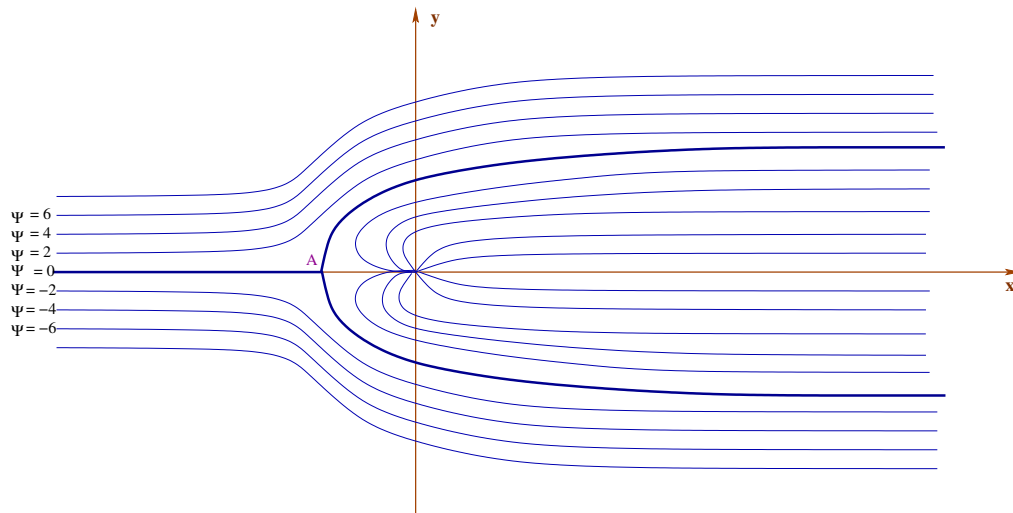


Figure 3.10: *Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source.*

Les composantes de la vitesse locale sont données par:

$$\vec{q} \left| \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = q_0 + \frac{q_v}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{q_v}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} \end{array} \right.$$

Le point A est le point d'arrêt de l'écoulement correspondant à $u = 0$ et $v = 0$. Ses coordonnées sont donc:

$$A \left| \begin{array}{l} x_A = -\frac{q_v}{2\pi q_0} \\ y_A = 0 \end{array} \right.$$

Ce principe de superposition permet donc de représenter l'écoulement potentiel autour d'un obstacle (correspondant notamment à $\psi = 0$) en matérialisant la courbe d'équation $y = \frac{q_v}{2\pi} (\pi - \arctan \frac{y}{x})$ par une paroi solide infinie. En effet, rien ne change dans la répartition de vitesse et des lignes de courant autour de ce solide et tout le débit de la source reste à l'intérieur de cette paroi.

On peut en principe obtenir n'importe quelle forme d'obstacle (problème inverse) en disposant dans le plan un nombre suffisant de sources et de puits.

3.8.2 Superposition d'une source et d'un puits de mêmes débits

La source centrée à l'affixe $z_s(0, a)$ est caractérisée par la fonction suivante:

$$F_1(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln(z - z_s) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \psi_1 = \frac{q_v}{2\pi} \arctan \frac{y-a}{x} \\ \phi_1 = \frac{q_v}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y-a)^2} \end{cases}$$

Le puits centré à l'affixe $z_p(0, -a)$ est caractérisé par la fonction:

$$F_2(z) = -\frac{q_v}{2\pi} \ln(z - z_p) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \psi_2 = -\frac{q_v}{2\pi} \arctan \frac{y+a}{x} \\ \phi_2 = -\frac{q_v}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y+a)^2} \end{cases}$$

L'écoulement correspondant à la superposition des deux écoulements sera caractérisé par:

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln \frac{(z-z_s)}{(z-z_p)} = \phi + i\psi$$

$$\text{avec:} \quad \begin{cases} \psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q_v}{2\pi} \arctan \frac{-2ax}{x^2+(y^2-a^2)} \\ \phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{q_v}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}} \end{cases}$$

* La ligne de courant principale $\psi = 0$ obtenue pour $x = 0$ est constituée de l'axe y . Les autres lignes de courant sont constituées de la famille des cercles centrés sur l'axe x et passant par les points S et P (Fig.3.11).

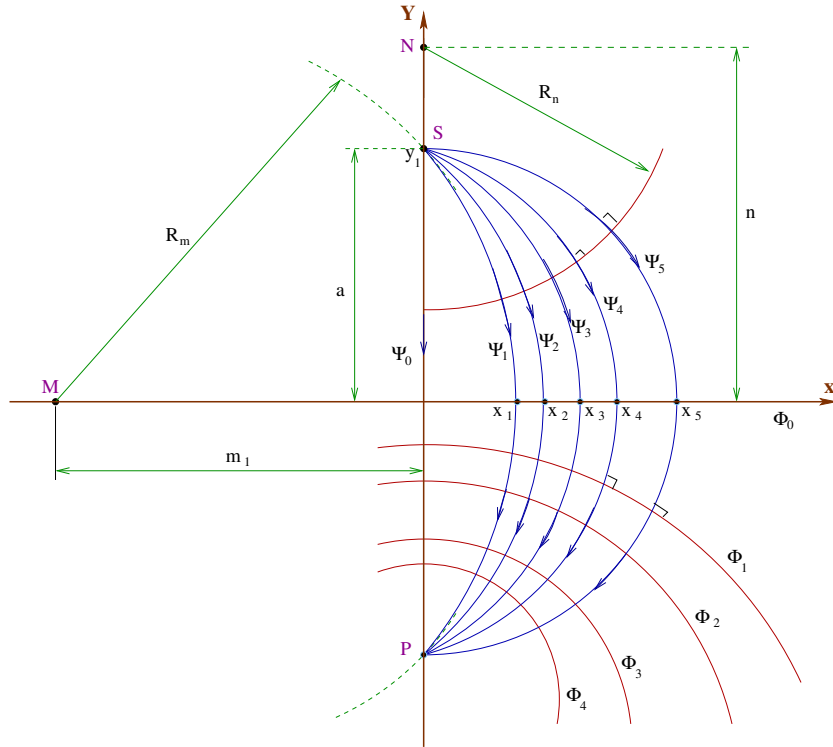


Figure 3.11: *Superposition d'une source et d'un puits.*

Leur rayon R_m est obtenu par:

$$R_m = \frac{a^2 + x_1^2}{2x_1}$$

où x_1 représente l'abscisse d'intersection du cercle avec l'axe OX . L'abscisse m_1 du centre du cercle est donnée par: $m_1 = -(R_m - x_1)$. Cette ligne de courant est associée à la fonction ψ_1 ayant pour valeur:

$$\psi = \psi_1 = \frac{q_v}{2\pi} \arctan \frac{2ax_1}{a^2 - x_1^2}$$

Les équipotentielles sont constituées de la famille des cercles conjugués centrés sur l'axe OY .

Si y_1 représente l'ordonnée de l'intersection avec l'axe OY , on observera les relations géométriques suivantes:

$$\text{rayon: } R_n = \sqrt{n^2 - a^2}; \quad \text{Ordonnée au centre: } n = R_n + y_1$$

soit finalement: $R_n = \frac{a^2 - y_1^2}{2y_1}$ et: $n = R_n + y_1$

Comme précédemment, l'équipotentielle est caractérisée par son intersection avec l'axe OY et prend sur ce cercle la valeur:

$$\phi_{-1} = \frac{q_v}{2\pi} \ln \left| \frac{y_1 - a}{y_1 + a} \right|$$

pour $y_1 \in \{0, a\}$, ϕ est négative d'où la présence de l'indice (-1).

3.8.3 Superposition d'une source et d'un vortex centrés à l'origine

D'après les relations (3.22) et (3.26), le potentiel complexe résultant de la superposition est donné par:

$$F(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln z - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z = \frac{q_v}{2\pi} (\ln r + i\theta) - i \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta)$$

$$\text{donc: } \begin{cases} \psi = \frac{q_v}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \\ \phi = \frac{q_v}{2\pi} \ln r + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \end{cases}$$

$$\text{et le champ des vitesses est défini par: } \vec{q} \begin{cases} u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{q_v}{2\pi r} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

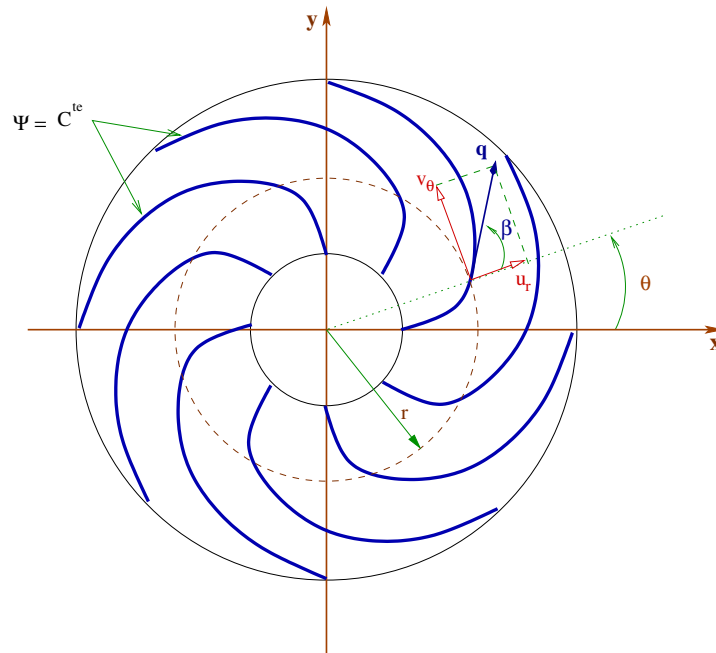
L'angle β entre la direction radiale et la tangente à ψ est donné par:

$$\tan \beta = \frac{v_\theta}{u_r} = \frac{\Gamma}{q_v}$$

donc l'angle β est constant quelque soit la valeur du rayon r . Les lignes de courant sont des spirales logarithmiques (Fig.3.12) d'équation:

$$r = \exp \left[-\frac{2\pi\psi}{\Gamma} \right] \cdot \exp \left[\frac{\theta}{\tan \beta} \right]$$

L'écoulement est axisymétrique car: $\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = 0$.

Figure 3.12: *Superposition d'une source et d'un vortex.*

Il s'agit de l'écoulement relatif simplifié produit par une roue centrifuge équipée d'aubages en forme de spirales logarithmiques. On démontre que l'écoulement n'est véritablement axisymétrique que dans le cas d'un nombre infini d'aubages (hypothèse d'Euler).

3.9 Ondes de surface

Dans ce paragraphe, on traite l'effet de la gravité sur les surfaces liquides. L'écoulement associé avec les ondes de surface peut être considéré comme potentiel. Ceci constitue une approximation valable pour beaucoup de phénomènes en surface libre. Dans ce type d'écoulement, la nature du problème ainsi que les approches utilisées pour les résoudre sont différents des autres écoulements potentiels bidimensionnels.

3.9.1 Problème général de l'onde de surface

Quand un corps liquide au repos est soumis à des ondes dues à la gravité au niveau de sa surface libre, le mouvement induit par ces ondes peut être considéré comme irrotationnel dans la plupart des cas. Dans ce cas, le vecteur vitesse peut être exprimé en tant que gradient du potentiel des vitesses qui, bien entendu, doit satisfaire l'équation de Laplace.

Considérons un corps liquide sur une surface plane dans lequel existe des ondes au niveau de sa surface libre dont la profondeur moyenne est h (Fig.3.13).

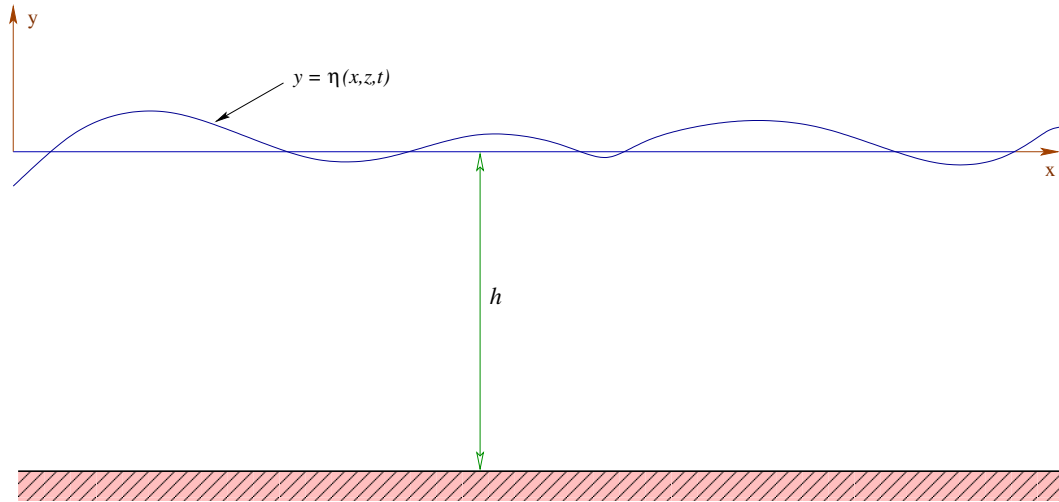


Figure 3.13: *Fluide soumis à une onde de surface. Problème général.*

L'équation de la surface libre est définie par $y = \eta(x, z, t)$. Deux conditions aux limites doivent être imposées à la surface libre sur $y = \eta$: une condition dite *cinématique* et une autre dite *dynamique*.

Condition Cinématique: Elle stipule qu'une particule de fluide qui, à un instant donné, occupe une position à la surface libre doit toujours rester à la surface libre. Donc, puisque $y - \eta = 0$ alors:

$$\frac{D}{Dt} (y - \eta) = 0$$

En utilisant la description Eulérienne (Ch2. §2.1.2), cette condition au limite devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} (y - \eta) + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} (y - \eta) = 0$$

et puisque les variables x, y, z et t sont indépendantes et $\eta = f(x, z, t)$ alors:

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v - w \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$$

Finalement, en exprimant les composantes du vecteurs vitesse \vec{q} en fonction du potentiel des vitesses ϕ , la condition cinématique devient:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.29)$$

Condition Dynamique: Typiquement, la valeur qui doit être imposée en surface libre est une pression constante mais généralement on impose $p = P(x, z, t)$ sur $y = \eta$. Cette condition est implémentée à partir de l'équation de Bernoulli écrite sous sa forme la plus générale. Puisque les forces de gravité sont importantes en surface libre, la gravité doit être incluse dans le terme des forces et alors cette condition devient:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi + g\eta = F(t) \quad (3.30)$$

Finalement, en plus des deux (C.L) précédentes, la conditions limite au fond doit être imposée. Dans le cas d'un fluide idéal, la composante de la vitesse normale à la surface plane doit être nulle: $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ sur $y = -h$.

En résumé, en fonction du potentiel des vitesses, l'équation à résoudre et les (C.L) à satisfaire pour l'onde de surface sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{sur } y = \eta \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi + g\eta = F(t) \quad \text{sur } y = \eta \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } y = -h \end{array} \right. \quad (3.31)$$

D'après le système (3.31), il est claire que la difficulté à résoudre un problème d'onde de surface est localisée au niveau des (C.L) et non pas à l'EDP. En effet, la condition dynamique est non linéaire et cette condition suivie de la condition cinématique doivent être imposées sur la surface $y = \eta$. Dans beaucoup de situations réelles, cette surface n'est pas connue a priori et doit être l'une des quantités qui évolue à partir de la solution elle même. Cependant, beaucoup de situations intéressantes des écoulements d'ondes de surface ne dépendent pas du tout des caractères complexes de ces problèmes. En linéarisant le problème, ces difficultés peuvent être évitées tant que l'écoulement garde son caractère de base.

3.9.2 Onde plane de faible amplitude

Pour simplifier, nous considérons les ondes planes qui présentent un champ d'écoulement bidimensionnel avec des ondes à la surface. Dans ce cas et sans aucune approximation, l'EDP à satisfaire pour le potentiel des vitesses dans le plan xy est:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.32)$$

Afin de rendre la (C.L) plus facile à traiter, nous considérons des ondes de faible amplitude. Dans ce cas, seules les ondes pour lesquelles l'amplitude est faible comparée aux autres échelles des longueurs caractéristiques (profondeur du liquide h et longueur d'onde λ) seront considérées. Mais si η est faible comparée à la longueur d'onde, la quantité $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, qui est la pente de la surface libre, va être faible. De plus, la quantité $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ qui est la composante de la vitesse va être faible du fait que les ondes de surface n'entraînent pas les hautes fréquences puisque l'amplitude du mouvement a été supposée faible. Donc le produit $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ par $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ va être quadratiquement faible et donc peut être négligé au premier ordre. La (C.L) cinématique sur la surface libre devient alors:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, \eta, t)$$

Malgré que cette équation ne contient pas de termes quadratiques, il persiste encore la difficulté d'être imposée sur $y = \eta$. Cependant, dans notre approximation, η est faible donc le développement en séries de Taylor peut être écrit pour la quantité $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ sur $y = \eta$ au voisinage de $y = 0$, alors:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, \eta, t) \simeq \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, t) + \eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x, 0, t) + O(\eta^2)$$

Le second terme étant quadratiquement faible, il peut être alors négligé au premier ordre. De ce fait la (C.L) cinématique s'écrira finalement:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) \tag{3.33}$$

La (C.L) dynamique sur la surface libre peut être traitée de la même manière. Puisque le fluide est au repos et n'importe quel mouvement de ce dernier est induit par les ondes, le terme non linéaire peut être négligé du fait qu'il est quadratiquement faible. Donc, la (C.L) dynamique devient:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, \eta, t) + \frac{p(x, t)}{\rho} + g\eta(x, t) = F(t)$$

La quantité $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ peut être développée en séries de Taylor au voisinage de la ligne $y = 0$ et on ne retient que le premier terme:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0, t) + \frac{p(x, t)}{\rho} + g\eta(x, t) = F(t)$$

La quantité $F(t)$ peut être absorbée dans le potentiel des vitesses $\phi(x, y, t)$ en considérant qu'il est remplacé par: $\phi(x, y, t) + \int F(t) dt$.

Donc la forme linéarisée de la (C.L) dynamique peut être écrite sous la forme:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0, t) + \frac{p(x, t)}{\rho} + g\eta(x, t) = 0$$

Si on dérive cette équation par rapport au temps, le terme $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ peut être négligé par rapport à $\frac{\partial \phi}{\partial y}$, donc la forme finale de la (C.L) dynamique est:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, 0, t) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + g \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \quad (3.34)$$

La (C.L) sur le fond n'est pas affectée par la linéarisation et donc ne change pas:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, -h, t) = 0 \quad (3.35)$$

Nous obtenons finalement un système linéaire constitué d'une EDP (3.32) munie de 3 conditions aux limites (3.33), (3.34) et (3.35) plus facile à résoudre que le système de départ (3.31).

3.9.3 Propagation des ondes de surface

Considérons une masse fluide au repos à une profondeur h (Fig.3.14). Une onde plane de faible amplitude se propage le long de la surface du liquide avec une vitesse c . La forme de l'onde est sinusoïdale avec une amplitude ε et une longueur d'onde λ .

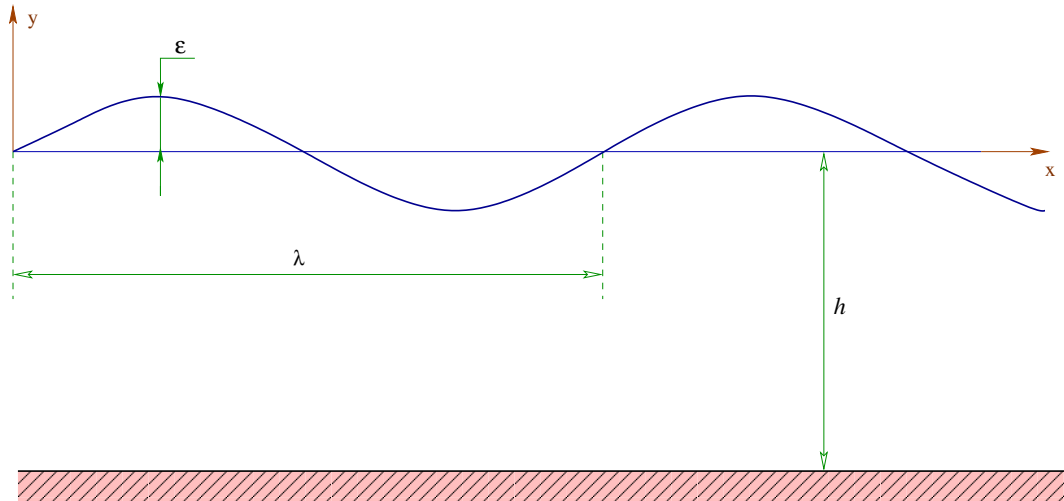


Figure 3.14: *Propagation d'une onde de surface.*

L'équation de la surface libre sera $y = \eta(x, t)$ où:

$$\eta(x, t) = \varepsilon \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct)$$

Ceci correspond à une onde qui se propage dans le sens des x positifs avec une

vitesse c . Le problème est de déterminer cette vitesse sachant que ε , λ et h sont données et que la tension de surface est négligeable. La pression à la surface est prise constante et égale à la pression atmosphérique P_a .

On résout alors le problème d'écoulement pour ϕ décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, t) = -\varepsilon \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, 0, t) + g \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, -h, t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Dans ce système, l'équation de $\eta(x, t)$ a été utilisée dans la (C.L) cinématique à la surface libre.

La solution de ce problème par la méthode de séparation des variables nous donne:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{\lambda}{2\pi h} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \quad (3.37)$$

Cette solution est valable dans le cas d'une approximation à faible amplitude c'est-à-dire: $\varepsilon \ll \lambda$ et $\varepsilon \ll h$.

- Pour le cas d'un liquide profond ($h \gg \lambda$) la relation (3.37) devient:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{\lambda}{2\pi h} \quad (\varepsilon \ll \lambda \ll h) \quad (3.38)$$

- Pour le cas d'un liquide peu profond ($h \ll \lambda$) la relation (3.37) devient:

$$\frac{c^2}{gh} = 1 \quad (\varepsilon \ll h \ll \lambda) \quad (3.39)$$

Les résultats précédents sont représentés sous forme de courbe dans la figure (3.15) où la solution général est représentée par la ligne solide et les deux solutions asymptotiques limites par des lignes en pointillés.

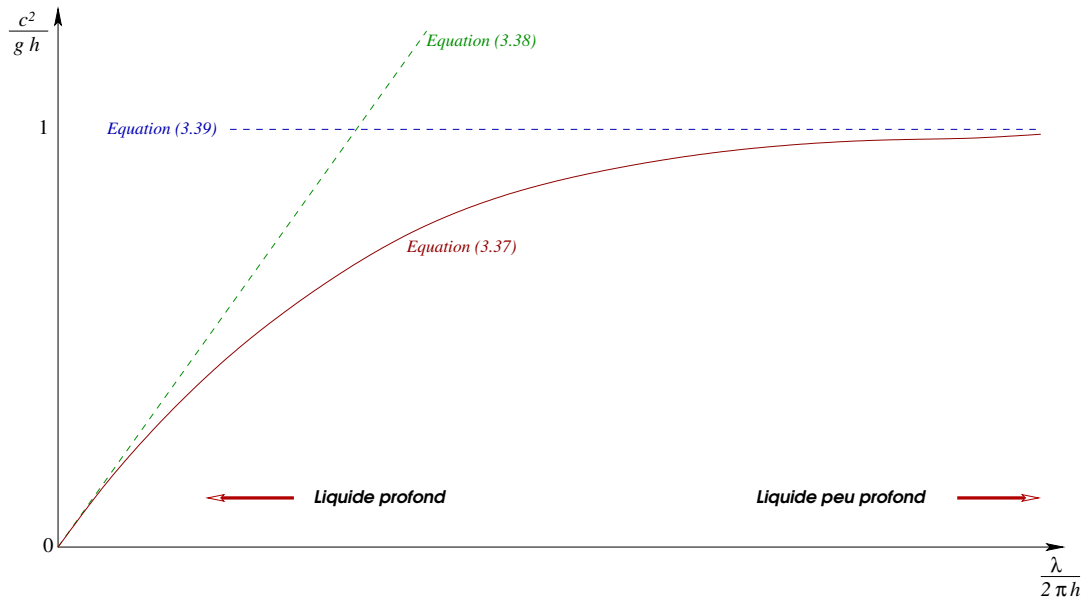


Figure 3.15: *Vitesse de propagation d'une onde de surface sinusoïdale à faible amplitude.*

3.10 Exercices

P1 : 1- Soit un écoulement permanent et incompressible dont le champ de vitesse est défini par : $u = 2x^2 + y^2$ et $v = ?$

Quelle forme doit avoir la composante v du vecteur vitesse ?

2- Déterminer le potentiel des vitesses de l'écoulement défini par :

$$u = 4xy + y^2 \text{ et } v = 6xy + 3x$$

3- Montrer que pour un écoulement potentiel la fonction de courant et le potentiel des vitesses sont des fonctions harmoniques.

Rép : 1) $v(x, y) = -4xy + g(x)$.
2) Pas de potentiel.

P2 : Trouver l'équation de la ligne de courant passant par le point $(1, 2, 3)$ si :

$$u = 3ax, v = 4ay \text{ et } w = -7az$$

(a étant une constante).

Rép : $y = 2x^{\frac{4}{3}}$ et $z = 3x^{-\frac{7}{3}}$.

P3 : On veut représenter l'écoulement dans la volute d'une pompe centrifuge en superposant une source de débit q_v et un vortex de circulation Γ ayant comme origine l'axe de la pompe. On considérera une profondeur unité comptée selon cet axe.

1- Déterminer le potentiel complexe $F(z)$, le potentiel des vitesses Φ et la fonction de courant ψ de cet écoulement. En déduire les composantes radiale et circonférentielle de la vitesse. Montrer que la vitesse satisfait à une relation $\vec{V} \cdot \vec{r} = C^{te}$ et que l'angle entre \vec{r} et \vec{V} est constant.

2- La volute est de hauteur constante et égale à $0,10 \text{ m}$, le débit volumique de la pompe est $q_v = 50 \text{ l/s}$. L'angle formé par les lignes de courant et la vitesse circonférentielle est

$\alpha = 18^\circ$. En déduire la valeur de la circulation Γ . Calculer la vitesse au rayon $r = 0,25 \text{ m}$.

Rép : 1) $F(z) = \frac{(q_v - i\Gamma)}{2\pi} \ln z$;
 $\phi = \frac{1}{2\pi} (q_v \ln r + \Gamma \theta)$;
 $\psi = \frac{1}{2\pi} (q_v \theta - \Gamma \ln r)$;
 $u_r = \frac{q_v}{2\pi r h}$; $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$.
2) $1,54 \text{ m}^2/\text{s}$; $1,03 \text{ m/s}$.

P4 : En superposant, sur le même axe origine, une source linéaire de débit q_v par unité de longueur et un filet tourbillon (vortex libre) de circulation Γ , on obtient un écoulement bidimensionnel rencontré dans les turbomachines.

1- Déterminer les équations du potentiel complexe, du potentiel des vitesses et de la fonction de courant de cet écoulement.

2- Déterminer les composantes radiale et tangentielle de la vitesse.

3- Montrer que la vitesse q satisfait à une relation de la forme $q \cdot r = C^{te}$ où r est la distance à l'origine.

4- Montrer que les lignes de courant de cet écoulement sont des spirales logarithmiques.

5- Dans le cas où $q_v = 0,4 \text{ m}^3/\text{s}$ par mètre et $\Gamma = 0,2 \text{ m}^2/\text{s}$, calculer la vitesse au point M de coordonnées $x = 3 \text{ m}$ et $y = 4 \text{ m}$ ainsi que l'angle qu'elle fait avec le rayon vecteur OM .

Rép : 1) $F(z) = \frac{(q_v - i\Gamma)}{2\pi} \ln z$;
 $\phi = \frac{1}{2\pi} (q_v \ln r + \Gamma \theta)$;
 $\psi = \frac{1}{2\pi} (q_v \theta - \Gamma \ln r)$;
2) $u_r = \frac{q_v}{2\pi r h}$; $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$;
3) $q \cdot r = \frac{\sqrt{q_v^2 + \Gamma^2}}{2\pi} = C^{te}$;
4) $r = \exp\left(\frac{q_v}{\Gamma} \theta\right) \cdot \exp\left(-\frac{2\pi}{\Gamma} \psi_0\right)$;
5) $xxx \text{ m/s}$; xx° .

P5 : On superpose l'écoulement d'un doublet $F(z) = q_0 \frac{a^2}{z}$ et un écoulement uniforme

de vitesse q_0 parallèle à l'axe X ; a étant une constante positive.

1- Calculer la fonction de courant ainsi que le potentiel des vitesses puis montrer que l'écoulement obtenu ($\psi = 0$) est l'écoulement autour d'un cylindre de rayon a .

2- Calculer le potentiel complexe et la vitesse complexe. En déduire la vitesse à l'infini et la vitesse au point d'arrêt.

3- Calculer les composantes de la vitesse en coordonnées polaires. En déduire la vitesse superficielle sur le cylindre, la position des points de vitesse maximale et la valeur de cette vitesse maximale.

Rép : 1) $\psi = q_0 x \left(1 + \frac{a^2}{x^2+y^2} \right) ;$

$$\phi = q_0 y \left(1 - \frac{a^2}{x^2+y^2} \right) .$$

2) $F(z) = q_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) ;$

$$q = q_0 \left(1 + \frac{a^2 (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) ; q_\infty = q_0 ; q_A = 0 .$$

3) $u_r = q_0 \left(1 - \frac{a^2 (1 - 2 \cos \theta)}{r^2} \right) ;$

$$v_\theta = -q_0 \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} ; -2 q_0 \sin \theta ; \pm 2 q_0 \text{ à } \pm \frac{\pi}{2} .$$

P6 : Un écoulement est défini par :

$$u = 2x \text{ et } v = -2y$$

Trouver la fonction de courant et le potentiel des vitesses de cet écoulement.

Rép :

$$\psi(x, y) = 2xy + C ;$$

$$\phi(x, y) = x^2 - y^2 + C .$$

P7 : La fonction de courant d'un écoulement particulier est donnée par :

$$\Psi(x, y) = x^2 - y^2$$

L'écoulement est-il irrotationnel ? Si oui, calculer le potentiel des vitesses.

Rép : $\phi(x, y) = -2xy + C .$

P8 : La composante suivant x d'un écoulement incompressible est donnée par :

$$u = ax^2 + by$$

Si la composante suivant z est nulle trouver :

1- la composante v parallèle à y sachant que pour $y = 0, v = 0$;

2- la fonction de courant ψ sachant que pour $y = 0, v = 0$.

Rép :

P9 : La fonction potentiel des vitesses d'un écoulement plan est donnée par :

$$\phi(x, y) = axy$$

1- Vérifier l'équation de continuité.

2- Calculer la fonction de courant ψ . En déduire que cette fonction peut représenter l'écoulement dans un coude.

3- Trouver le potentiel complexe de l'écoulement.

4- Montrer que, en multipliant le potentiel complexe précédent par i , on obtient un autre potentiel complexe qui représente l'écoulement au voisinage d'un point d'arrêt sur une plaque plane.

5- Pour ce dernier écoulement on admet que $a = 20 \text{ s}^{-1}$. Calculer les composantes de la vitesse au point M de coordonnées $x = 8 \text{ cm}$ et $y = 2 \text{ cm}$.

Rép : 2) $\psi(x, y) = \frac{a}{2} (y^2 - x^2) .$

3) $F(z) = -i \frac{a}{2} z^2 .$

5) $u = 1,6 \text{ m/s}$; $v = -0,4 \text{ m/s}$.

P10 : Soit un écoulement incompressible plan dont le vecteur vitesse a pour composantes :

$$u = x - 4y \text{ et } v = -y - 4x$$

Montrer que l'écoulement satisfait l'équation de continuité et obtenir l'expression de la fonction de courant. Si l'écoulement est potentiel trouver alors l'expression du potentiel des vitesses.

Rép : $\psi(x, y) = 2(x^2 - y^2) + xy + C$;
 $\phi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - 4xy + C'$.

P11 : Soit l'écoulement à potentiel complexe définie par :

$$F(z) = -a \frac{z^2}{2}$$

- 1- Déterminer le potentiel des vitesses et la fonction de courant.
- 2- Etudier la forme des lignes de courant et des équipotentielles.
- 3- Calculer les composantes u et v de la vitesse.
- 4- Application numérique : la vitesse au point $M(-10 \text{ cm}, 0)$ est de 8 cm/s .
 - a- Tracer le réseau des lignes de courant et des équipotentielles dans le demi-plan $x < 0$ ($y = 0$ est une paroi plane).
 - b- Calculer la vitesse aux points suivant : $(0, 0)$ et $(-2 \text{ cm}, 4 \text{ cm})$.

Rép : 1) $\psi(x, y) = -axy$;
 $\phi(x, y) = -\frac{a}{2}(x^2 - y^2)$.
 3) $u = -ax$; $v = ay$; 4.b) 0 ; $3,58 \text{ cm/s}$.

P12 : Soit le potentiel complexe $F(z)$ défini par :

$$F(z) = q_0 \left[z + y_0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda} z} \right]$$

où z et i sont des nombres complexes ; q_0 , λ et y_0 des constantes.

Ce potentiel représente l'écoulement autour d'une paroi ondulée sinusoïdale d'amplitude y_0 et de longueur d'onde λ .

En supposant que $\frac{2\pi}{\lambda} y \ll 1$, trouver l'amplitude correspondant à la ligne de courant $\psi = 0$ et déterminer le champ des vitesses de cet écoulement.

Rép : $y = -y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$;
 $u \simeq q_0 \left[1 - \frac{2\pi}{\lambda} y_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)\right]$;
 $v \simeq -\frac{2\pi}{\lambda} y_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$.

P13 : Un écoulement est défini par les composantes du vecteur vitesse :

$$u = q_0 \cos \alpha \text{ et } v = q_0 \sin \alpha$$

où q_0 et α sont des constantes.

- 1- Trouver la fonction de courant et le potentiel des vitesses de cet écoulement.
- 2- Que représente cet écoulement ? Justifier votre réponse en traçant quelques ψ et ϕ pour $\alpha = 45^\circ$.
- 3- Trouver le potentiel complexe de l'écoulement.
- 4- On superpose cet écoulement avec une source de potentiel complexe $C_0 \ln(z)$. Déterminer la fonction de courant ψ' et le potentiel des vitesses ϕ' de l'écoulement résultant et en déduire les composantes u' et v' du vecteur vitesse.

N.B : Prendre toutes les constantes d'intégration égales à zéro.

Rép : 1) $\psi(x, y) = -q_0 \sin \alpha x + q_0 \cos \alpha y$;
 $\phi(x, y) = q_0 \cos \alpha x + q_0 \sin \alpha y$.

3) $F(z) = q_0 e^{-i\alpha} z.$

4) $\psi'(x, y) = q_0(-\sin \alpha x + \cos \alpha y) + C_0 \arctan \frac{y}{x}$

$\phi(x, y) = q_0(\cos \alpha x + \sin \alpha y) + C_0 \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

$u' = q_0 \cos \alpha + C_0 \frac{x}{x^2+y^2};$

$v' = q_0 \sin \alpha + C_0 \frac{y}{x^2+y^2}.$

P14 : Soit un écoulement défini par le potentiel complexe suivant :

$F(z) = \frac{a}{n} z^n \quad \text{avec} \quad n = \frac{\pi}{\alpha}$

où a et α sont des constantes.

1- Déterminer les fonctions de courant $\psi(x, y)$ et potentiel $\phi(x, y)$.

2- Que peut représenter cet écoulement dans les cas suivants : a) $\alpha = \pi$; b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (tracer : lignes de courant, équipotentiels, vecteur vitesse).

3- Pour le cas b), en divisant $F(z)$ par i , on obtient un autre écoulement de potentiel complexe $F'(z)$. Déterminer alors $F'(z)$ ainsi que les fonctions de courant $\psi'(x, y)$ et potentiel $\phi'(x, y)$.

Rép :

1) $\psi(x, y) = \frac{a}{n} (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \sin \left(n \arctan \frac{y}{x} \right);$
 $\phi(x, y) = \frac{a}{n} (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \cos \left(n \arctan \frac{y}{x} \right).$
 3) $F'(z) = -\frac{a}{2} i z^2;$
 $\psi'(x, y) = \frac{a}{2} (y^2 - x^2);$
 $\phi'(x, y) = a x y.$

Dynamique des écoulements visqueux

4.1 Propriétés du fluide réel

Le fluide réel se caractérise, en opposition au fluide parfait, par deux propriétés importantes :

* La *viscosité* qui est une caractéristique physique du fluide se manifestant par une résistance de celui-ci aux déformations et plus particulièrement aux vitesses de déformation. Elle est due à la combinaison des efforts de cohésion et d'agitation moléculaire s'opposant au déplacement relatif des couches liquides les unes par rapport aux autres.

La viscosité dépend de la nature du fluide et varie considérablement d'un fluide à un autre. Pour un même fluide, elle dépend de la pression et de la température ; pour les liquides incompressibles, elle est pratiquement invariante avec la pression.

L'expérience de Couette (§1.2.1) est souvent utilisée pour mettre en évidence l'existence de la viscosité.

* L'adhérence du fluide aux parois solides : Contrairement au fluide parfait pour lequel la vitesse d'écoulement possède une valeur non nulle à la paroi (glissement), le fluide réel adhère parfaitement à celle-ci et sa vitesse est nulle à cet endroit. Dans cette zone de fort gradient désignée par *couche limite*, les effets de frottement interne sont importants. Nous verrons que l'épaisseur de cette couche limite dépend à la fois de la viscosité du fluide et du régime d'écoulement. A l'extérieur de la couche limite, la cinématique du fluide est pratiquement identique à celle décrite en fluide parfait.

Ainsi, dans certains modèles d'écoulements, les conditions de glissement ne s'écrivent pas à la paroi elle même, mais à la frontière de la couche limite.

4.2 Description du frottement visqueux

Examinons dans le plan (x, y) la déformation du parallépipède rectangle élémentaire représentant une particule fluide en mouvement (Fig.4.1). Les gradients de vitesse

seront supposés positifs.

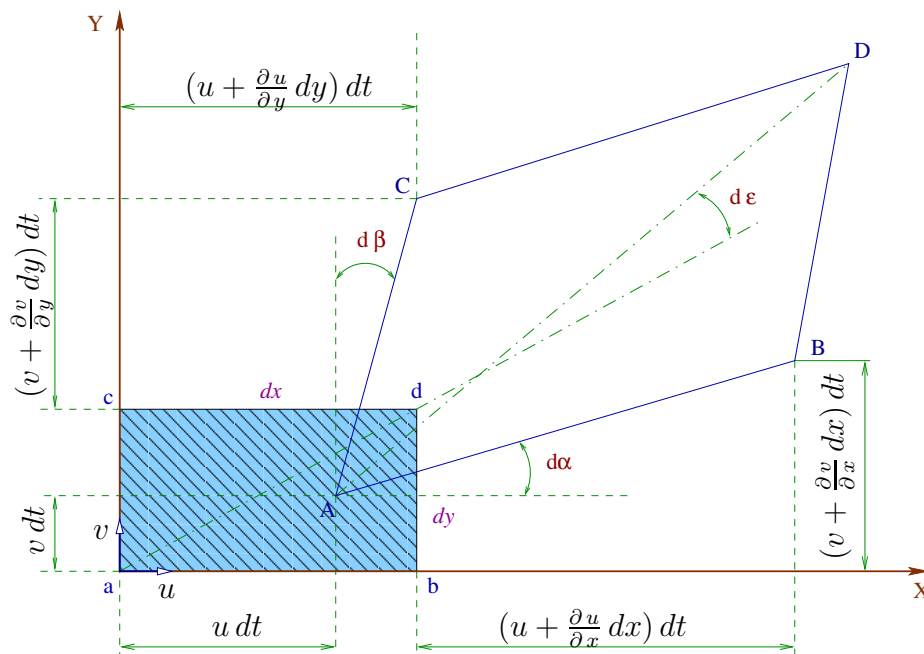


FIGURE 4.1: *Déformation d'une particule de fluide en mouvement.*

A l'instant $t = t_0$, la face considérée est supposée rectangulaire de cotés dx et dy .

A l'instant $t = t_0 + dt$, le point a s'est déplacé jusqu'au point A de composantes :

$$A \begin{cases} u dt \\ v dt \end{cases} \quad u \text{ et } v \text{ étant les composantes du vecteur vitesse au point } a.$$

Pendant le même instant, le point b s'est déplacé en B . Le théorème des accroissements finis au premier ordre indique pour le point b une vitesse ayant pour composantes :

$$B \begin{cases} u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \end{cases} \quad \text{d'où les coordonnées du point } B : \begin{cases} dx + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dt \\ \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) dt \end{cases}$$

$$\text{De même, les coordonnées du point } C \text{ sont : } \begin{cases} \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) dt \\ dy + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) dt \end{cases}$$

Les segments ab et ac ont subi à la fois une *translation*, un *allongement* et une *rotation* qui sont tous trois calculables.

Puisqu'il s'agit de faibles déformations, alors les angles $d\alpha$ et $d\beta$ sont assimilables à leurs tangentes :

$$d\alpha = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx) dt - v dt}{dx + (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) dt - u dt} \quad \text{et} \quad d\beta = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy) dt - u dt}{dy + (v + \frac{\partial v}{\partial y} dy) dt - v dt}$$

Après simplification on aura :

$$d\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} dt \quad ; \quad d\beta = \frac{\partial u}{\partial y} dt \quad (4.1)$$

La rotation de la diagonale AD notée $d\varepsilon$ sera déduite de la relation (4.1) :

$$d\varepsilon = \frac{d\alpha - d\beta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dt - \frac{\partial u}{\partial y} dt \right)$$

d'où l'on peut calculer la vitesse angulaire de la particule :

$$\Omega_z = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.2)$$

Le dernier membre de cette équation représente la composante suivant Z du vecteur tourbillon : $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{q}$.

Dans le cas d'un écoulement irrotationnel, la particule se déformera sans changement de direction de sa diagonale et subira donc une déformation sans rotation ($d\varepsilon = 0$).

4.3 Taux de déformation

Suivant la direction X , l'élongation du segment AB s'écrit :

$$dX = [dx + (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) dt - u dt] - dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx dt$$

La vitesse d'élongation sera quant à elle définie par :

$$q = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dX}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

et le taux de déformation par : $\frac{q}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$

Suivant la direction Y , le taux de déformation du même segment est égal à $\frac{\partial v}{\partial y}$. Concernant le segment AC , les taux de déformation suivant X et Y sont respectivement :

$$\frac{\partial v}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y}$$

On peut ainsi construire le *tenseur des taux de déformation* dans le plan (x, y) :

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Ce tenseur peut être décomposé en deux tenseurs : un *tenseur d'élongation symétrique* et un *tenseur de rotation antisymétrique* :

$$\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}$$

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Concernant le tenseur $\overline{\overline{D}}$, les termes diagonaux représentent les *taux d'élongation* des cotés de la particule dans les directions X et Y tandis que les autres termes non diagonaux représentent la *déformation par cisaillement*. Les deux parties de la particule aboutissant au point A subissent des rotations respectives $d\alpha$ et $d\beta$ de sens inverses. Le taux de cisaillement dans le plan (x, y) est donc égal à :

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{d\alpha + d\beta}{dt} \right)$$

soit d'après la relation (4.1) :

$$\tau_c = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.5)$$

Cette valeur est proportionnelle à l'allongement et au raccourcissement des deux diagonales du parallélogramme.

4.4 Généralisation

Si l'on considère une particule parallélépipédique ayant pour dimensions respectives dx , dy , dz , le principe développé précédemment peut être aisément généralisé. Dans un champ de vitesse quelconque, le tenseur des taux de déformation s'écrira comme la superposition d'un tenseur d'élongation symétrique et d'un tenseur de rotation antisymétrique :

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}} \quad (4.6)$$

qui peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

- Remarque :

A l'instant $t = t_0 + dt$ les dimensions principales de la particule deviennent (Fig.4.1) :

$$dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) \quad dy \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt \right) \quad dz \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} dt \right)$$

Le volume de celle-ci devient au premier ordre :

$$dx dy dz \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt \right]$$

soit encore :

$$dx dy dz [1 + \text{div } \vec{q} dt]$$

Pour un fluide incompressible, le terme de divergence est nul, satisfaisant l'équation de continuité.

Au premier ordre, la particule tourne donc et se déforme *sans changer de volume*.

4.5 Tenseur des contraintes

Le tenseur $\overline{\overline{C}}$ des contraintes appliquées à la surface d'une particule de forme parallélépipédique de dimensions élémentaires dx , dy , dz est composé des contraintes normales et des contraintes tangentielles.

Examinons sur l'une des faces supposée contenue dans le plan YOZ les contraintes en présence (Fig.4.2) :

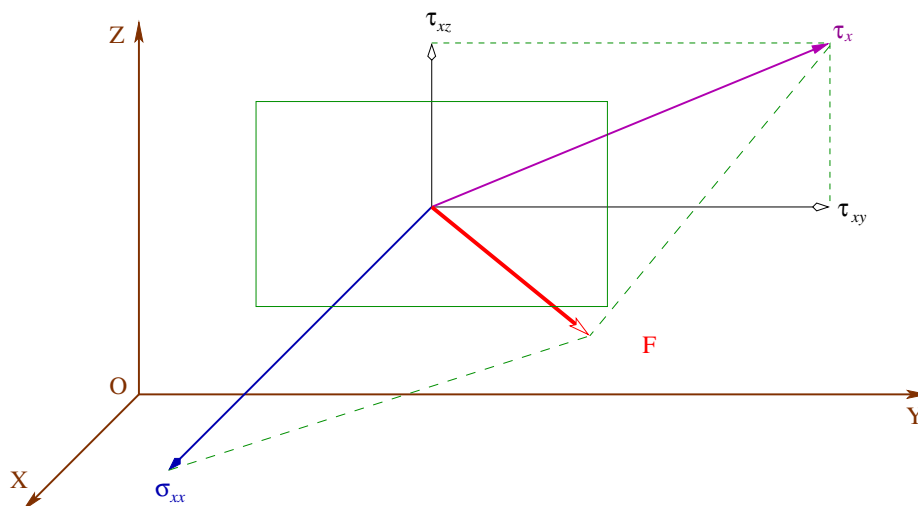


FIGURE 4.2: *Contraintes normales et tangentielles.*

L'effort \vec{F} exercé par le fluide environnant donne lieu à deux contraintes :

- σ_{xx} : contrainte normale
- τ_{xy} , τ_{xz} : composantes de la contrainte de cisaillement τ_x .

Le double indice associé à ces contraintes doit être interprété de la manière suivante :

Le premier (x) correspond à la face orientée par l'axe correspondant, le second (x , y ou z) correspond à la direction de projection.

Pour une face orientée de manière quelconque dans l'espace, le tenseur des contraintes s'écrira :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

On démontre que les termes symétriques sont égaux entre eux :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Pour un fluide au repos ou un fluide de viscosité nulle, les contraintes tangentielles sont nulles, les contraintes normales sont alors égales et opposées à la pression hydrostatique p . On utilisera cette propriété pour écrire le tenseur sous la forme de la superposition de deux états :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

soit :

$$\overline{\overline{C}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (4.9)$$

avec : $\overline{\overline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ qui est le *tenseur unitaire* et

$$\overline{\overline{\tau}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

appelé *tenseur déviateur* représentant uniquement les effets de frottement.

4.6 Liaison entre contraintes et déformations

Afin d'établir la liaison entre les contraintes et les déformations, trois hypothèses fondamentales sont utilisées :

- La rotation sans déformation de la particule fluide n'engendre aucune contrainte de cisaillement.
- Les contraintes sont proportionnelles aux taux de déformation (généralisation de l'équation de Newton).
- Le fluide est isotrope.

On observera donc entre les tenseurs la relation générale suivante :

$$\overline{\overline{\tau}} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{q} \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{D}} \quad (4.11)$$

avec

ε : viscosité de dilatation,

μ : viscosité dynamique.

Cette relation permet d'accéder aux différentes composantes des contraintes :

- **Contraintes normales :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \\ \sigma_{yy} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p \\ \sigma_{zz} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - p \end{array} \right. \quad (4.12)$$

- **Contraintes tangentielles :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Pour un fluide compressible ou non, l'addition des trois contraintes normales conduit à :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = (3\varepsilon + 2\mu) \operatorname{div} \vec{q} - 3p$$

permettant d'exprimer la pression hydrostatique locale :

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \left(\varepsilon + \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div} \vec{q} \quad (4.14)$$

En fluide incompressible, l'équation de continuité montre que la pression est égale et opposée à la moyenne des contraintes normales.

En fluide compressible, on admet qu'il en va de même, ce qui implique que le second terme est nul :

$$\varepsilon + \frac{2}{3}\mu = 0$$

C'est une hypothèse que l'on adopte couramment sous forme de l'équation de Stokes :

$$\varepsilon = -\frac{2}{3}\mu \quad (4.15)$$

Dans l'écoulement plan pour lequel $v = w = 0$, les relations (4.13) se ramènent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

correspondant au cas de l'expérience de Couette décrite au §1.2.1.

4.7 Equations de Navier-Stokes

Ce sont les équations (2.16) de la dynamique des fluides (Euler) établies en fluide réel pour lequel la viscosité engendre des contraintes de cisaillement.

Examinons les efforts exercés sur une particule de fluide suivant la direction OX seulement. On observe alors pour un fluide réel, en plus des contraintes normales, les contraintes tangentielles (Fig.4.3).

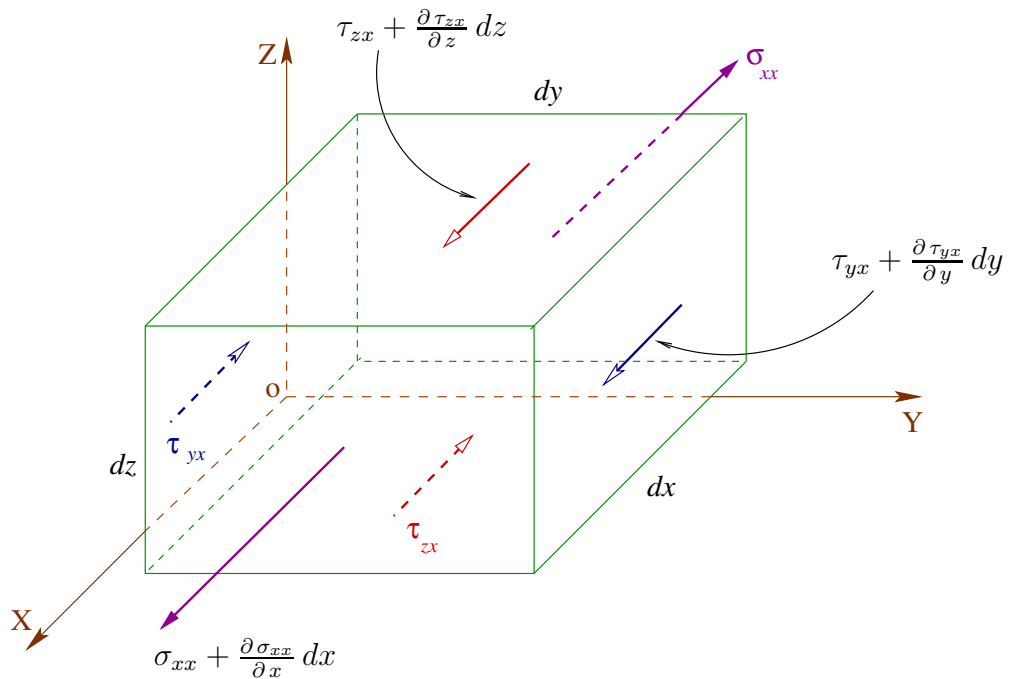


FIGURE 4.3: *Etablissement des équations de Navier-Stokes.*

Appliquons maintenant la loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ex} = m \vec{\gamma}$

Suivant OX on a : $\sum F_x = m \gamma_x = \rho dx dy dz \frac{Du}{Dt}$

avec $\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$

$$\begin{aligned} \sum F_x = & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_{xx} dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \\ & - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \rho dx dy dz f_x \end{aligned}$$

f_x étant la composante de toutes les forces volumiques par unité de masse suivant l'axe X .

En simplifiant par $dx dy dz$ on aura :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + f_x \quad (4.17)$$

En introduisant les relations (4.12) et (4.13) on aura alors :

$$\rho \gamma_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho f_x$$

et pour une viscosité dynamique μ constante :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [(\varepsilon + \mu) \operatorname{div} \vec{q}] + \mu \Delta u \quad (4.18)$$

où $\Delta u \equiv \nabla^2 u$

Pour le cas d'un fluide incompressible l'équation de Navier-Stokes suivant l'axe OX se réduit à :

$$\frac{Du}{Dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \quad (4.19)$$

avec : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

Les équations de Navier-Stokes (N-S) s'écrivent donc sous forme vectorielle compacte :

$$\frac{D \vec{q}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{q} \quad (4.20)$$

En coordonnées cartésiennes, les projections sur les axes X , Y et Z donnent respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Ces équations expriment l'équilibre entre les forces d'inertie d'une part et, d'autre part, les forces de gravité (ou pesanteur) par unité de masse, celles de pression ainsi que celles de viscosité.

Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques :

- Suivant la direction radiale (r) :

$$\frac{D u_r}{D t} - \frac{v_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (4.22)$$

- Suivant la direction tangentielle (θ) :

$$\frac{D v_\theta}{D t} + \frac{u_r v_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.23)$$

- Suivant la direction verticale (z) :

$$\frac{D w_z}{D t} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_z \quad (4.24)$$

Avec :

- Composantes du vecteur vitesse : $\vec{q} = \vec{q}(u_r, v_\theta, w_z)$
- Dérivée particulaire d'une fonction h quelconque :

$$\frac{D h}{D t} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.25)$$

- Laplacien d'une fonction h quelconque :

$$\nabla^2 h \equiv \Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (4.26)$$

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0 \quad (4.27)$$

4.8 Cas limites de la viscosité

Les équations de N-S peuvent être simplifiées et on obtient des formes applicables pour certains types d'écoulements. Lorsque la viscosité du fluide est nulle, on retrouve les équations d'Euler (2.16). Ce type d'écoulement est appelé "écoulements à grand nombre de Reynolds".

Lorsque la viscosité du fluide est très élevée, les forces d'inertie sont négligeables devant les forces visqueuses et volumiques et on aura les équations relatives aux "écoulements à faible nombre de Reynolds", appelés encore "écoulements de Stokes" ou "écoulements rampants" décrits par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = f_x + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = f_y + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = f_z + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (4.28)$$

Ces équations constituent la base de la théorie de la "lubrification hydrodynamique" (§4.11.1).

4.9 Caractéristiques de l'écoulement visqueux

L'observation de l'écoulement des fluides est aujourd'hui facilitée par des moyens de mesures de plus en plus performants. La connaissance de la structure fine des écoulements et en particulier, des phénomènes turbulents, des couches limites, des sillages a permis de mettre en place des modélisations de plus en plus performantes.

Sur la base des expériences de Reynolds, un pas important a été franchi à la fin du dernier siècle concernant la structuration des régimes d'écoulement. Prandtl et Von Karman ont présenté au début du vingtième siècle les premiers développements théoriques concernant la couche limite. Celle-ci fait encore l'objet de nombreuses études, tant théoriques qu'expérimentales, portant essentiellement sur la transition et le décollement en présence de gradients de pression positifs ou négatifs et du taux de turbulence.

4.9.1 Régimes d'écoulement

L'expérience de Reynolds consiste à observer l'écoulement de l'eau dans un tube transparent, écoulement au centre duquel est introduit un fin filet de liquide coloré.

On observe principalement deux régimes distincts :

- un **régime laminaire** montrant un filet coloré parfaitement rectiligne ne se mélangeant pas à l'écoulement principal. Ce régime est observé aux faibles vitesses, il est parfaitement stable et pratiquement imperturbable.
- un **régime turbulent** se manifestant à partir d'une certaine distance de l'entrée par une oscillation du filet coloré puis à un mélange intime avec le fluide principal.

En utilisant plusieurs diamètres de tube et différentes viscosités de fluide (en faisant varier par exemple la température), Reynolds a montré que le régime laminaire était toujours observé lorsque le produit $\frac{qD}{\nu}$ était inférieur à 2300. Ce produit adimensionnel, appelé *nombre de Reynolds*, quantifie l'ensemble des caractéristiques de l'écoulement : la vitesse moyenne du fluide, le diamètre de la conduite, la viscosité cinématique du fluide.

Au-delà de cette valeur, suivant la qualité de l'entrée du tube, la régularité de la surface intérieure, la présence de vibrations, etc., l'écoulement laminaire peut ou non se transformer en régime turbulent. Dans des conditions idéales, l'écoulement laminaire peut se maintenir jusqu'à un nombre de Reynolds de $4 \cdot 10^4$. Au-delà, l'écoulement organisé se dégrade systématiquement en écoulement turbulent.

4.9.2 Propriétés des écoulements laminaires

L'écoulement laminaire se rapproche de l'idée que l'on se fait de l'écoulement d'un fluide parfait pour lequel on imagine un glissement des diverses couches de fluide les unes sur les autres sans échange de particules entre les différentes couches. Dans ce régime d'écoulement, les effets visqueux sont pourtant prépondérants et on est loin de l'écoulement potentiel, en particulier au voisinage des parois. Cependant, par opposition à l'écoulement turbulent, c'est l'organisation et la stabilité qui dominent parmi les propriétés principales de l'écoulement laminaire.

Les applications industrielles les plus importantes correspondent aux paliers et patins hydrodynamiques et à tous les domaines de la lubrification. Ils correspondent également à l'écoulement en milieu poreux, filtrations, applications pétrolières, ...etc.

L'écoulement laminaire unidimensionnel voire bidimensionnel fournit quelques unes des solutions exactes des équations de Navier-Stokes.

4.10 Applications

4.10.1 Écoulement de Poiseuille

Soit un écoulement d'un fluide incompressible entre deux plaques planes parallèles de largeur L très importante par rapport à leur longueur l (Fig.4.4). L'écoulement s'effectue sous l'action du gradient de pression.

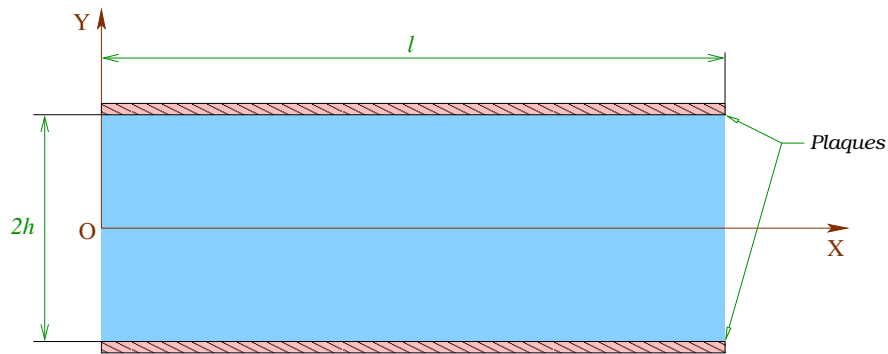


FIGURE 4.4: *Écoulement de Poiseuille.*

Hypothèses simplificatrices :

- Les composantes v et w du vecteur vitesse dans l'écoulement suivant Y et Z sont nulles.
- L'écoulement est permanent.
- Les forces de pesanteur sont négligeables (écoulement horizontal).

Avec ces hypothèses simplificatrices nous aurons :

* Equation de continuité : $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y, z)$

or $L \gg l \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ (pas de variation de la vitesse selon l'axe Z , donc : $u = u(y)$).

Le profil des vitesses ne dépend donc que de la variable y et puisque l'écoulement s'effectue suivant l'axe X , alors ce profil ne change pas et on dira que l'écoulement est établi.

* Equations de Navier-Stokes :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow p = p(x)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2} \Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

Le gradient de pression $\frac{dp}{dx}$ est le paramètre responsable du mouvement du fluide entre les plaques, on peut le remplacer par : $\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{l}$

avec : $\Delta p = p(x=0) - p(x=l)$

* Conditions aux limites : Le fluide étant visqueux, nous écrivons donc les deux conditions d'adhérence du fluide aux parois inférieure et supérieure :

$$\begin{cases} u(y = -h) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} h^2 - C_1 h + C_2 = 0 \\ u(y = +h) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} h^2 + C_1 h + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{h^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \end{cases}$$

Donc le profil des vitesses est :

$$u(y) = \frac{h^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (4.29)$$

Ce profil est ainsi de forme parabolique symétrique par rapport à l'axe X (Fig.4.5).

Par la suite et afin de faciliter les calculs, on pose : $A = \frac{h^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l}$

* *Position* de la vitesse maximale :

$$\left. \frac{du(y)}{dy} \right|_{y=d} = 0 \implies -\frac{2A}{h^2} d = 0 \implies d = 0$$

La position de la vitesse maximale est donc localisée au centre du canal.

* *Vitesse maximale* : elle est donnée par : $u_{max} = u(y = d)$ d'où :

$$u_{max} = \frac{h^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \quad (4.30)$$

* *Vitesse moyenne spatiale* : notée \bar{u} ou u_m et appelée aussi "*vitesse débitante*", elle est obtenue à partir du calcul du débit sur la largeur L :

$$Q_v = \int_S u(y) ds = \int_{-h}^{+h} u(y) L dy = 2AL \int_0^h \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) dy = 2AL \left(h - \frac{h}{3} \right) = \frac{4}{3} AhL$$

$$Q_v = \frac{2Lh^3}{3\mu} \frac{\Delta p}{l} \quad (4.31)$$

et d'après la définition du débit, nous avons : $Q_v = S\bar{u} = 2hL\bar{u}$ d'où :

$$\bar{u} = \frac{Q_v}{2hL} = \frac{4AhL}{3 \cdot 2hL} = \frac{2}{3} A \quad \text{et en remplaçant :}$$

$$u_m \equiv \bar{u} = \frac{h^2}{3\mu} \frac{\Delta p}{l} = \frac{2}{3} u_{max} \quad (4.32)$$

En combinant ces expressions, le profil des vitesses peut aussi s'écrire :

$$\frac{u(y)}{\bar{u}} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (4.33)$$

ou encore :

$$\frac{u(y)}{u_{max}} = 1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \quad (4.34)$$

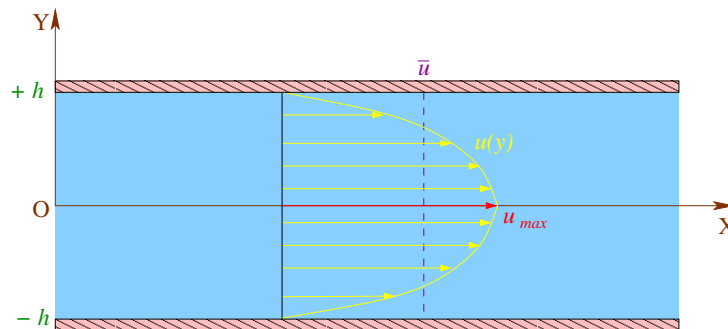


FIGURE 4.5: *Écoulement de Poiseuille. Profil des vitesses.*

* Le nombre de *Reynolds* de l'écoulement est calculable à partir du *diamètre hydraulique* :

$$D_H = \frac{4S}{P_m} \quad (4.35)$$

où :

- S : section de passage (ou section d'écoulement) ;
- P_m : périmètre mouillé ;
- R_H : rayon hydraulique ($D_H = 4 R_H$).

En appliquant cette relation à l'écoulement entre les deux plaques nous aurons :

$$D_H = \frac{4 \cdot 2hL}{4h+2L} = \frac{4hL}{2h+L} \quad \text{et si } h \ll L \text{ alors } D_H \simeq 4h \text{ d'où :}$$

$$\Re_e = \frac{\bar{u} D_H}{\nu} \simeq \frac{4h\bar{u}}{\nu} = \frac{4h^3}{3\rho\nu^2} \frac{\Delta p}{l} \quad (4.36)$$

L'écoulement reste laminaire et l'on observe une distribution de vitesse parabolique tant que $\Re_e < \Re_{ec} \simeq 2300$ à 40000 suivant les conditions d'établissement.

- **Contraintes au sein du fluide** : L'état de contrainte au sein du fluide est donné par l'équation de Newton qui exprime que les contraintes sont proportionnelles au taux de déformation (4.13).

$$\tau(y) = \mu \frac{du(y)}{dy} = -\frac{\Delta p}{l} y \quad (4.37)$$

Cette contrainte est nulle au centre de l'écoulement (u_{max}) et maximale à la paroi :

$$\tau_{p1} = \mu \left. \frac{du(y)}{dy} \right|_{y=+h} = -\frac{\Delta p}{l} h ; \quad \tau_{p2} = \mu \left. \frac{du(y)}{dy} \right|_{y=-h} = \frac{\Delta p}{l} h$$

La distribution des contraintes est indiquée sur la figure (Fig.4.6) :

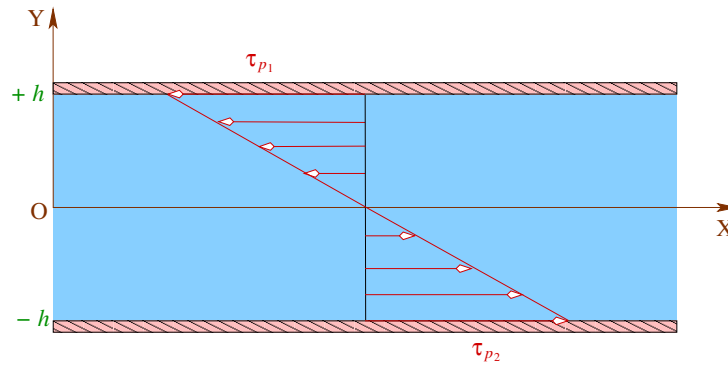


FIGURE 4.6: *Écoulement de Poiseuille. Etat de contrainte au sein du fluide.*

- **Coefficient de pertes de charge** : On introduit le coefficient de pertes de charge λ défini par :

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} \simeq \frac{24}{\Re_e} \cdot \frac{l}{h} \quad (4.38)$$

La pression motrice est égale à la perte de charge par frottement sur les parois et se calcule par l'intermédiaire de la contrainte à la paroi τ_p .

- **Coefficient de frottement à la paroi** : Il est donné par la relation :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} \simeq \frac{24}{\Re_e} \simeq \lambda \cdot \frac{h}{l} \quad (4.39)$$

- **Force de traînée sur la plaque** : Cette force est due au frottement sur la plaque

et se calcule par :

$$F_t = S_p \cdot \tau_p = L h \Delta p \quad (4.40)$$

S_p étant la surface de la plaque sur laquelle se produit le frottement :

$$S_p = L.l \quad (4.41)$$

4.10.2 Écoulement de Couette généralisé

C'est l'écoulement de Poiseuille dans lequel la paroi inférieure se déplace parallèlement à elle-même avec la vitesse constante U_0 . L'écoulement est décrit par le profil des vitesses suivant :

$$u(y) = \frac{U_0}{2} \left[1 - \frac{y}{h} \right] + \frac{h^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (4.42)$$

Suivant la valeur de Δp , on observe les allures suivantes pour la distribution de vitesse (Fig.4.7) :

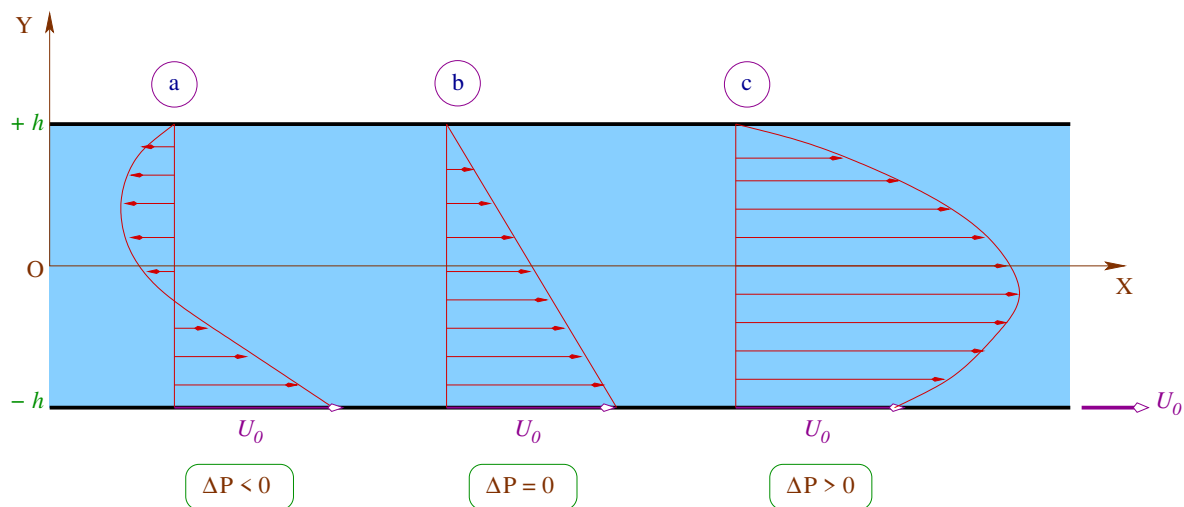
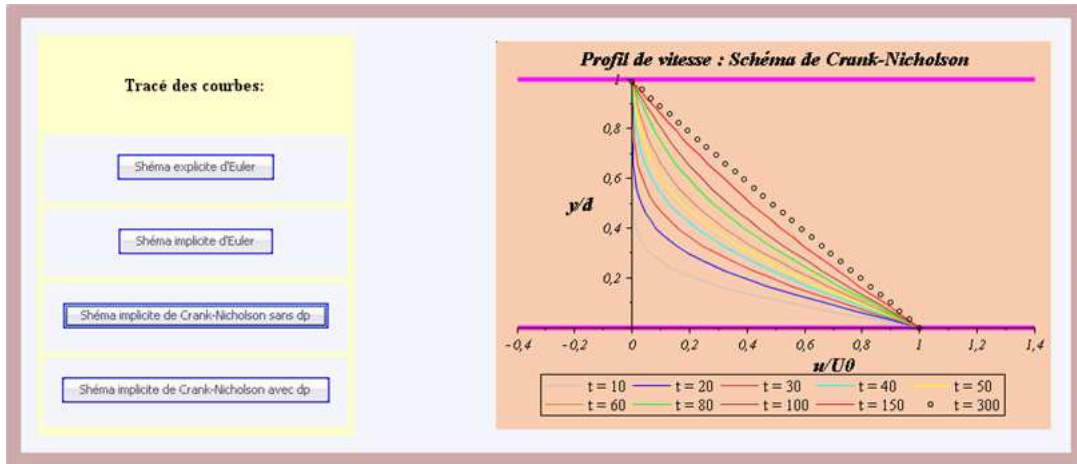


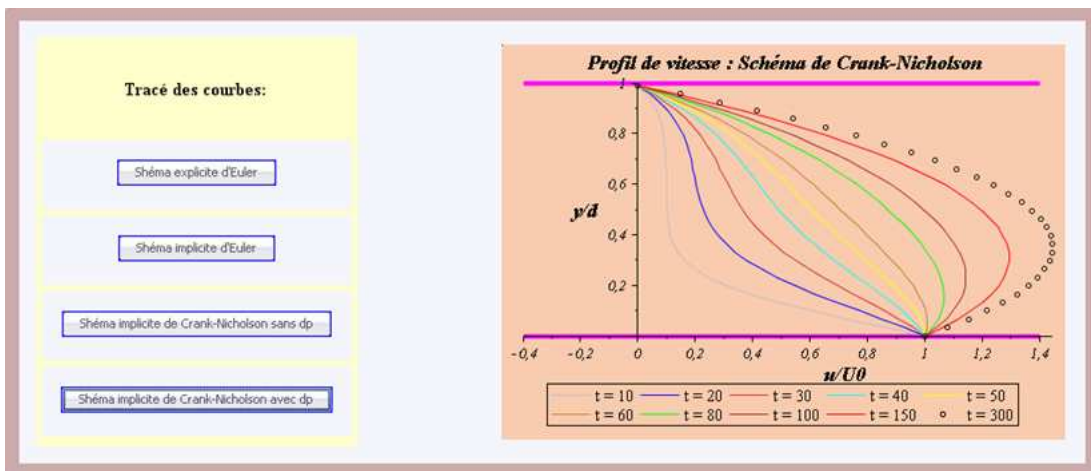
FIGURE 4.7: *Écoulement de Couette généralisé. Profils des vitesses.*

- Si $\Delta p > 0$ ou $\frac{dp}{dx} < 0$, on dira que l'écoulement s'effectue avec un *gradient de pression favorable* (la pression s'effectue dans le sens de l'écoulement).
- Si $\Delta p < 0$ ou $\frac{dp}{dx} > 0$, on dira que l'écoulement s'effectue avec un *gradient de pression défavorable* (la pression s'effectue dans le sens contraire de l'écoulement).

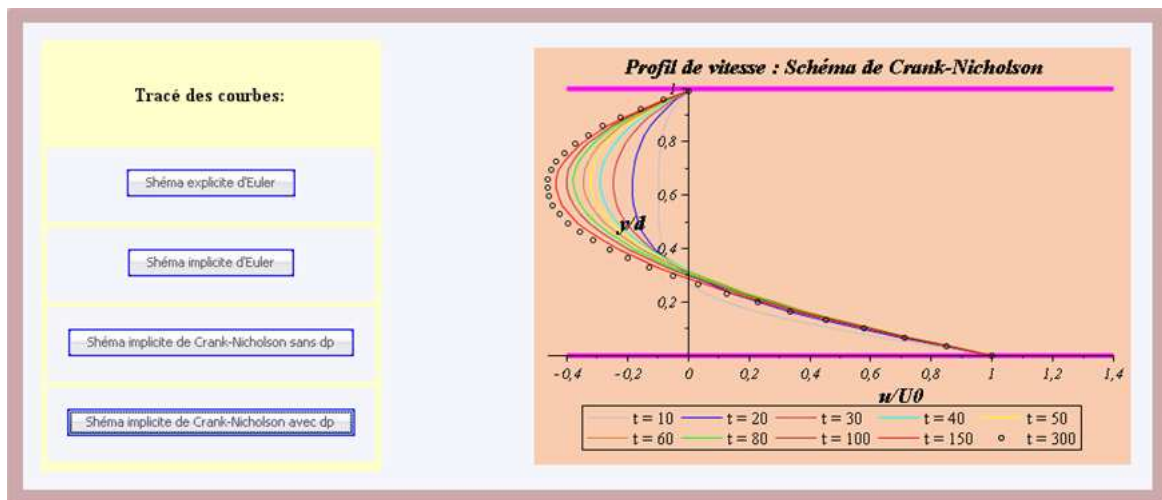
Les figures (Fig.4.8) ci-dessous nous montrent la distribution de vitesse dans un écoulement de Couette instationnaire pour différents gradients de pression.



$$\Delta p = 0, \frac{dp}{dx} = 0$$



$$\Delta p > 0, \frac{dp}{dx} < 0$$



$$\Delta p < 0, \frac{dp}{dx} > 0$$

FIGURE 4.8: *Écoulement de Couette instationnaire pour différents gradients de pression [31].*

- Exercice d'application :

Un dispositif convoyeur-courroie monté sur un bateau est utilisé pour récupérer de l'huile de pétrole de viscosité cinématique ν qui contamine la surface de la mer (Fig.4.9). On suppose que l'écoulement est permanent, incompressible, visqueux et que le dispositif fonctionne en continu c-à-d que le film d'huile d'épaisseur a n'est pas discontinu. En suppose, de plus, que la courroie, fonctionnant à une vitesse U_0 constante, a une largeur L (perpendiculaire au papier) très grande.

1. Déterminer l'expression du débit volumique d'huile qui peut être porté vers le haut (sur le bateau).
2. En maintenant l'angle d'inclinaison θ constant, quel est le débit maximal qu'on peut récupérer sur le bateau ?.

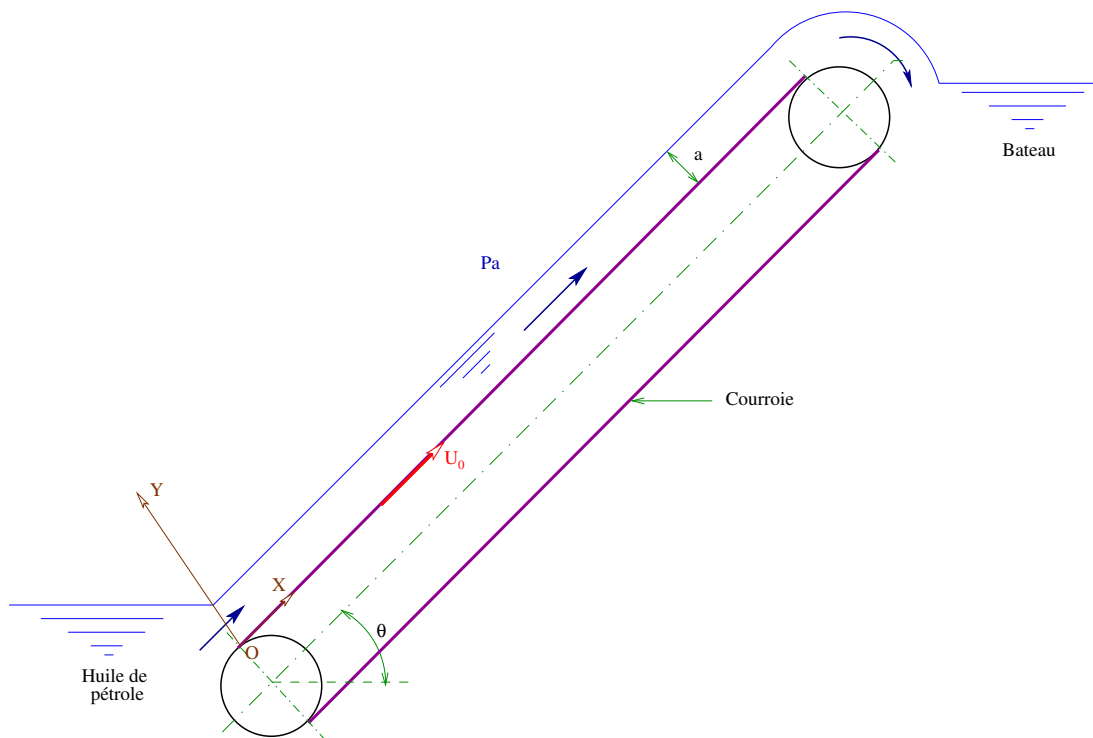


FIGURE 4.9: *Exercice d'application. Convoyeur-courroie.*

Solution :

1- Le problème étant en coordonnées cartésiennes, nous utilisons alors les équations de N-S (4.28). Utilisons les hypothèses simplificatrices afin de pouvoir résoudre le problème plus facilement (sans programmation) :

- Ecoulement stationnaire $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$.
- Fluide incompressible $\Rightarrow \rho = C^{te}$.
- Fluide visqueux \Rightarrow adhérence du fluide à la courroie (cette hypothèse sera utilisée dans les C.L.).
- Ecoulement plan $(o, x, z) \Rightarrow v = 0$.
- Courroie de largeur très grande selon l'axe $z \Rightarrow w = 0$ et $\frac{\partial q}{\partial z} = 0$.
- Forces volumiques non négligeables à cause de la position inclinée de la courroie : l'huile résiste au mouvement ascendant donc nous avons les composantes suivantes :

$$f_x = -g \sin \theta \quad ; \quad f_y = -g \cos \theta \quad ; \quad f_z = 0$$

On associe l'équation de continuité à celles de N-S :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

en la simplifiant, on aura : $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y, z)$.

Or $\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow u = u(y)$, le profil de vitesse est donc uniquement fonction de la variable y .

La dernière équation de N-S nous montre que le profil de pression ne dépend que de x et y :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \Rightarrow P = P(x, y).$$

Après toutes ces simplification, les équations principales se réduisent à :

$$\begin{cases} 0 = -g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Pour pouvoir intégrer et déterminer le profil des vitesses, il faut d'abord trouver le champ de pression. La deuxième équation de ce système nous donne :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos \theta \Rightarrow P(x, y) = -\rho g \cos \theta y + f(x)$$

Or, nous avons toujours comme condition à la surface du fluide :

$$P(x, a) = P_a \Rightarrow f(x) = P_a + \rho g a \cos \theta = C^{te}$$

d'où le champ de pression au sein du fluide :

$$P(x, y) = P(y) = P_a + \rho g \cos \theta \cdot (a - y)$$

Ceci nous facilite donc l'intégration de la première équation du système car la pression ne dépend que de y d'où : $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$.

Cette conclusion pouvait aussi être déduite sans faire le calcul du champ de pression en constatant que le mouvement du fluide est dû principalement grâce aux forces visqueuses donc les forces de pression longitudinale sont négligeables devant les forces visqueuses : $\frac{\partial P}{\partial x} \ll g \sin \theta$.

Une double intégration par rapport à y nous donne tout de suite :

$$u(y) = \frac{g \sin \theta}{2\nu} y^2 + C_1 y + C_2$$

* Conditions aux limites (C.L.) :

— Adhérence du fluide à la courroie $\Rightarrow u(y=0) = U_0 \Rightarrow C_2 = U_0$.

— Contrainte nulle à la surface (vitesse minimale) $\Rightarrow \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=a} = 0$

$\Rightarrow C_1 = -\frac{g a \sin \theta}{\nu}$ d'où le profil des vitesses :

$$u(y) = U_0 - \frac{g \sin \theta}{2\nu} (2a - y) y$$

C'est maintenant que nous pouvons répondre à la question et déterminer le débit qui peut être porté sur le bateau. Nous avons, par définition du débit :

$$Q_v = \int_S u(y) dS = \int_0^a u(y) L dy = U_0 L a - \frac{L g \sin \theta}{3\nu} a^3$$

2- Déterminons le débit maximal qu'on peut récupérer si $\theta = C^{te}$:

$\theta = C^{te} \Rightarrow Q_v = Q_v(a)$ et alors le débit max est donné par la valeur de a qui annule sa dérivée par rapport à a :

$$\frac{dQ_v}{da} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{\nu U_0}{g \sin \theta}}$$

et le débit maximal est : $Q_{vmax} = Q_v \left(\sqrt{\frac{\nu U_0}{g \sin \theta}} \right)$

soit finalement :

$$Q_{vmax} = \frac{2}{3} L U_0 \sqrt{\frac{\nu U_0}{g \sin \theta}}$$

Application numérique :

$a = 1 \text{ mm}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\theta = 30^\circ$; $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $U_0 = 1 \text{ m/s}$.

Le débit maximal est de $2,9814 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, il est atteint à la distance $0,4472 \text{ mm}$.

— Les figures ci-dessous nous montrent la distribution de vitesse et la variation du débit pour différentes valeurs de U_0 .

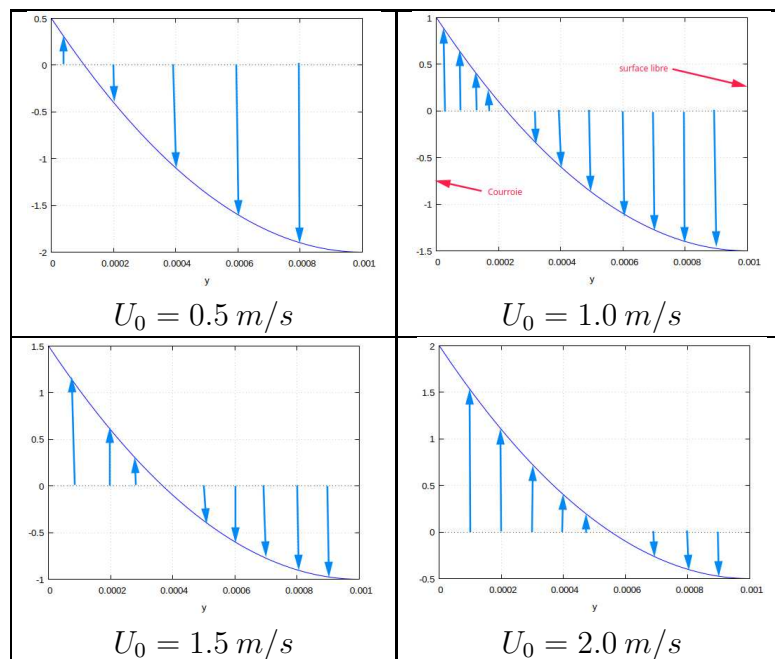


FIGURE 4.10: *Variation de $u(y)$ pour différentes valeurs de U_0 .*

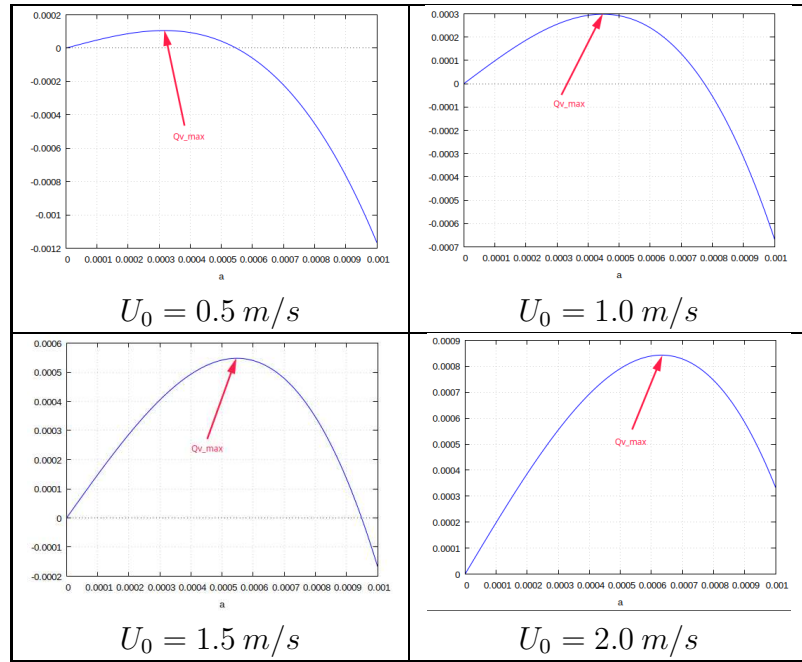


FIGURE 4.11: *Variation de $Q_v(a)$ pour différentes valeurs de U_0 .*

4.11 Écoulements à faible nombre de Reynolds

Les équations de N-S (4.21) qui découlent de la 2^{ème} loi de Newton stipulent que le taux de variation de la quantité de mouvement d’une particule de fluide doit être équilibré par les forces volumiques (gravité) appliquées sur la particule ainsi que les forces surfaciques (pression et frottement) exercées sur les facettes de cette particule. La résolution de ces EDP non linéaires étant difficile en l’absence de solution exacte, on cherche généralement à obtenir des solutions approximatives en faisant recours aux méthodes numériques. Sous certaines conditions, le taux de variation de la quantité de mouvement est faible comparé aux forces volumiques et surfaciques et peut donc être négligé sans trop d’erreurs dans la solution. L’écoulement est alors gouverné par l’équilibre entre les forces volumiques et surfaciques. Physiquement, ceci arrive quand la viscosité du fluide est élevée, quand la masse volumique est faible, quand la vitesse change rapidement à travers une faible distance produisant un brusque gradient spatial ou bien quand la vitesse convective est suffisamment faible. Ceci revient globalement à ce que le nombre de Reynolds soit suffisamment faible en fonction du problème considéré (écoulements de sirops, de miels et de diverses huiles en lubrification).

Dans ce paragraphe, nous allons considérer les écoulements “à faible nombre de Reynolds” ($\mathfrak{R}_e \ll 1$), appelés aussi “écoulements de Stokes” qui sont régis par les EDP linéaires (4.28). Ces équations peuvent avoir une solution exacte pour certains

problèmes simples sinon, pour les problèmes plus compliqués, le passage aux solutions approximatives est nécessaire.

4.11.1 Lubrification Hydrodynamique

Un écoulement laminaire d'une grande importance pratique est celui de la lubrification hydrodynamique. Nous allons développer cette théorie dite "*théorie du coin d'huile*" à travers un exemple très simple utilisé en industrie qui est celui du "*patin hydrodynamique*". Nous allons déterminer l'équation de la charge portante maximale que peut supporter le système ainsi que la force de traînée requise pour mettre en mouvement la plaque supérieure à la vitesse U_0 .

4.11.1.1 Formule de Reynolds

Soit un patin incliné, fixe, de longueur L , de largeur unité et un plan mobile animé d'une vitesse U_0 entraînant par son mouvement une mince couche d'huile entre les deux surfaces (Fig.4.12).

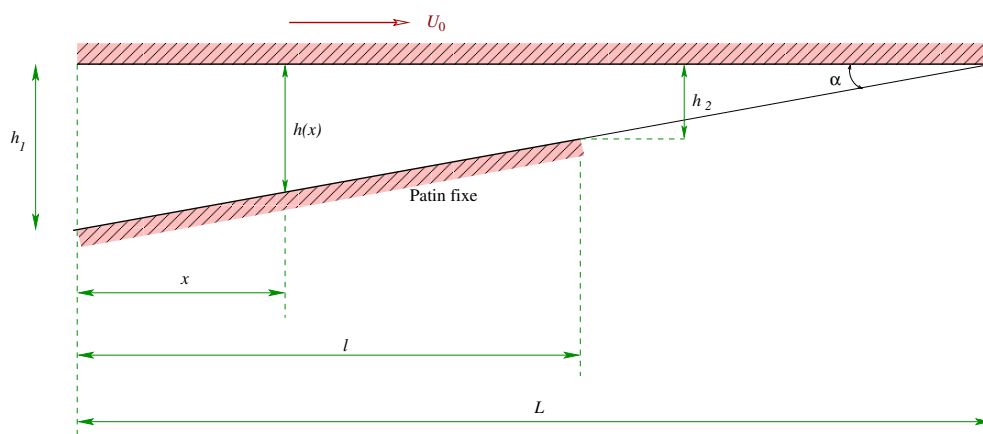


FIGURE 4.12: *Patin hydrodynamique.*

Nous supposons que la pente est très faible de telle sorte que les calculs effectués en (§4.10.1) restent valables. Nous avons alors après simplification des équations de N-S :

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2}$$

Puisque la pression ne varie pas en fonction de y à cause de la très faible épaisseur du film d'huile, l'intégration de cette équation nous donne :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

Les constantes sont déterminées par les deux conditions d'adhérence du fluide aux parois :

$$u(y=0) = 0 \quad \text{et} \quad u(y=h) = U_0.$$

Le profil des vitesses est donc :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y (y-h) + \frac{U_0}{h} y \quad (4.43)$$

Le débit volumique passant entre les plans est :

$$Q_v = \int_0^h u(y) dy = \frac{U_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (4.44)$$

D'où la formule dite de *Reynolds* liant le gradient de pression directement au débit :

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu U_0 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{2Q_v}{h^3 U_0} \right) \quad (4.45)$$

4.11.1.2 Répartition de pression

La formule de Reynolds nous permet de déterminer la répartition de la pression connaissant la loi $h(x)$ du plan supérieur :

$$h(x) = (L-x) \tan \alpha \simeq \alpha (L-x) \quad (4.46)$$

d'où :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu U_0}{\alpha^2} \left[\frac{1}{(L-x)^2} - \frac{2Q_v}{\alpha (L-x)^3 U_0} \right]$$

et en intégrant :

$$p(x) = p(x=0) + \int_0^x \frac{dp}{dx} dx = P_a + \frac{6\mu U_0}{\alpha^2} \left[\frac{x}{L(L-x)} - \frac{Q_v}{\alpha U_0} \frac{x(2L-x)}{L^2(L-x)^2} \right]$$

la deuxième condition aux limites $p(x=l) = P_a$ nous donne le débit :

$$Q_v = \frac{\alpha U_0 L(L-l)}{2L-l} = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} U_0 \quad (4.47)$$

d'où finalement :

$$p(x) = P_a + \frac{6\mu U_0 x(l-x)}{\alpha^2 (2L-l)(L-x)^2} \quad (4.48)$$

La position de la pression maximale est obtenue pour $\frac{dp}{dx}|_{x=x_m} = 0$, ce qui nous donne :

$$x_m = \frac{Ll}{2L - l} \quad (4.49)$$

et en remplaçant α issu de la relation : $h_2 = \alpha(L - l)$, on aura l'expression de la pression maximale : $p_{max} = p(x = x_m)$, d'où :

$$p_{max} = P_a + \frac{3\mu U_0 l^2 (L - l)}{2h_2^2 L (2L - l)} \quad (4.50)$$

La variation de la pression le long du film d'huile est représentée plus loin (Fig.4.14).

Ce dispositif constitue le principe de la buté *Michell* qui est utilisée dans la construction des *pivoteries des groupes turbo alternateurs* à axe vertical. L'arbre du groupe porte une couronne dont la face inférieure repose sur une couronne de patins inclinés supportée par les fondations du groupe. L'ensemble est contenu dans un bain d'huile dont le refroidissement est assuré par une circulation continue à travers un réfrigérant. On peut ainsi supporter les charges de plusieurs centaines de tonnes que représente le poids des masses tournantes auquel s'ajoute la poussée hydraulique.

4.11.1.3 Calcul de la charge portante

La charge portante est obtenue par intégration des forces de pression effectives sur le plan supérieur :

$$F = \int_0^l (p - P_a) dx = \frac{\mu U_0 l^2}{h_2^2} C_p \quad (4.51)$$

où C_p est un coefficient sans dimensions qui s'exprime par :

$$C_p = \frac{6h_2^2}{(h_1 - h_2)^2} \left[\ln \frac{h_1}{h_2} - 2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right] \quad (4.52)$$

Le point d'application x_c de la charge portante sur le patin est nécessaire pour la construction de ce dernier. Il est obtenu par une équation de moments par rapport à l'origine :

$$F \cdot x_c = \int_0^l (p - P_a) x dx \quad (4.53)$$

Dans cette formule, nous avons négligé l'inclinaison α (très faible), ce qui revient à admettre que l'abscisse x_c du point d'application est le même pour le patin et le plan supérieur.

4.11.1.4 Calcul de la force de frottement

La contrainte au sein du film d'huile due au frottement est donnée par l'équation de Newton :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \left[\frac{U_0}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h - 2y) \right] \quad (4.54)$$

et les contraintes sur le patin et sur le plan supérieur sont :

$$\tau_0 = \frac{\mu U_0}{h} - \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \quad (4.55)$$

$$\tau_h = \frac{\mu U_0}{h} + \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \quad (4.56)$$

La force de frottement sur le plan mobile est donnée par :

$$F_f = \int_0^l \tau_h dx = \frac{\mu U_0 l}{h_2} C_f \quad (4.57)$$

où C_f est un coefficient sans dimensions qui s'exprime par :

$$C_f = \frac{2h_2}{h_1 - h_2} \left[2 \ln \frac{h_1}{h_2} - 3 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right] \quad (4.58)$$

On définit le *coefficient de frottement équivalent* par :

$$f = \frac{F_f}{F} = \frac{h_2}{l} \cdot \frac{C_f}{C_p} \quad (4.59)$$

4.11.1.5 Paramètres caractérisant le fonctionnement

Pour caractériser le fonctionnement du système hydrodynamique on définit les paramètres suivants :

$$K_p = \sqrt{C_p} = \sqrt{\frac{F}{\mu U_0}} \cdot \frac{h_2}{l} \quad (4.60)$$

$$K_f = \frac{C_f}{C_p} \sqrt{\frac{F}{\mu U_0}} \cdot \frac{h_2}{l} \quad (4.61)$$

Traçons ensuite les variations de ces coefficients en fonction de $\frac{h_2}{l}$ (Fig.4.13).

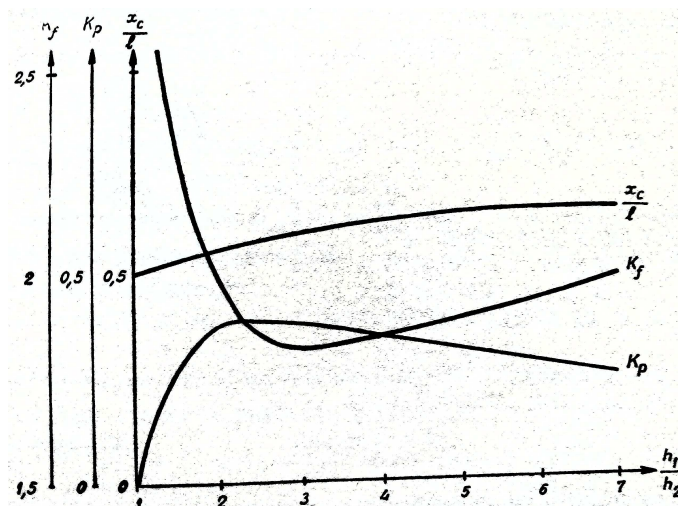


FIGURE 4.13: Paramètres caractérisant le fonctionnement du "coin d'huile" [1].

Le fonctionnement optimal peut être envisagé de deux points de vue :

1. Pour une épaisseur donnée h_2 du film d'huile à la sortie, on veut obtenir une charge portante maximale. Dans ce cas, on choisira K_p maximal, ce qui correspond à :

$$\frac{h_1}{h_2} = 2,25 \quad ; \quad \frac{x_c}{l} = 0,58$$

2. On veut obtenir un coefficient de frottement minimal (puissance perdue minimale), ce qui correspond à :

$$\frac{h_1}{h_2} = 3,00 \quad ; \quad \frac{x_c}{l} = 0,61$$

Pratiquement, on choisit une valeur moyenne entre les deux valeurs optimales précédentes :

$$\frac{x_c}{l} = 0,60 \quad ; \quad \frac{h_1}{h_2} = 2,75 \quad ; \quad K_f = 1,82 \quad ; \quad K_p = 0,39$$

La solution technologique usuelle permettant d'assurer automatiquement ce fonctionnement optimal, consiste à articuler les patins (Fig.4.14). Pour que le patin soit en équilibre, il faut que la résultante des forces de pression $F.b$ (b étant la largeur du patin) passe par l'axe d'articulation. Si on place cet axe à une distance $x_c = 0,6l$, on est certain d'obtenir automatiquement le fonctionnement hydrodynamique optimal. L'équilibre obtenu est stable ; les courbes (Fig.4.13) montrent en effet que $\frac{x_c}{l}$ et $\frac{h_1}{h_2}$ varient dans le même sens. Si par exemple $\frac{h_1}{h_2}$ diminue, la résultante se déplace donc vers la gauche et tend à faire basculer le patin dans le sens qui augmente $\frac{h_2}{h_1}$. Si $\frac{h_2}{h_1}$ augmente, la résultante se déplace donc vers la droite et tend à faire basculer le patin dans le sens qui augmente $\frac{h_1}{h_2}$. L'équilibre est donc bien stable.

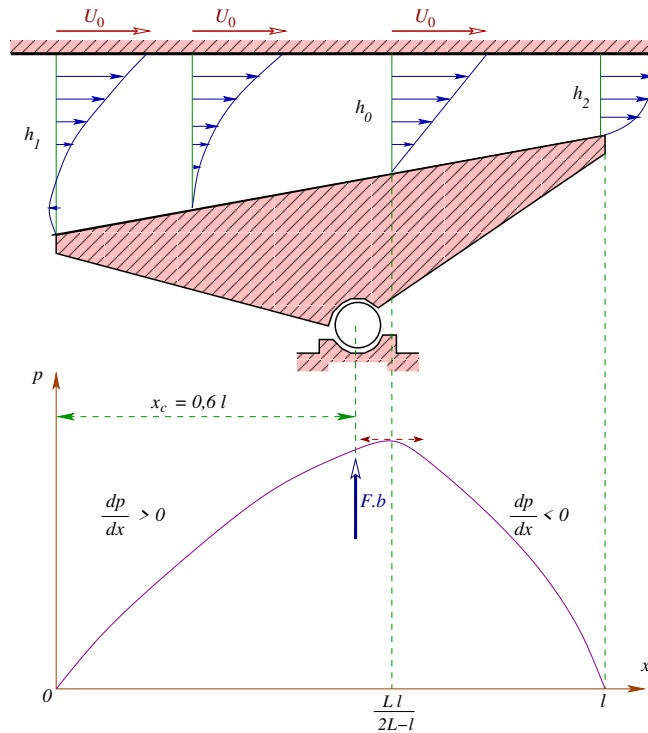


FIGURE 4.14: *Patin de butée Michell.*

Remarque :

Si l'on tient compte des fuites latérales, la pression devient à la fois fonction de x et de z . L'équation de Reynolds s'écrira alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \mu U_0 \frac{dh}{dt} \quad (4.62)$$

Cette équation n'admet pas de solution exacte. Le recours aux méthodes numériques est obligatoire pour la résoudre.

- Exemple d'application :

Un patin carré de 200 mm de côté, incliné de telle sorte que $h_1 = 0,06 \text{ mm}$ et $h_2 = 0,02 \text{ mm}$, est translaté à une vitesse de 10 m/s sur un plan. L'ensemble baigne dans de l'huile de viscosité dynamique 80 cPo. Calculer la pression maximale et sa position, la charge supportée par le patin, la position de la résultante, la force de frottement sur le patin ainsi que le coefficient de frottement équivalent. Tracer la répartition de la pression le long du film d'huile.

Données : $l = 0,2 m$; $h_1 = 6.10^{-5} m$; $h_2 = 2.10^{-5} m$; $U_0 = 10 m/s$; $p_a = 101325 N/m^2$;
 $\mu = 0,08 Kg/m.s$

4.11.2 Mouvement long d'une sphère

Le mouvement d'une petite sphère qui tombe dans un liquide visqueux a été résolu par *Stokes*. La force de traînée de la sphère est :

$$F_x = 3\pi\mu UD \quad (4.63)$$

où U représente la vitesse et D le diamètre de la sphère.

Le coefficient de traînée est donné par :

$$C_x = \frac{|F_x|/S}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{24}{\Re_e} \quad (4.64)$$

où $S = \frac{\pi D^2}{4}$ est la surface frontale de la sphère.

La concordance avec les résultats expérimentaux est excellente pour $\Re_e < 1$. Ceci a fortement contribué dans une application célèbre dans la viscosimétrie. En effet, on peut calculer la force de traînée agissant sur une sphère descendant sous l'effet de la pesanteur dans un récipient cylindrique rempli d'un fluide de viscosité μ . Il faut souligner que pour $\Re_e \ll 1$, la perturbation provoquée par la sphère sur le champ de vitesse homogène et parallèle est sensible à grande distance. Ainsi, en utilisant (4.63) pour déterminer μ , le diamètre du récipient cylindrique contenant le fluide doit excéder de plus de 100 fois celui de la sphère, afin de réduire l'erreur de calcul à moins de 2%.

4.11.3 Mouvement long d'un cylindre circulaire

Il s'agit de trouver une solution à ce problème bidimensionnel gouverné par l'équation *bi-harmonique* (4.65) obtenue à partir des équations (4.28).

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (4.65)$$

Les conditions aux limites à la surface du cylindre $u_r = v_\theta = 0$ fournissent un écoulement plan et parallèle à l'infini. Il s'avère, toutefois, impossible de trouver une solution qui vérifie à la fois les conditions à la surface du cylindre et à l'infini (paradoxe de Stokes). Dans le cadre de cet écoulement lent, cette difficulté provient de l'influence du cylindre sur le champ de vitesse à grande distance. Il existe ainsi une région où les termes non linéaires représentant les effets d'inertie sont aussi importants que ceux représentant les effets visqueux. Plus la valeur du \Re_e est petite, plus cette région d'influence du cylindre est éloignée.

4.12 Exercices

D1 : Un bloc de poids P et de surface S glisse sur un plan incliné avec une vitesse constante q . Entre le bloc et le plan se trouve une couche mince d'huile d'épaisseur e . L'inclinaison du plan par rapport à l'horizontale est α . Trouver la viscosité du film lubrifiant.

A.N : $P = 45359 \text{ N}$; $S = 21,53 \text{ m}^2$;

$q = 19,68 \text{ m/s}$; $e = 0,254 \text{ mm}$; $\alpha = 30^\circ$.

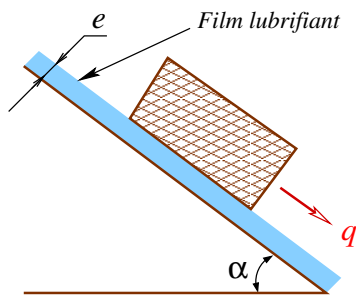


FIGURE 4.15: D1.

Rép : $0,0136 \text{ N.s/m}^2$.

D2 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide sur une plaque plane inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Si cet écoulement est parallèle à cette plaque de grande largeur dans le plan (xoz) , trouver le profil de vitesse u en fonction de ν , α , g et d (épaisseur du fluide au dessus de la plaque) en utilisant :

- 1- Directement les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes.
- 2- En appliquant la 2^{ème} loi de Newton sur un $(v.c)$ convenablement choisi.

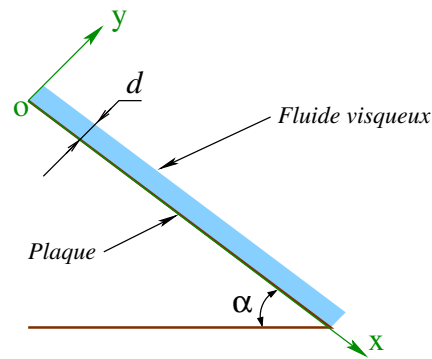


FIGURE 4.16: D2.

Rép : $u(y) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} \cdot y (2d - y)$.

D3 : Un viscosimètre est constitué d'un cylindre de rayon R_1 tournant à l'intérieur d'un autre cylindre de rayon R_2 avec une vitesse de rotation ω . On suppose que :

- 1- L'écoulement est stationnaire, incompressible et visqueux.
- 2- L'écoulement entre les cylindres est laminaire tant que le cylindre intérieur tourne.
- 3- Les composantes radiale et verticale de la vitesse sont nulles.
- 4- L'écoulement ne varie pas dans la direction axiale z .

Trouver le profil de vitesse correspondant à cet écoulement en fonction de R_1 , R_2 , ω et r . Négliger l'influence de la base du viscosimètre et considérer uniquement les parois verticales des cylindres.

Rép : $v_\theta(r) = \frac{R_1^2 \omega}{r} \left[\frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1} \right]$.

D4 : Un dispositif convoyeur-courroie monté sur un bateau est utilisé pour récupérer de l'huile de pétrole de viscosité cinématique ν qui contamine la surface de la mer. On suppose que l'écoulement est permanent, incompressible, visqueux et que le dispositif fonctionne en continu c-à-d que le film d'huile d'épaisseur a n'est pas discontinu. On sup-

pose, de plus, que la courroie, fonctionnant à une vitesse U_0 constante, a une largeur L (perpendiculaire au papier) très grande à l'air libre.

- 1- Ecrire les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible et visqueux en coordonnées cartésiennes et définir chacun des termes présents dans ces équations.
- 2- Simplifier ces équations pour l'écoulement étudié ci-dessus. Justifier toutes vos simplifications.
- 3- Trouver le profil des vitesses de l'écoulement.
- 4- Déterminer l'expression du débit volumique d'huile qui peut être porté vers le haut (sur le bateau).
- 5- Déterminer la contrainte appliquée sur la courroie.
- 6- En maintenant l'angle d'inclinaison θ constant, quel est le débit maximal qu'on peut récupérer sur le bateau ?

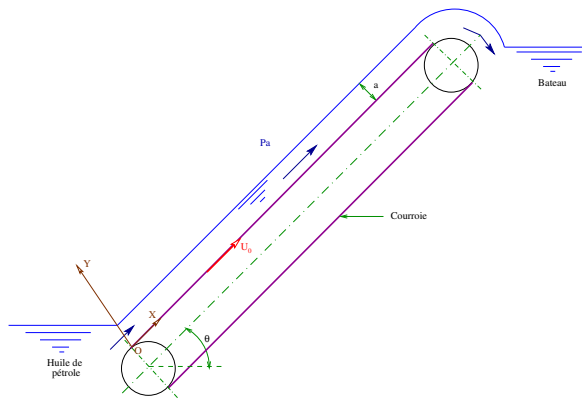


FIGURE 4.17: D4.

- Rép :** 3) $u(y) = U_0 - \frac{g \sin \theta}{2\nu} (2a - y) y$.
 4) $Q_v = U_0 L a - \frac{L g \sin \theta}{3\nu} a^3$.
 5) $\tau_p = -\rho g a \sin \theta$
 6) $Q_{v \max} = \frac{2}{3} L U_0 \sqrt{\frac{\nu U_0}{g \sin \theta}}$.

D5 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide newtonien entre deux plaques horizontales

de longueurs l . La plaque inférieure est animée d'une vitesse constante U_0 . L'écoulement étant parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xoz) et en négligeant les forces de pesanteurs :

- 1- Ecrire les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible et visqueux en coordonnées cartésiennes et définir chacun des termes présents dans ces équations.
- 2- Simplifier ces équations pour l'écoulement étudié ci-dessus. Justifier toutes vos simplifications.
- 3- Trouver le profil des vitesses de l'écoulement entre les plaques en fonction de μ , U_0 , l , d et ΔP (perte de charge).
- 4- Tracer l'allure de distribution de vitesse suivant les valeurs de ΔP .

Pour la suite du problème on considère que ΔP est positive.

- 5- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement.
- 6- Déterminer les contraintes tangentielles aux parois inférieure et supérieure et tracer l'état de contrainte au sein du fluide.
- 7- Déterminer le débit volumique passant entre les plaques (la largeur des plaques suivant la direction z est égale à l'unité).
- 8- Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement entre les plaques et en déduire le nombre de Reynolds. Que représente physiquement ce nombre ?

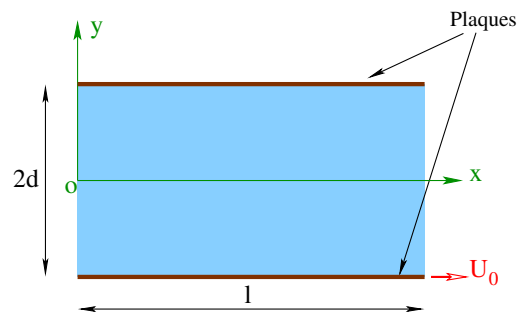


FIGURE 4.18: D5.

Rép : 3) $u(y) = \frac{d^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} [1 - (\frac{y}{d})^2] + \frac{U_0}{2} (1 - \frac{y}{d})$.

5) $u_{max} = \frac{U_0}{2} + \frac{d^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} + \frac{\mu l U_0^2}{8 d^2 \Delta p}$.

6) $\tau_{p1} = \frac{\Delta p}{l} d - \frac{\mu U_0}{2d}$; $\tau_{p2} = -\frac{\Delta p}{l} d - \frac{\mu U_0}{2d}$.

7) $Q_v = U_0 d + \frac{2d^3}{3\mu} \frac{\Delta p}{l}$.

8) $\bar{u} = \frac{U_0}{2} + \frac{d^2}{3\mu} \frac{\Delta p}{l}$.

$\mathcal{R}_e = \frac{4d\bar{u}}{\nu} = \frac{2d}{\nu} \left(U_0 + \frac{2d^2}{3\mu} \frac{\Delta p}{l} \right)$.

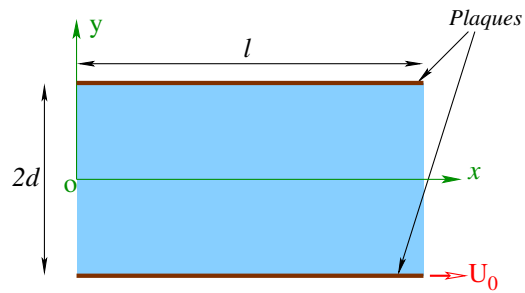


FIGURE 4.19: D6.

D6 : 1- Écrire les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible et visqueux en coordonnées cartésiennes.

2- Définir chacun des termes présents dans ces équations.

On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide newtonien entre deux plaques horizontales de longueur l . La plaque inférieure est animée d'une vitesse constante U_0 . L'écoulement dû au gradient de pression selon l'axe x étant parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xoz) (plan perpendiculaire à la feuille) ; en négligeant les forces de pesanteurs :

3- Simplifier ces équations en justifiant toutes vos simplifications.

4- Trouver le profil des vitesses entre les plaques en fonction de ρ , U_0 , l , d et ΔP .

Pour la suite du problème on suppose que le fluide était initialement au repos.

5- Donner la nouvelle expression du profil des vitesses et tracer son allure.

6- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement.

7- Déterminer l'état de contrainte au sein du fluide.

8- Déterminer le débit volumique passant entre les plaques (la largeur des plaques suivant la direction z est égale à l'unité).

9- Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement entre les plaques et en déduire le nombre de Reynolds.

Rép : 4) $u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} (d^2 - y^2) + \frac{U_0}{2} (1 - \frac{y}{d})$.

5) $u(y) = \frac{U_0}{2} (1 - \frac{y}{d})$.

6) $u_{max} = U_0$. 7) $\tau = -\frac{\mu U_0}{2d}$. 8) $Q_v = dU_0$.

9) $\bar{u} = \frac{U_0}{2}$; $\mathcal{R}_e = \frac{2dU_0}{\nu(2d+1)}$.

D7 : Dans une conduite de rayon R en écoulement turbulent lisse, le profil de vitesse u est donnée par la loi de puissance suivante:

$$\frac{u}{U} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$$

où n est un entier naturel et U une constante. Calculer le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse sur l'axe de la conduite.

Rép : $\frac{\bar{u}}{U} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$

D8 : On considère l'écoulement permanent d'un fluide incompressible homogène et visqueux dans une couronne comprise entre deux cylindres de révolution immobiles, infinis et coaxiaux de rayons respectifs R_1 pour le cylindre intérieur et R_2 pour le cylindre extérieur. On supposant que l'écoulement est stationnaire et axis-symétrique :

1- Simplifier les équations de Navier-Stokes dans ce cas d'écoulement en justifiant toutes vos réponses et écrire les conditions aux limites correspondantes.

2- La composante axiale du gradient de pression est maintenue constante et est notée P_z , trouver l'expression du profil des vitesses ainsi

que le champ de pression (on prendra P_0 comme pression de référence).

3- Déterminer la vitesse maximale de l'écoulement et tracer le profil des vitesses.

4- Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement.

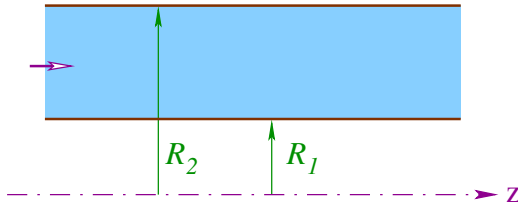


FIGURE 4.20: D8.

Rép :

$$2) w_z(r) = \frac{P_z}{4\mu} \left[r^2 - R_1^2 - (R_2^2 - R_1^2) \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right]$$

$$P(z) = P_z z + P_0.$$

$$3) w_{z_{max}} = \frac{P_z}{4\mu}.$$

$$\left[\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}} - R_1^2 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \left\{ \frac{\sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}}}{R_1} \right\} \right]$$

$$4) \bar{w}_z = \frac{P_z}{8\mu} \left[R_1^2 + R_2^2 + \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right].$$

D9 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide newtonien sur une plaque plane inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Une plaque de masse volumique ρ_p glisse sur le fluide avec une vitesse constante U_0 . L'écoulement étant parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xoz) :

1- Trouver le profil des vitesses de l'écoulement entre les plaques en fonction de ρ , μ , α , g , ρ_p , U_0 et a (épaisseur du fluide entre les plaques).

2- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement.

3- Déterminer les contraintes tangentielles aux parois inférieure et supérieure et tracer l'état de contrainte au sein du fluide.

4- Déterminer le débit volumique passant entre les plaques (la largeur des plaques suivant la direction z est égale à l'unité).

5- Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement entre les plaques et en déduire le nombre de Reynolds.

Rép : 1) $u(y) = \frac{U_0}{a} y + \frac{\rho + \rho_p}{2\mu} g \sin \alpha \cdot y (a - y)$.

2) $u_{max} = \frac{U_0}{2} \left(1 + \frac{\mu U_0}{a^2 (\rho + \rho_p) g \sin \alpha} \right) + \frac{a^2 (\rho + \rho_p)}{8\mu} g \sin \alpha$.

3) $\tau_{p1} = \mu \frac{U_0}{a} + \frac{a(\rho + \rho_p)}{2} g \sin \alpha$;

$\tau_{p2} = \mu \frac{U_0}{a} - \frac{a(\rho + \rho_p)}{2} g \sin \alpha$.

4) $Q_v = \frac{U_0 a}{2} + \frac{a^3 (\rho + \rho_p)}{12\mu} g \sin \alpha$.

5) $\bar{u} = \frac{U_0}{2} + \frac{a^2 (\rho + \rho_p)}{12\mu} g \sin \alpha$.

$$\Re_e = \frac{a\rho}{\mu(a+1)} \left(U_0 + \frac{a^2 (\rho + \rho_p)}{6\mu} g \sin \alpha \right).$$

D10 : Considérons une conduite cylindrique horizontale de rayon R et de longueur l siège d'un écoulement permanent, incompressible, visqueux et symétrique par rapport à l'axe x de la conduite. L'écoulement s'effectue par couches cylindriques coaxiales grâce à une différence de pression ΔP . Les quantités d'accélération sont nulles.

1- En utilisant la 2^{ème} loi de Newton sur un volume de contrôle convenablement choisi, montrer que la solution se ramène à la résolution d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

2- Résoudre cette équation en utilisant les conditions aux limites adéquates et déterminer l'expression du profil des vitesses.

3- Déterminer le débit volumique véhiculé dans la conduite et interpréter le résultat.

4- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement ainsi que la vitesse débitante et tracer les profils des vitesses (locale et moyenne).

5- Déterminer l'état de contrainte au sein du fluide et interpréter le résultat.

Rép : 2) $u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2)$.

3) $Q_v = \frac{\pi}{128\mu} \frac{\Delta p}{l} D^4$.

4) $u_{max} = \frac{1}{16\mu} \frac{\Delta p}{l} D^2$; $\bar{u} = \frac{1}{2} u_{max}$.

5) $\tau = -\frac{1}{2} \frac{\Delta p}{l} r$.

D11 : Soit un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux entre deux plaques planes de largeur (perpendiculaire au papier) égale à l'unité. Pour le profil de vitesse ci-dessous on demande de :

- 1- Trouver l'expression mathématique de la vitesse de l'écoulement en tenant compte de la condition d'adhérence du fluide aux parois.
- 2- Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement.

N.B : Prendre toutes les constantes d'intégration égales à zéro.

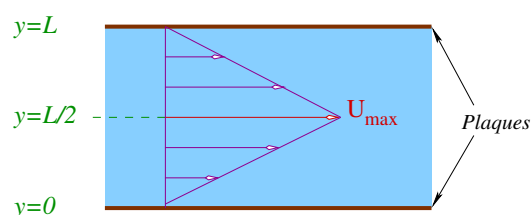


FIGURE 4.21: D11.

Rép :

$$1) u(y) = \begin{cases} \frac{2u_{max}}{L} y & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{L}{2} \\ 2u_{max} \left(1 - \frac{y}{L}\right) & \text{si } \frac{L}{2} \leq y \leq L \end{cases}$$

2) $\bar{u} = \frac{1}{2} u_{max}$.

D12 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide newtonien qui s'écoule librement sur une plaque plane verticale. Cette plaque, de grande étendue selon l'axe z , se déplace avec une vitesse U_0 constante, l'écoulement étant parallèle à la plaque. En utilisant les équations de Navier-Stokes :

1- Trouver le profil des vitesses de l'écoulement en fonction de ν , g , U_0 et h (épaisseur du fluide supposée constante).

2- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement.

3- Déterminer la contrainte pariétale.

4- Déterminer le débit volumique (plaque de largeur b suivant z).

5- Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement.

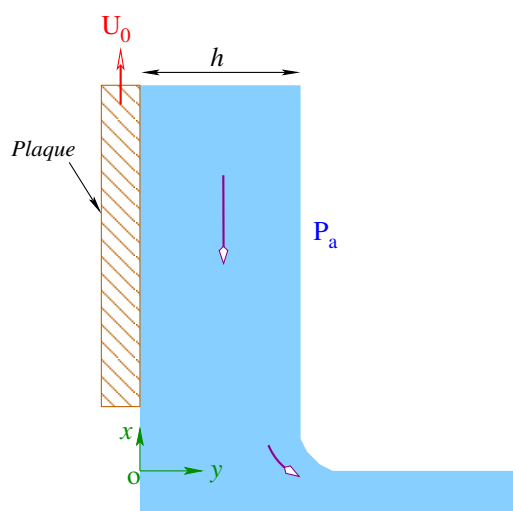


FIGURE 4.22: D12.

Rép : 1) $u(y) = \frac{g}{2\nu} y (y - 2h) + U_0$.

2) $u_{max} = U_0 - \frac{gh^2}{2\nu}$. 3) $\tau_p = -\rho gh$.

4) $Q_v = U_0 b h - \frac{bgh^3}{3\nu}$. 5) $\bar{u} = U_0 - \frac{gh^2}{3\nu}$.

D13 : Soit un écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide visqueux entre deux plaques planes parallèles distantes de h (l'axe X étant au milieu). Le profil des vitesses étant de la forme :

$$u(y) = u_{max} (Ay^2 + By + C)$$

On demande de trouver :

- 1- Les constantes A, B et C.

2- Le débit volumique par unité de profondeur qui passe entre ces plaques.

3- Le rapport entre la vitesse débitante et la vitesse maximale.

Que deviennent ces valeurs si l'axe est pris sur la plaque inférieure ?

Rép : 1) $A = -(\frac{2}{h})^2$; $B = 0$; $C = 1$.
 2) $Q_v = \frac{2}{3} u_{max} h$. 3) $\frac{\bar{u}}{u_{max}} = \frac{2}{3}$.

D14 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux (μ) d'un fluide newtonien entre deux plaques horizontales espacées d'une distance d et de longueur l . L'écoulement dû au gradient de pression selon l'axe X étant parallèle aux plaques de grande étendue selon Z .

1- Choisir un volume de contrôle adéquat et schématiser toutes les forces appliquées sur ce volume de contrôle.

2- Ecrire clairement les hypothèses nécessaires pour résoudre ce problème.

3- En appliquant la seconde loi de Newton et en utilisant les hypothèses simplificatrices, trouver le profil des vitesses entre les deux plaques en fonction de μ , l , d et Δp .

4- Déterminer le débit volumique passant entre les plaques de largeur b selon Z .

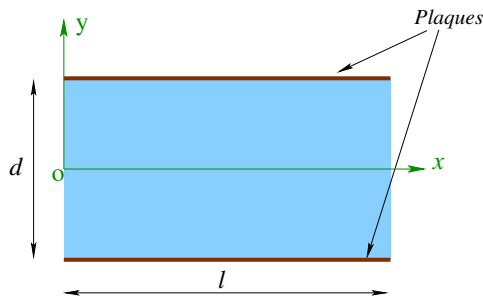


FIGURE 4.23: D14.

Rép : 3) $u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \left[(\frac{d}{2})^2 - y^2 \right]$.

4) $Q_v = \frac{bd^3}{12\mu} \frac{\Delta p}{l}$.

D15 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux (ν) d'un fluide newtonien sur une plaque plane inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. L'écoulement étant parallèle à la plaque de grande étendue dans le plan (xoz), trouver la relation entre le débit volumique et l'épaisseur h du fluide supposée constante.

La largeur de la plaque suivant la direction z est égale à L .

Rép : $Q_v = \frac{Lg \sin \alpha}{3\nu} h^3$.

D16 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide newtonien, incompressible et visqueux ($\mu = C^{te}$) entre deux plaques planes horizontales de grande largeur L dans le plan (xoz) et animées d'une vitesse constante U_0 . Une plaque très fine est placée au milieu de ce canal et l'écoulement est parallèle aux plaques. Les deux parties du fluide séparés par la plaque fine se rejoignent à l'extrémité de cette dernière à la section (1). L'écoulement est dû à un gradient de pression que l'on déterminera à posteriori.

On demande de déterminer complètement le profil de vitesse supposé établi à partir de la section (2).

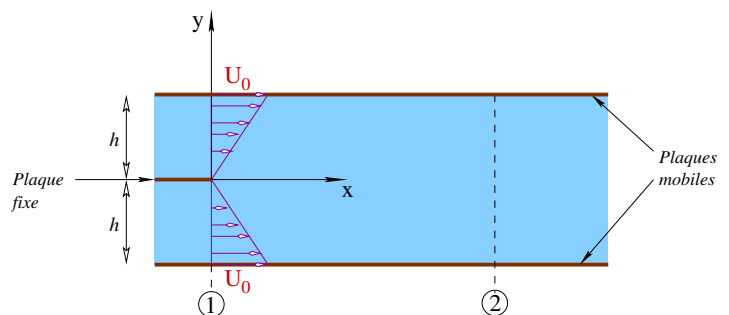


FIGURE 4.24: D16.

Rép : $\frac{dP}{dx} = \frac{3}{2} \mu \frac{U_0}{h^2}$, $u_2(y) = \frac{3U_0}{4} \left[(\frac{y}{h})^2 + \frac{1}{3} \right]$.

D17 : Dans une conduite de rayon R en écoulement turbulent, le profil de vitesse u est donnée par la loi de puissance suivante:

$$\frac{u}{U} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

où U est une constante.

1- Calculer le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse sur l'axe de la conduite.

2- Déterminer le rayon pour lequel la vitesse actuelle sera égale à la vitesse moyenne.

Rép : 1) $\frac{\bar{u}}{U} = \frac{49}{60}$; 2) $r = 0.758 R$

D18 : Le champ de vitesses d'un écoulement stationnaire et incompressible est donné par :

$$u = a(x^2 - y^2) ; v = -2axy ; w = 0$$

où a est une constante.

1- En utilisant les équations de Navier-Stokes, déterminer la distribution de pression résultante si l'axe Z est orienté vers le haut ($g_x = 0$; $g_y = 0$; $g_z = -g$).

2- Montrer qu'on peut obtenir le même résultat en montrant que l'écoulement est irrotationnel.

Rép : $P(x, y, z) = -\frac{1}{2}\rho a^2(x^2 + y^2)^2 - \rho g z + C$.

D19 : Le champ de vitesses d'un écoulement réel, stationnaire et incompressible est donné par :

$$u = x + y^2 + 1 ; v = -2x - y ; w = 0$$

En négligeant les forces de gravité, déterminer la distribution de pression au sein de l'écou-

lement.

Rép : $P(x, y) = -\frac{2}{3}\rho y^3 - \frac{1}{2}\rho(x^2 + y^2) - \rho(x + 2y) + 2\mu x + C$.

D20 : Le champ de vitesses d'un écoulement réel, stationnaire et incompressible est donné par :

$$u = -y^2 + 2y + 1 ; v = 0 ; w = 0$$

En négligeant les forces de gravité, déterminer la distribution de pression au sein de l'écoulement.

Rép : $P(x) = -2\mu x + C$.

D21 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux de deux fluides newtoniens et immiscibles entre deux plaques horizontales. La plaque supérieure est animée d'une vitesse constante U_0 . L'écoulement s'effectuant sans gradient de pression étant parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xoz) . En négligeant les forces de pesanteur et en considérant la continuité des vitesses et des contraintes à l'interface, déterminer la vitesse U_i à l'interface des deux fluides en fonction de μ_1, μ_2 et U_0 .

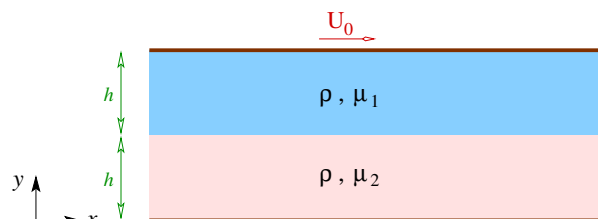


FIGURE 4.25: D21.

Rép : $U_i = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} U_0.$

D22 : Le champ de vitesses d'un écoulement réel bidimensionnel, stationnaire, incompressible et newtonien est donné par :

$$\vec{q} = (12xy^2 - 6x^3) \vec{i} + (18x^2y - 4y^3) \vec{j}$$

Calculer les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et τ_{xy} au point A de coordonnées $(0, 5; 1, 0)$ si la pression en ce point est de 6 KPa . Le fluide étant de la glycérine à 20°C ($\mu = 1,49 \text{ Pa}\cdot\text{s}$).

Rép : $\sigma_{xx} = -5,977 \text{ KPa}$;
 $\sigma_{yy} = -6,022 \text{ KPa}$; $\tau_{xy} = 44,7 \text{ Pa}$.

D23 : La composante axiale de la vitesse d'une particule de fluide qui se déplace sur une ligne de courant horizontale qui coïncide avec l'axe X est donnée par $u = x^2$. L'écoulement est stationnaire, bidimensionnel, le fluide est newtonien, incompressible et visqueux. Le long de cette ligne de courant déterminer les expressions :

- du taux de variation de la composante transversale de la vitesse ;
- de l'accélération de la particule ;
- du gradient longitudinal de pression.

Rép : a) $-2x$; b) $2x^3$; c) $2\mu - 2\rho x^3$.

D24 : Même problème que **D21** en considérant que l'écoulement s'effectue avec un gradient de pression. Déterminer la vitesse U_i à l'interface des deux fluides en fonction de μ_1 , μ_2 , h , U_0 et du gradient de pression.

Rép : $U_i = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} U_0 - \frac{h^2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{dP}{dx}.$

D25 : Même problème que **D24** en considérant que les deux plaques sont fixes.

Rép : $U_i = -\frac{h^2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{dP}{dx}.$

D26 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible, visqueux et newtonien entre deux plaques planes fixes inclinées d'un angle α par rapport à l'horizontale et espacées d'une distance h (selon Y). L'écoulement dû au poids du fluide est parallèle aux plaques de grande largeur L selon Z . L'axe X est pris sur la plaque inférieure dans le sens de l'écoulement. En utilisant les équations de Navier-Stokes :

- Trouver le profil des vitesses entre les plaques.
- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement.
- Déterminer le rapport de la vitesse débitante à la vitesse maximale.
- Déterminer les contraintes pariétales.
 On donne : $h = 3 \text{ mm}$; $L = 1 \text{ m}$;
 $\alpha = 30^\circ$; $\mu = 0.9 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$; $\rho = 800 \text{ Kg}/\text{m}^3$.
- Calculer le débit volumique passant entre les plaques.
- Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement.

Rép : 1) $u(y) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} \cdot y (h - y).$

2) $u_{max} = \frac{g h^2 \sin \alpha}{8\nu}.$

3) $\frac{\bar{u}}{u_{max}} = \frac{2}{3}.$

4) $\tau_{p1} = \frac{1}{2} \rho g h \sin \alpha$; $\tau_{p2} = -\frac{1}{2} \rho g h \sin \alpha.$

4) $Q_v = \frac{g L h^3 \sin \alpha}{12\nu} = 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}.$

5) $\Re_e = \frac{\bar{u} D_h}{\nu} = 17,7 \cdot 10^{-3}.$

D27 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales se dé-

plaçant dans des directions opposées à des vitesses constantes U_1 et U_2 . L'écoulement, initialement au repos, est parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xOz) . En utilisant les équations de Navier-Stokes, déterminer l'expression de la distribution de vitesse entre les plaques.

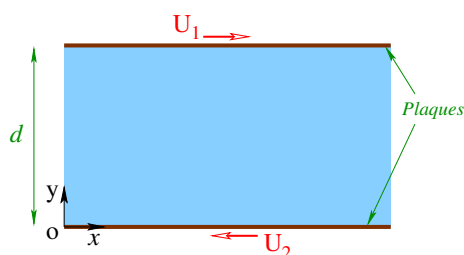


FIGURE 4.26: D27.

Rép : $u(y) = \frac{U_1+U_2}{d} y - U_2$.

D28 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales. La plaque inférieure se déplace avec une vitesse constante U_0 . L'écoulement, dû à un gradient de pression, est parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xOz) . A quelle position la vitesse atteint-elle sa valeur maximale si $K = 3$. K étant la constante de pression définie par :

$$K = -\frac{d^2}{2\mu U_0} \frac{dP}{dx}$$



FIGURE 4.27: D28.

Rép : $y = \frac{d}{3}$.

D29 : Considérons l'écoulement de Couette d'un fluide incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales. Le profil des vitesses est donné par :

$$u(y) = U_0 \left[-3 \left(\frac{y}{h} \right) \left(\frac{y}{h} - 1 \right) - \frac{y}{h} + 1 \right]$$

A quelle position la vitesse atteint-elle sa valeur maximale ? Tracer ce profil en considérant les valeurs adimensionnelles $\frac{u}{U_0}$ et $\frac{y}{h}$.

Rép : $y = \frac{h}{3}$; $U_{max} = \frac{4}{3} U_0$.

D30 : Un fluide incompressible s'écoule à travers une conduite de section rectangulaire de dimensions $2m$ selon Y et $1m$ selon Z . La vitesse selon X est donnée par l'équation :

$$u = 3y^2 + 5z$$

Déterminer la vitesse moyenne de cet écoulement.

Rép : $\bar{u} = 6,5 m/s$.

D31 : Considérons l'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales. Déterminer le rapport de la vitesse débitante à la vitesse maximale dans chacun des cas ci-dessous où le profil des vitesses est donné par :

1) $u(y) = k_1 y$.

2) $u(y) = k_2 y^2$.

3) $u(y) = k_3 (h y - y^2)$.

k_1, k_2, k_3 étant des constantes et h la distance entre les deux plaques.

Rép : 1) $\frac{1}{2}$. 2) $\frac{1}{3}$. 3) $\frac{2}{3}$.

D32 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales fixes. L'écoulement, dû à un gradient de pression $\frac{dP}{dx}$, est parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xOz) . Le même fluide est injecté à travers la plaque inférieure avec une vitesse uniforme v_0 perpendiculairement à la plaque. Le fluide est soutiré le long de la plaque supérieure avec la même vitesse uniforme v_0 perpendiculairement à cette dernière. On suppose que la composante transversale v_0 de la vitesse est uniforme dans tout l'écoulement. Le profil des vitesses de cet écoulement est donné par la relation :

$$u(y) = A \left[B y - \frac{1 - \exp(my)}{1 - \exp(mh)} \right]$$

On demande de déterminer les constantes A , B et m .

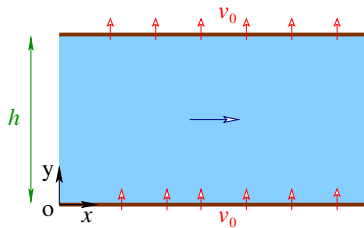


FIGURE 4.28: D32.

Rép : $A = -\frac{h\nu}{v_0\mu} \frac{dP}{dx}$. $B = \frac{1}{h}$. $m = \frac{v_0}{\nu}$.

D33 : Considérons un écoulement stationnaire à travers un tube horizontal de section elliptique donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Les lignes de courant sont parallèles à l'axe du tube. La composante axiale de la vitesse

est de la forme :

$$w_z = A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

Donner la relation entre le gradient de pression le long du tube et le débit volumique passant à travers la section de ce tube.

Rép : $\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{4\mu}{\pi ab} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) Q_v$.

D34 : Le champ de vitesses d'un écoulement stationnaire et incompressible est donné par :

$$u = -4xy ; v = 2(y^2 - x^2) ; w = 0$$

- 1- En utilisant les équations de Navier-Stokes, déterminer la distribution de pression résultante si l'axe Z est orienté vers le haut ($g_x = 0 ; g_y = 0 ; g_z = -g$).
- 2- Montrer qu'on peut obtenir le même résultat en montrant que l'écoulement est irrotationnel.

Rép : $P(x, y, z) = -2\rho(x^2 + y^2)^2 - \rho gz + C$.

D35 : On considère l'écoulement permanent d'un liquide incompressible homogène et visqueux dans une couronne comprise entre deux cylindres de révolution immobiles, infinis et coaxiaux de rayons respectifs R_1 pour le cylindre intérieur et R_2 pour le cylindre extérieur. Les deux cylindres étant disposés horizontalement et en supposant que l'écoulement est stationnaire et axis-symétrique :

- 1- Simplifier les équations ci-dessus dans ce cas d'écoulement en justifiant toutes vos réponses et écrire les conditions aux limites correspondantes.

2- La composante axiale du gradient de pression est maintenue constante et est notée P_z , trouver l'expression du profil des vitesses ainsi que le champ de pression (on prendra P_0 comme pression de référence).

3- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement et tracer le profil des vitesses.

4- Déterminer la vitesse débitante dans l'écoulement.

5- Déterminer la contrainte pariétale.

6- Déterminer la perte de charge linéaire sur une longueur L de la conduite.

7- Calculer le nombre de Reynolds et donner son interprétation physique.

Rép : 1).

D36 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide newtonien sur une plaque plane inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. A une distance h , une deuxième plaque se déplace en sens inverse avec une vitesse U_0 . Si cet écoulement est parallèle aux plaques de grandes étendues L dans le plan (xoz) , trouver la distribution de vitesse, la vitesse maximale, le débit véhiculé ainsi que les contraintes sur les plaques. On donne :

$$h = 6 \text{ mm} ; L = 1 \text{ m} ; g = 9,81 \text{ m/s}^2 ;$$

$$U_0 = 1 \text{ m/s} ; \mu = 0,08 \text{ N.s/m}^2 ;$$

$$\rho = 850 \text{ Kg/m}^3 ;$$

$$P_1 = 1,4 \text{ kPa} ; P_2 = 0,8 \text{ kPa}$$

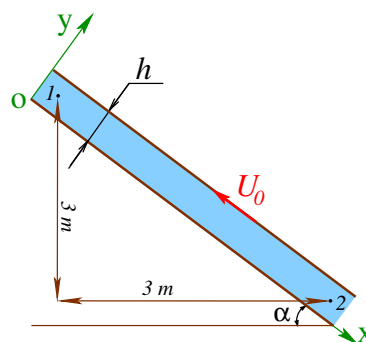


FIGURE 4.29: D36.

Rép : $u(y) = 393,08 y - 37735,2 y^2$;
 $U_{max} = 0,0236 \text{ m/s}$; $Q_v = 0,00436 \text{ m}^3/\text{s}$;
 $\tau_{p1} = -31,44 \text{ Pa}$; $\tau_{p2} = 4,78 \text{ Pa}$.

D37 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux entre deux plaques planes fixes disposées verticalement et espacées d'une distance $2h$. L'écoulement dû à un gradient de pression est parallèle aux plaques de grandes étendues L selon Z . On demande de déterminer l'expression du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante.

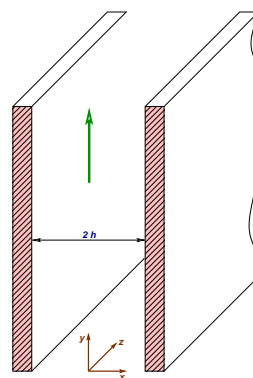


FIGURE 4.30: D37.

Rép : $\frac{dp}{dy} = -\rho g - \frac{3\mu}{h^2} \bar{v}$;

D38 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux de deux fluides newtoniens et immiscibles entre trois

plaques horizontales. La plaque supérieure est animée d'une vitesse constante U_0 , celle du milieu est libre et celle du bas est fixe. L'écoulement s'effectuant avec un gradient de pression étant parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xoz) . En négligeant les forces de pesanteur et en considérant la continuité des vitesses et des contraintes à l'interface, déterminer la vitesse U_p de la plaque libre.

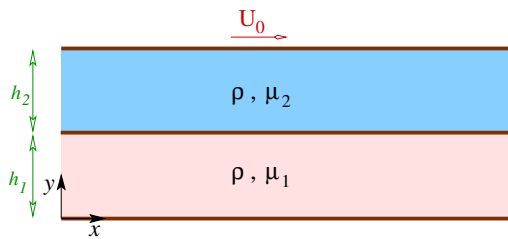


FIGURE 4.31: D38.

Rép :

$$U_p = \frac{h_1}{2(\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1)} \left[2\mu_2 U_0 - h_2 \left(h_1 \frac{dP_1}{dx} + h_2 \frac{dP_2}{dx} \right) \right]$$

D39 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide sur une plaque plane inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. L'écoulement est parallèle à cette plaque de grande étendue dans le plan (xoz) . On suppose que la distribution de température dans ce film est donnée par :

$$T(y) = T_0 + (T_p - T_0) \left(1 - \frac{y}{h} \right)$$

où T_0 et T_p sont respectivement les températures ambiante et celle de la plaque.

La variation de la viscosité en fonction de la température est décrite par l'expression :

$$\mu(T) = \frac{\mu_0}{1 + a(T - T_0)}$$

où a est une constante positive.

On demande de trouver le profil des vitesses.

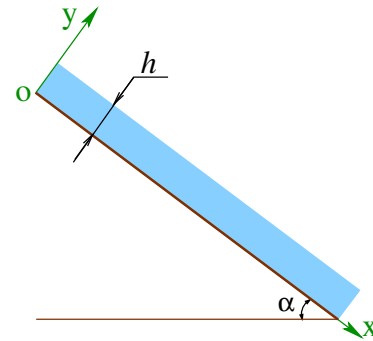


FIGURE 4.32: D39.

Rép :

$$u(y) = \frac{\rho g h \sin \alpha}{\mu_0} \left[y \left(1 - \frac{y}{2h} \right) + a(T_p - T_0) \left(1 - \frac{y}{h} + \frac{y^2}{3h^2} \right) y \right]$$

D40 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux d'un fluide sur une plaque plane inclinée. L'angle α se situe entre l'axe X qui est confondu avec cette plaque dans le sens de l'écoulement et la direction de la gravité. L'écoulement dû au poids du fluide, est parallèle à cette plaque de grande étendue L selon Z . L'épaisseur h du fluide au dessus de la plaque est supposée constante selon l'axe Y .

- 1- Faire le schéma de ce problème.
- 2- Ecrire les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible et visqueux sous forme compacte (vectorielle).
- 3- Définir chacun des termes présents dans cette équation.
- 4- Simplifier ces équations pour ce problème en justifiant toutes vos simplifications.
- 5- Trouver le profil des vitesses de cet écoulement.

6- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement.

7- Tracer le profil des vitesses au sein du fluide.

8- Trouver le débit volumique véhiculé.

9- Déterminer le rapport de la vitesse débitante à la vitesse maximale.

10- Déterminer le nombre de Reynolds de l'écoulement en négligeant h devant L .

11- Si le fluide est newtonien, déterminer l'état de contraintes au sein du fluide ainsi que la contrainte pariétale.

Rép : 5) $u(y) = \frac{g \cos \alpha}{2\nu} \cdot y (2h - y)$.

6) $u_{max} = \frac{gh^2 \cos \alpha}{2\nu}$.

8) $Q_v = \frac{Lgh^3 \cos \alpha}{3\nu}$.

9) $\frac{\bar{u}}{u_{max}} = \frac{2}{3}$.

10) $\Re_e = \frac{2gh^3 \cos \alpha}{3\nu^2} \cdot dd$

11) $\tau(y) = \rho g \cos \alpha (h - y)$.

$$\tau_p = \rho g h \cos \alpha.$$

D41 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux de deux fluides newtoniens et immiscibles sur une plaque plane inclinée d'un angle α . L'écoulement étant parallèle à cette plaque de grande étendue dans le plan (xoz) et s'effectue sans gradient de pression. Trouver la vitesse à l'interface des deux fluides en considérant la continuité des vitesses et des contraintes à cette l'interface.

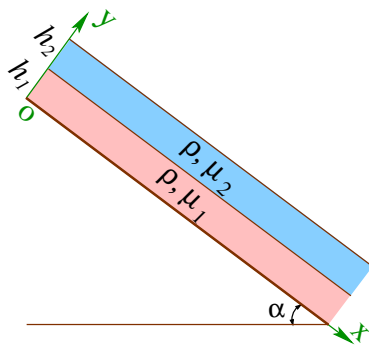


FIGURE 4.33: D41.

Rép : $U_i = \frac{h_1 g \sin \alpha (h_1 + 2h_2)}{2\nu_1}$.

D42 : Dans une conduite de rayon R en écoulement turbulent, le profil de vitesse u est donnée par la loi de puissance suivante:

$$\frac{u(r)}{U_{max}} = \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

où U_{max} est la vitesse maximale dans l'écoulement.

1- Déterminer le débit volumique.

2- Calculer le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse sur l'axe de la conduite.

Rép : 1) $Q_v = \frac{2}{3} \pi R^2 U_{max}$; 2) $\frac{\bar{u}}{U_{max}} = \frac{2}{3}$.

D43 : Dans une conduite de rayon R en écoulement turbulent, le profil de vitesse u est donnée par la loi suivante:

$$\frac{u(r)}{U_0} = 1 - \frac{r}{R}$$

où U_0 est une constante.

1- Déterminer le débit volumique.

2- Calculer le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse sur l'axe de la conduite.

Rép : 1) $Q_v = \frac{1}{3} \pi R^2 U_0$; 2) $\frac{\bar{u}}{U_{max}} = \frac{1}{3}$.

D44 : Calculer le débit volumique véhiculé par l'écoulement si le profil des vitesses est donnée par la loi suivante:

$$u(y) = y^{\frac{1}{3}}$$

On donne :

$$h = 1 \text{ m} ; L = 1,5 \text{ m} ; \alpha = 30^\circ .$$

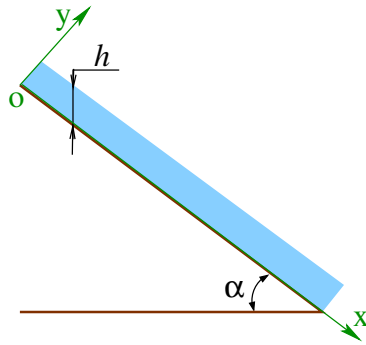


FIGURE 4.34: D44.

Rép : $Q_v = 0,9286 \text{ m}^3/\text{s}$.

D45 : Même problème que **D44** avec les données suivantes:

$$u(y) = 10 e^{y-1}$$

$$L = 2 \text{ m} .$$

Calculer les vitesse moyenne.

Rép : $Q_v = 10,1346 \text{ m}^3/\text{s}$; $\bar{u} = 4,388 \text{ m/s}$.

D46 : Même problème que **D45** mais avec $\alpha = 0^\circ$ et :

$$u(y) = U_{max} \left(\frac{y}{h} \right)^{\frac{1}{6}}$$

$$L = 1 \text{ m} ; h = 1,2 \text{ m} ; U_{max} = 3 \text{ m/s} .$$

Rép : $Q_v = 3,0857 \text{ m}^3/\text{s}$; $\bar{u} = 2,571 \text{ m/s}$.

D47 : Un fluide visqueux remplit l'espace entre deux plaques fixes inclinées d'un angle $\alpha = 30^\circ$. Si $P_A = 100 \text{ kPa}$, $P_B = 150 \text{ kPa}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ et que le fluide n'est pas accéléré que peut-on conclure ? Justifier.

- a- Le fluide descend.
- b- Le fluide monte.
- c- Pas d'écoulement.

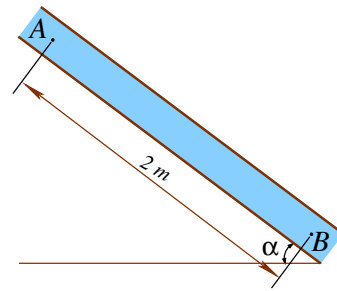


FIGURE 4.35: D47.

Rép : b.

D48 : Dans une application de Couette en de lubrification. Les deux plaques sont à des températures différentes et affectent la viscosité du fluide par l'expression :

$$\mu(y) = \mu_0 \exp \left(-\frac{y}{10h} \right)$$

où h est la distance entre les deux plaques.

Montrer que la contrainte τ peut se mettre sous la forme :

$$\tau = C \frac{U_0 \mu_0}{h}$$

où U_0 est la vitesse de la plaque mobile.

Cette contrainte est-elle supérieure ou inférieure à celle où la viscosité est uniforme ? justifier votre réponse.

Rép : $C = \frac{9}{10} e^{-\frac{1}{10}} = 0,8143$.

D49 : Même problème que D48 avec :

$$\mu(y) = \mu_0 \left(1 + \frac{y}{10h} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Rép : $C = \frac{23}{2\sqrt{110}} = 1,096$

D50 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide newtonien qui s'écoule librement sur une plaque plane verticale. Une autre plaque, située à la distance d se déplace avec une vitesse

U_0 constante. Les plaques ont une grande étendue L selon l'axe z et l'écoulement est parallèle à ses plaques. On demande de trouver :

- 1- Le profil des vitesses.
- 2- La vitesse maximale.
- 3- Le débit volumique.
- 4- La vitesse débitante.
- 5- Les contraintes pariétales.

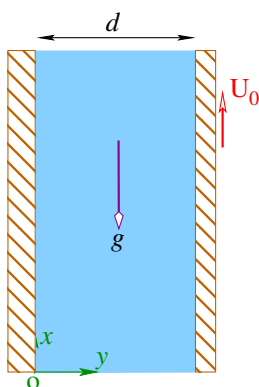


FIGURE 4.36: D50.

Rép : 1) $u(y) = \frac{U_0}{d}y - \frac{gd}{2\nu} \left(1 - \frac{y}{d}\right)y$.

2) $u_{max} = \frac{U_0}{2} - \frac{gd^2}{8\nu} - \frac{\nu U_0^2}{2gd^2}$.

3) $Q_v = \frac{Ld}{2} \left(U_0 - \frac{gd^2}{6\nu} \right)$.

4) $\bar{u} = \frac{U_0}{2} - \frac{gd^2}{12\nu}$.

5) $\tau_{pf} = \frac{\mu U_0}{d} - \frac{\rho g d}{2}$; $\tau_{pm} = \frac{\mu U_0}{d} + \frac{\rho g d}{2}$.

D51 : Dans une conduite de rayon R en écoulement laminaire, le profil de vitesse u est donnée par la loi suivante:

$$\frac{u(r)}{U_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

où U_{max} est la vitesse maximale dans l'écoulement.

- 1- Déterminer le débit volumique.
- 2- Calculer le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse maximale.

Rép : 1) $Q_v = \frac{1}{2} \pi R^2 U_{max}$; 2) $\frac{\bar{u}}{U_{max}} = \frac{1}{2}$.

D52 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide newtonien, incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales. La plaque supérieure se déplace avec une vitesse constante U_0 . L'écoulement, sans gradient de pression, est parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xOz) . Calculer la contrainte appliquée sur les deux parois.

On donne :

$h = 1,8 \text{ cm}$; $\mu = 0,44 \text{ kg/m.s}$;

$\rho = 888 \text{ kg/m}^3$; $U_0 = 4 \text{ m/s}$.

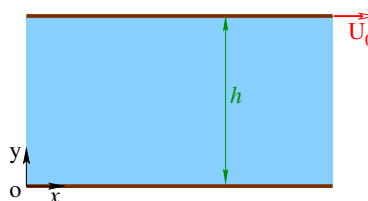


FIGURE 4.37: D52.

Rép : $\tau_p = 97,77 \text{ Pa}$.

D53 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales. La plaque inférieure se déplace dans le sens contraire au mouvement du fluide avec une vitesse constante U_0 . L'écoulement, dû à un gradient de pression, est parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xOz) . Calculer le gradient de pression qui permet d'avoir un débit volumique nulle.

On donne :

$h = 3 \text{ mm}$; $\mu = 4,7 \cdot 10^{-4} \text{ N.s/m}^2$;

$U_0 = 0,3 \text{ m/s}$.

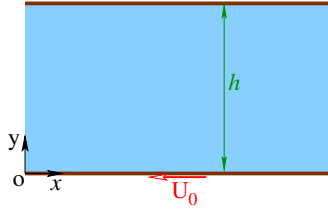


FIGURE 4.38: D53.

Rép : $\frac{dP}{dx} = -94 \text{ N/m}^3$.

D54 : On considère l'écoulement de Poiseuille stationnaire d'un fluide newtonien, incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales. L'écoulement, dû à un gradient de pression, est parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xOz) . L'axe X étant confondu avec la plaque inférieure, calculer le gradient de pression, la vitesse maximale, la contrainte pariétale, la force de traînée sur la plaque ainsi que le coefficient de frottement à la paroi.

On donne :

$$h = 1,5 \text{ mm} ; \mu = 101.10^{-5} \text{ kg/m.s} ;$$

$$\bar{u} = 2 \text{ m/s} .$$

Rép : $\frac{dP}{dx} = -10773,33 \text{ N/m}^3 ; U_{max} = 3 \text{ m/s} ;$

$$\tau_p = 8,08 \text{ N/m}^2 ; F_t = 1,8564.10^{-4} \text{ N} ;$$

$$C_f = 0,00405 .$$

D55 : On considère l'écoulement de Poiseuille stationnaire d'un fluide newtonien, incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales. L'écoulement, dû à un gradient de pression, est parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xOz) . L'axe

X étant au milieu des plaques, calculer le débit volumique, la contrainte pariétale ainsi que la force de traînée sur les plaques.

On donne :

$$h = 1,5 \text{ mm} ; \mu = 0,5 \text{ N.s/m}^2 ;$$

$$\frac{dP}{dx} = -1200 \text{ N/m}^3 ; L = 1 \text{ m} .$$

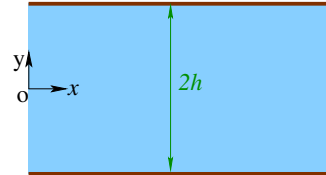


FIGURE 4.39: D55.

Rép : $Q_v = 5,4.10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} ;$

$$\tau_p = 1,8 \text{ N/m}^2 ; F_t = 1,66.10^{-3} \text{ N} .$$

D56 : De l'huile de viscosité dynamique $0,1 \text{ N.s/m}^2$ est utilisée dans le palier hydrodynamique de la figure. La profondeur du palier étant égale à $1,5 \text{ m}$, calculer la charge portante, la force de frottement ainsi que la puissance perdue.

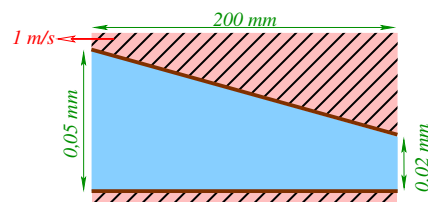


FIGURE 4.40: D56.

Rép : $F = 788,64 \text{ kN} ;$

$$F_f = 364,58 \text{ N} ; P = 364,58 \text{ W} .$$

Couches limites

5.1 Introduction

Avant 1860, l'intérêt technique de la mécanique des fluides était pratiquement limité à l'écoulement de l'eau. Le développement de l'industrie chimique pendant la dernière partie du XIXe siècle a porté l'attention sur d'autres liquides et sur les gaz. L'intérêt pour l'aérodynamique débuta avec les études de l'ingénieur en aéronautique allemand Otto Lilienthal à la fin du XIXe siècle ; on assista alors à des avancées majeures après le succès du premier vol motorisé, effectué par les inventeurs américains Orville et Wilbur Wright en 1903.

La complexité des écoulements visqueux, en particulier des écoulements turbulents, a longtemps limité les progrès en dynamique des fluides. En 1904, l'ingénieur allemand Ludwig Prandtl indiqua que l'écoulement des fluides visqueux présente deux zones principales. Une, proche de la surface, est constituée d'une fine couche et concentre les effets de la viscosité. Son traitement par un modèle mathématique peut être simplifié compte tenu de sa faible épaisseur. En dehors de cette couche frontière, les effets de la viscosité peuvent être négligés et des équations mathématiques plus simples, adaptées à l'absence de frottement, peuvent alors s'appliquer. La théorie des couches limites a permis de développer les ailes d'avions modernes, la conception des turbines à gaz et des compresseurs,...etc. Ce modèle des couches limites a non seulement permis de formuler plus simplement les équations de Navier-Stokes dans une zone proche de la surface du fluide, mais a également permis de développer la théorie de l'écoulement des fluides sans frottements. Les progrès récents de la mécanique des fluides doivent beaucoup à ce concept de couche limite.

5.2 Couches limites laminaires (CLL)

Les équations de la couche limite se déduisent des équations générales en écoulement laminaire (Navier-Stokes) écrites au chapitre précédent en négligeant certains termes devant d'autres par considération de leur ordre de grandeur.

L'une des propriétés des fluides visqueux Newtoniens ou non est d'imposer une condition d'adhérence à la surface d'une paroi solide. Ce ralentissement important n'occupe en réalité qu'une épaisseur réduite par rapport aux dimensions du corps en contact avec le fluide et, très rapidement, en s'éloignant de la paroi, on atteint des valeurs des vitesses égales ou comparables à celles obtenues en fluide parfait. Cette zone de fort gradient de vitesse est qualifiée de couche limite. Son épaisseur δ varie continûment depuis le point d'arrêt A (Fig.5.1) et son régime d'écoulement passe du laminaire au turbulent par un régime dit de *transition*. La couche limite se sépare ensuite du corps solide vers le bord de fuite en formant, en aval de celui-ci, un sillage généralement très turbulent qui se dissipe dans l'écoulement principal.

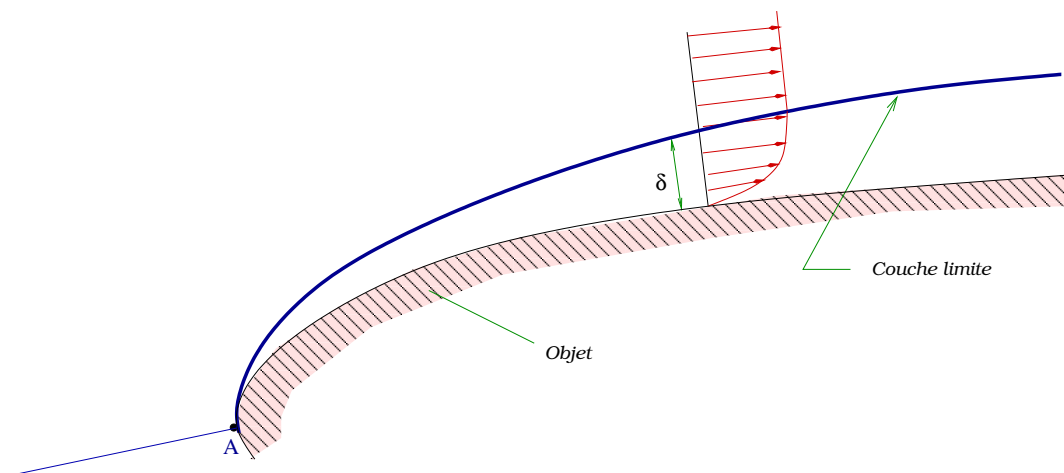


FIGURE 5.1: *Définition de la couche limite.*

En dehors de la couche limite, l'écoulement est pratiquement non visqueux puisque les gradients de vitesse sont relativement faibles.

5.2.1 Equations régissant la couche limite laminaire

En s'imposant un repère local dont l'axe OX est tangent à la paroi et l'axe OY est normal et dirigé vers l'extérieur, les équations bidimensionnelles d'un écoulement incompressible et stationnaire s'écrivent en négligeant les forces de volume et en supposant un grand rayon de courbure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Nous allons définir un certain nombre de références permettant d'adimensionnaliser les variables.

- U_e : vitesse de référence (par exemple la vitesse à l'extérieur de la couche limite suivant X);
- L : longueur caractéristique dans la direction X ;
- δ : longueur caractéristique dans la direction Y ($\delta/L \ll 1$)
- $U_e \delta/L$: vitesse de référence dans la direction Y ;
- ρU_e^2 : pression de référence.

Il est alors possible de déterminer l'ordre de grandeur de chacun des termes des équations (5.1).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U_e}{L} \quad \frac{U_e \delta}{L \delta} = \frac{U_e}{L}$$

donc les deux termes subsisteront puisqu'ils ont le même ordre de grandeur.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \cancel{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$U_e \frac{U_e}{L} = \frac{U_e^2}{L} \quad \frac{U_e \delta}{L} \frac{U_e}{\delta} = \frac{U_e^2}{L} \quad \frac{U_e^2}{L} \quad \nu \frac{U_e}{L^2} \ll \nu \frac{U_e}{\delta^2}$$

$$\cancel{u \frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v \frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \cancel{\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$U_e \frac{U_e \delta}{L^2} = \frac{U_e^2 \delta}{L^2} \ll \frac{U_e^2}{\delta} \quad \frac{U_e \delta}{L} \frac{U_e \delta}{L \delta} = \frac{U_e^2 \delta}{L^2} \ll \frac{U_e^2}{\delta} \quad \frac{U_e^2}{\delta} \quad \nu \frac{U_e \delta}{L^3} \ll \nu \frac{U_e}{L \delta}$$

Cette première simplification nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{array} \right.$$

Effectuons maintenant le rapport entre les termes de pression et les termes visqueux successivement pour les deux dernières équations :

$$\frac{U_e^2}{L} \frac{\delta^2}{\nu U_e} = \frac{U_e L}{\nu} \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 = R_e \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \rightarrow 1 \Rightarrow \text{même ordre de grandeur.}$$

$\frac{U_e^2}{\delta} \frac{L\delta}{\nu U_e} = \frac{U_e L}{\nu} = R_e \gg 1 \Rightarrow$ le terme visqueux est négligeable devant le terme de pression.

Compte tenu de ces simplifications, on obtient les équations de Prandtl de la CLL bidimensionnelle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

La dernière équation de (5.2) indique que la couche limite transmet intégralement à la paroi la pression existant à la périphérie de la couche à la même abscisse.

$$p(y=0) = p(y=\delta)$$

- Remarque :

En présence d'une forte courbure de rayon R_c , on utilisera pour cette dernière équation la relation :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{U_e^2}{R_c} \quad (5.3)$$

- Autre expression :

À la périphérie de la couche limite l'écoulement est pratiquement non visqueux et peut se calculer selon la théorie potentielle. Selon le théorème de Bernoulli, la vitesse à la limite $U_e(x)$ est liée à la pression $p_e(x)$ par la relation :

$$p_e(x) + \frac{1}{2} \rho U_e^2(x) = C^{te} \quad (5.4)$$

Sachant que p_e ne dépend pas de y , on peut écrire :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp_e(x)}{dx} = U_e \frac{dU_e(x)}{dx} \quad (5.5)$$

d'où l'expression finale :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (5.6)$$

où U_e est une fonction de x décrite par la théorie potentielle (Ch.3).

- Conditions aux limites :

- A la paroi : $y = 0, \quad u = v = 0.$
- A la surface de la couche limite : $y = \delta(x), \quad u = U_e(x).$

5.2.2 Paramètres caractéristiques de la couche limite

Pour étudier et modéliser la couche limite on utilise, en plus de l'épaisseur δ de la couche limite, les épaisseurs δ_1 de déplacement et δ_2 de quantité de mouvement.

5.2.2.1 Epaisseur de déplacement

Elle correspond au déficit de débit lié à la présence de la couche limite (Fig.5.2).

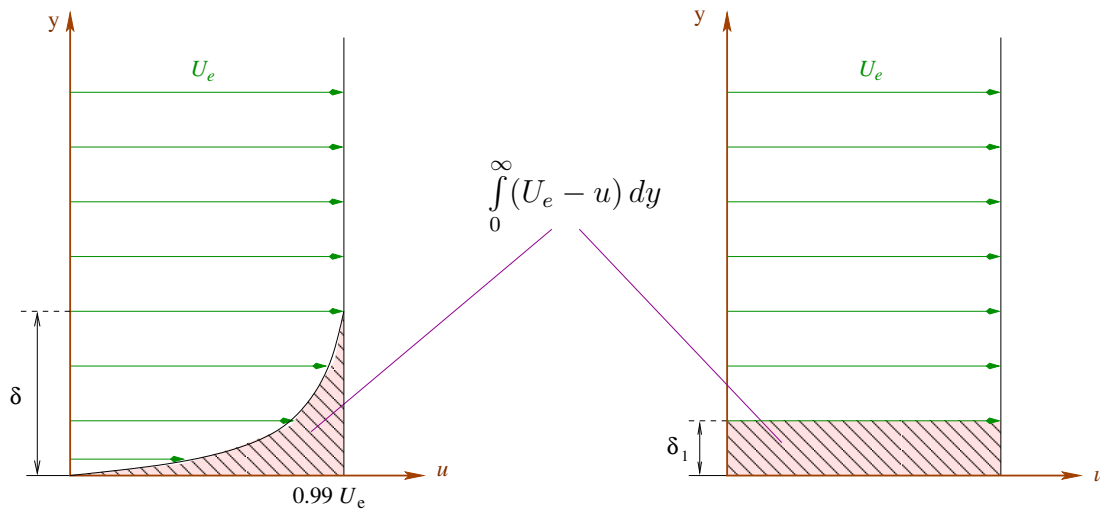


FIGURE 5.2: *Perte de débit liée à la présence de la couche limite.*

On écrit, par définition :

$$\delta_1 U_e = \int_0^{\infty} (U_e - u) dy \quad (5.7)$$

Comme u ne varie pratiquement plus à partir de δ , l'équation (5.7) permet de calculer δ_1 :

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (5.8)$$

δ_1 est aussi appelée : *épaisseur de perte de débit*.

Une autre interprétation plus réelle stipule que l'épaisseur de déplacement est la distance avec laquelle s'est déplacée une ligne de courant de l'écoulement extérieur à cause de la présence de la couche limite qui fait obstruction partielle à l'écoulement libre (Fig.5.3).

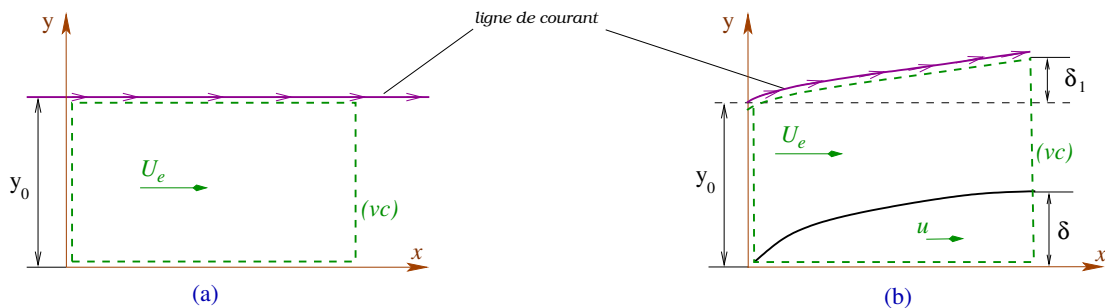


FIGURE 5.3: *Déviation de la ligne de courant liée à la présence de la couche limite.*

En fluide parfait (Fig.5.3(a)), la conservation du débit volumique par unité de profondeur nous donne :

$$Q_v = \int_0^{y_0} U_e dy = U_e y_0$$

En fluide réel (Fig.5.3(b)), cette conservation nous donne :

$$Q_v = \int_0^{\delta} u dy + \int_{\delta}^{y_0+\delta_1} U_e dy = \int_0^{\delta} u dy + U_e (y_0 + \delta_1 - \delta)$$

$$\Leftrightarrow U_e y_0 = \int_0^{\delta} u dy + U_e y_0 + U_e \delta_1 - U_e \delta = \int_0^{\delta} (u - U_e) dy + U_e y_0 + U_e \delta_1$$

et en éliminant $U_e y_0$ puis en divisant par U_e nous aurons l'épaisseur de déplacement δ_1 exactement comme établie en (5.8).

5.2.2.2 Épaisseur de quantité de mouvement

On définit de la même façon l'épaisseur δ_2 correspondant au déficit de quantité de mouvement (Fig.5.4).

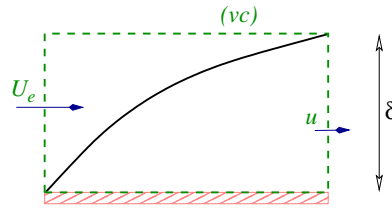


FIGURE 5.4: *Quantité de mouvement liée à la présence de la couche limite.*

La différence de quantité de mouvement entre l'entrée et la sortie est :

$$\Delta I_v = \int_0^{\delta} \rho U_e u \, dy - \int_0^{\delta} \rho u^2 \, dy = \int_0^{\delta} \rho u (U_e - u) \, dy = \rho U_e^2 \delta_2$$

d'où la valeur de l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 :

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy \quad (5.9)$$

On observe toujours l'inégalité :

$$\delta > \delta_1 > \delta_2 \quad (5.10)$$

5.2.2.3 Facteur de forme

On définit aussi le paramètre ou *facteur de forme* H par :

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (5.11)$$

Ce paramètre caractérise la forme du profil de vitesse dans la couche limite. Il prend des valeurs différentes selon la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement dans la couche limite. Pour une CLL sur une plaque plane, il passe pratiquement du double au simple : d'environ 2,6 pour la CLL à 1,3 pour la CLT. Le facteur de forme est également influencé par le gradient longitudinal de pression. En présence d'un gradient adverse ($\frac{dp}{dx} > 0$), il permet de caractériser l'apparition du décollement qui correspond à une valeur de H d'environ 3,5 à 4 (critère de décollement fondé sur H).

5.2.3 Solution exacte des équations de la CLL

5.2.3.1 Cas de la plaque plane

Soit un écoulement horizontal de vitesse constante U_e sur une plaque plane très mince (Fig.5.5) avec un gradient de pression nul :

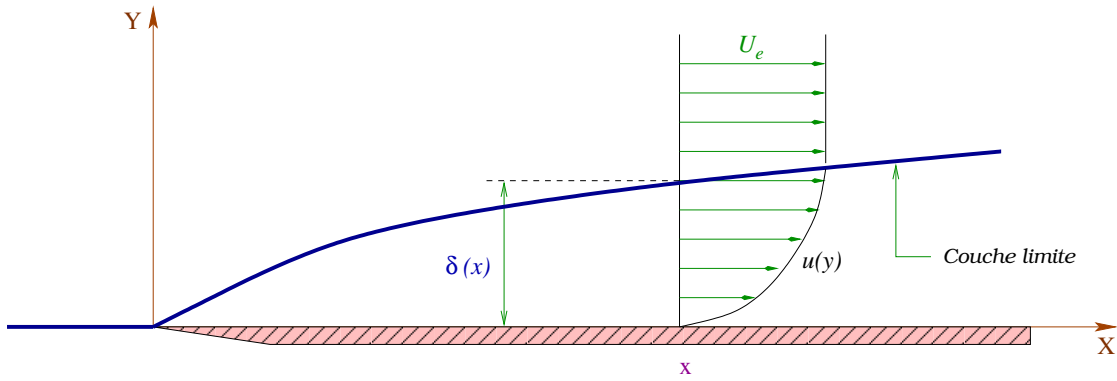


FIGURE 5.5: *Couche limite sur une plaque plane.*

Ce problème est régi par les équations et les (C.L) suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad \text{avec (C.L)} \begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \\ u(x, \infty) = U_e \end{cases} \quad (5.12)$$

Il est commode d'introduire la fonction de courant ψ telle que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

L'équation de continuité est automatiquement satisfaite et le système (5.12) se transforme en (5.13) :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad \text{avec (C.L)} \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0) = 0 \Leftrightarrow \psi(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \infty) = U_e \end{cases} \quad (5.13)$$

la 2^{ème} (C.L) s'écrit : $\int_0^x \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0) dx = \psi(x, 0) - \psi(0, 0)$ et on choisi $\psi(0, 0) = 0$ car ψ est définie à une constante près.

Recherche de solutions auto-semblables pour les profils de vitesse : c-à-d, on se demande si les profils de vitesse ne deviennent pas identiques lorsqu'on rapporte l'ordonnée à l'épaisseur de la couche limite. On cherche donc s'il est possible d'écrire :

$$\frac{u}{U_e} = \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right) = \Phi(\eta) \quad (5.14)$$

où Φ sera la même fonction universelle pour tout x (c-à-d indépendante de x).

L'analyse dimensionnelle nous donne : $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$ et on peut donc utiliser comme variable de similitude :

$$\eta = \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \cdot y \quad (5.15)$$

$$u = U_e \Phi(\eta) \implies \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_e \Phi(\eta) \implies \psi = U_e \int \Phi(\eta) dy = U_e \delta f(\eta) \text{ où } (f'(\eta) = \Phi(\eta)).$$

En définitive, la recherche de profils de similitude revient donc à chercher ψ sous la forme :

$$\psi(x, y) = \sqrt{U_e \nu x} \cdot f(\eta) \text{ avec } \eta = \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \cdot y \quad (5.16)$$

En remplaçant (5.16) dans (5.13) et en effectuant toutes les dérivées partielles, on aura une équation différentielle ordinaire non-linéaire du 3^{ème} degré (5.17) appelée : *équation de Blasius*.

$$2 f'''(\eta) + f(\eta) f''(\eta) = 0 \text{ avec } (C.L) \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(\infty) = 1 \end{cases} \quad (5.17)$$

La variable x a totalement disparue de cette équation confirmant ainsi l'existence de solutions auto-semblables de type (5.16). La similitude des profils de vitesse est une propriété remarquable puisqu'une fonction unique détermine la forme de tous les profils.

Le champ de vitesse est donné par :

$$\begin{cases} u(x, y) = U_e f'(\eta) \\ v(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_e}{x}} \cdot (\eta f'(\eta) - f(\eta)) \end{cases} \quad (5.18)$$

La résolution de l'équation de *Blasius* peut être obtenue par la "méthode de tir" ou "shooting method" utilisant la méthode de *Runge-Kutta*. La distribution de vitesse dans la CLL est ainsi représentée (Fig.5.6).

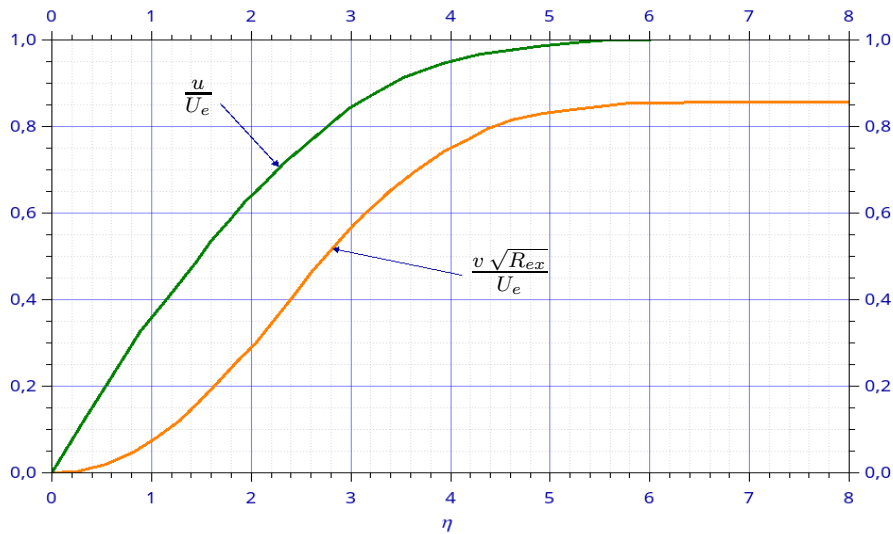


FIGURE 5.6: *Distribution de vitesse dans la CLL sur une plaque plane [11].*

D'après cette figure, on remarque que la composante v de la vitesse n'atteint pas la valeur nulle à l'extérieur de la couche limite mais une valeur donnée par :

$$\frac{v}{U_e} = 0,865 \sqrt{\frac{\nu}{U_e x}} = \frac{0,865}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (5.19)$$

où :

$$\Re_{ex} = \frac{U_e x}{\nu} \quad (5.20)$$

est le *nombre de Reynolds local* basé sur la distance à la paroi à partir du bord d'attaque de la plaque.

Ceci est dû à l'effet du déplacement de la couche limite, l'écoulement extérieur dévie de la surface autant que cette dernière devient plus épaisse. Les mesures de la distribution de vitesse à l'intérieur de la couche limite sans gradient de pression montrent un excellent accord avec les prédictions de l'équation de *Blasius*.

- Epaisseur de la couche limite : Cette dernière ne peut être définie uniquement à cause de l'influence de la viscosité qui décroît asymptotiquement avec la distance à la surface de la plaque. Elle est définie par la valeur de y pour laquelle $\frac{u}{U_e} = 0,99$. Ceci correspond donc d'après (Fig.5.6) à $\eta \simeq 5$, d'où :

$$\delta(x) = \frac{5x}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (5.21)$$

Les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement sont données successi-

vement par les relations (5.22) et (5.23) ci-dessous :

$$\delta_1(x) = \frac{1,721 x}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (5.22)$$

$$\delta_2(x) = \frac{0,664 x}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (5.23)$$

- **Coefficient de frottement à la paroi** : La contrainte de cisaillement locale à la surface de la plaque dépend seulement de x , elle est donnée par :

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} f''(0) = 0,332 \mu U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \quad (5.24)$$

Le coefficient de frottement à la paroi est donnée par :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} = \frac{0,664}{\sqrt{\Re_{ex}}} = \frac{1,328}{\sqrt{\Re_{eL}}} \quad (5.25)$$

où \Re_{eL} est le nombre de *Reynolds* basé sur la longueur de la plaque.

- **Remarque** :

Si la distance x augmente alors l'épaisseur δ de la couche limite augmente aussi mais à partir d'un certain \Re_{ex} , l'écoulement dans la couche limite devient transitoire puis turbulent et les relations proposées ci-dessus ne seront plus applicables.

Le tableau (Tab.5.1) ci-dessous nous donne une idée sur les épaisseurs de la couche limite dans les cas de l'eau et de l'air :

δ (mm)	$U_e = 1 \text{ m/s}$	$U_e = 3 \text{ m/s}$	$U_e = 10 \text{ m/s}$
Air	19	/	6
Eau	5	2,9	/

TABLE 5.1: *Épaisseurs de la couche limite laminaire sur une plaque plane.*

- Exemple d'application :

Calculer les épaisseurs de la couche limite, de déplacement et de quantité de mouvement en bout d'une plaque de longueur 2 m placée dans un écoulement de vitesse uniforme de 20 m/s d'un fluide de viscosité cinématique $1,4 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$.

Calculons d'abord le nombre de Reynolds local en bout de plaque :

$$\Re_{eL} = \frac{U_e L}{\nu} = 2857143.$$

Passons maintenant au calcul des épaisseurs :

Épaisseur de la couche limite : $\delta(L) = \frac{5L}{\sqrt{\Re_{eL}}} = 0,0059$ soit $5,9\text{ mm}$.

Épaisseur de déplacement : $\delta_1(L) = \frac{1,721L}{\sqrt{\Re_{eL}}} = 0,00203$ soit environ $2,0\text{ mm}$.

Épaisseur de quantité de mouvement : $\delta_2(L) = \frac{0,664L}{\sqrt{\Re_{eL}}} = 0,00078$ soit environ $0,8\text{ mm}$.

5.2.3.2 Cas général

La méthode décrite précédemment nécessite la connaissance de l'écoulement potentiel $U_e(x)$ au voisinage d'une paroi pour donner un ordre de grandeur au terme $U_e \frac{dU_e}{dx}$ qui figure dans les équations de *Prandtl*.

Falkner et *Skan* ont étendu la méthode précédente au cas général :

$$U_e(x) = q_0 x^m \quad (5.26)$$

La relation (5.26) correspond à l'écoulement potentiel sur un dièdre pour lequel l'axe ox est confondu avec la face étudiée (Fig.5.7).

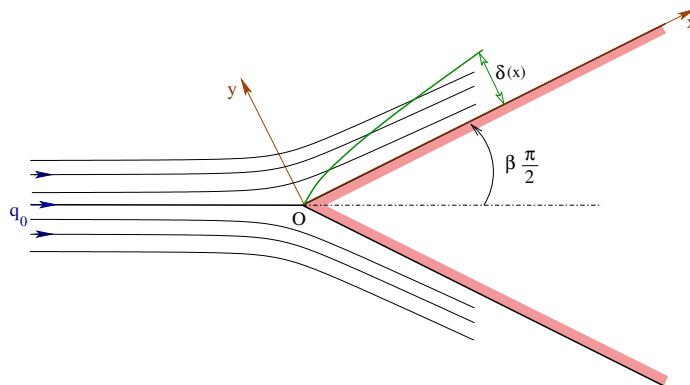


FIGURE 5.7: *Écoulement autour d'un dièdre.*

La fonction potentielle complexe correspondant à cet écoulement est donnée par :

$$F(z) = q_0 \frac{z^{m+1}}{m+1} \quad (5.27)$$

Comme $F(z) = \phi + i\psi$ alors on en déduit la fonction ψ :

$$\psi = \frac{q_0}{m+1} r^{m+1} \sin(m+1)\theta \quad (5.28)$$

La forme du solide correspondant à $\psi = 0$ est donnée pour $\theta_0 = \frac{m\pi}{m+1}$. En remarquant que θ_0 est identique à $\beta \frac{\pi}{2}$, on en déduit :

$$\beta = \frac{2m}{m+1} \quad (5.29)$$

1. $m = 0$ et $\beta = 0$: ceci correspond à la plaque dans la direction de l'écoulement (Fig.(a)).
2. $m = 1$ et $\beta = 1$: ceci correspond à la plaque dans la direction perpendiculaire à l'écoulement (Fig.(b)).
3. $m > 0$ et $\beta > 0$: ceci correspond à une accélération de l'écoulement en fonction de x et à un gradient de pression négatif.
4. $m < 0$ et $\beta < 0$: ceci correspond à une décélération de l'écoulement en fonction de x et à un gradient de pression positif. Lorsque ce dernier atteint une valeur suffisante, la couche limite décolle de la paroi.

L'équation de *Falkner* et *Skan* s'écrit de la manière suivante :

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f' + m(1-f') = 0 \quad \text{avec} \quad (C.L) \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(\infty) = 1 \end{cases} \quad (5.30)$$

Si $m = 0$ dans l'équation (5.30), on obtient alors l'équation de Blasius (5.17).

- Remarque :

Il existe d'autres méthodes donnant la solution approximative des équations de la CLL telles que la méthode des équations intégrales de *Karman-Pohlhausen* ainsi que celle des *développement asymptotiques*.

5.2.3.3 Evolution de la CLL à la surface d'une forme quelconque

Si l'écoulement potentiel n'est pas de la forme (5.26), on qualifie la CLL de non-autosimilaire. C'est le cas par exemple des profils aérodynamiques. La méthode la plus sommaire consiste à remplacer les résultats obtenus aux différents abscisses curvilignes par ceux obtenus pour la plaque plane aux mêmes abscisses linéaires pour la même valeur de m .

5.2.4 Equation intégrale de Von-Karman

Dans le cas où l'on désire appliquer les équations de la CLL pour le calcul de l'écoulement, les difficultés rencontrées en essayant de trouver la solution exacte sont plus grandes que la solution complète est souvent non évaluée. Les solutions exactes ont été obtenues pour un certain nombre de cas pour lesquels la distribution de pression peut être exprimée par une forme algébrique simple, tel que pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire. La solution exacte des équations de CLL pour le cas où $\frac{dp}{dx} \neq 0$ est discuté dans la référence [30]. D'une façon générale, un calcul approximatif peut être entrepris en utilisant les formes intégrales des équations de la CLL.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad avec (C.L) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \\ u(x, \delta(x)) = U_e(x) \end{array} \right. \quad (5.31)$$

Commençons par intégrer la première équation :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + [v(x, \delta) - v(x, 0)] = \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + [v_e - 0] = 0$$

$$\Rightarrow v_e = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Intégrons maintenant la deuxième équation :

$$\begin{aligned} \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta v \frac{\partial u}{\partial y} dy &= \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy + \nu \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \\ \Rightarrow \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy + u v \Big|_0^\delta - \int_0^\delta u \frac{\partial v}{\partial y} dy &= \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^\delta \end{aligned}$$

en multipliant la 1^{ère} équation par u on aura : $\int_0^\delta u \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy$ et en remplaçant :

$$\Rightarrow \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy - U_e \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$\Rightarrow U_e \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy - 2 \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy = \frac{\tau_p}{\rho}$$

$$\Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial(uU_e)}{\partial x} dy - \int_0^\delta u \frac{dU_e}{dx} dy - \int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy + \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy = \frac{\tau_p}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\delta} \frac{d}{dx} [u (U_e - u)] dy + \int_0^{\delta} (U_e - u) \frac{dU_e}{dx} dy &= \frac{\tau_p}{\rho} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u (U_e - u) dy + \frac{dU_e}{dx} \int_0^{\delta} (U_e - u) dy &= \frac{\tau_p}{\rho} \end{aligned}$$

En introduisant les relations (5.8) et (5.9), nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (U_e^2 \delta_2) + U_e \frac{dU_e}{dx} \delta_1 &= \frac{\tau_p}{\rho} \\ \Rightarrow U_e^2 \frac{d\delta_2}{dx} + 2 U_e \frac{dU_e}{dx} \delta_2 + U_e \frac{dU_e}{dx} \delta_1 &= \frac{\tau_p}{\rho} \end{aligned}$$

soit finalement en divisant par U_e^2 :

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (\delta_1 + 2\delta_2) \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} \quad (5.32)$$

et en introduisant le coefficient de frottement à la paroi C_f ainsi que le facteur de forme H , l'équation (5.32) devient :

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (H + 2) \frac{\delta_2}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{C_f}{2} \quad (5.33)$$

L'équation de *Von-Karman* (5.33) relie les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement à la vitesse extérieure et au coefficient de frottement local. Elle est applicable à des couches limites incompressibles soumises ou non à un gradient de pression. L'écoulement dans la couche limite peut être laminaire ou turbulent. L'augmentation de δ_2 résulte d'une part de la contrainte de cisaillement à la paroi. D'autre part, si l'écoulement à l'extérieur de la couche limite est accéléré, c-à-d $\frac{dU_e}{dx} > 0$, l'augmentation de δ_2 est défavorisée ; par contre, si $\frac{dU_e}{dx} < 0$, l'augmentation de δ_2 est favorisée. Si la décélération est suffisamment forte, la couche limite se détache de la paroi ($\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$). Une autre méthode qui permet d'aboutir à l'équation de *Von-Karman* est donnée en Annexe (C).

- Cas d'un gradient de pression nul :

L'équation de *Von-Karman* (5.32) se réduit dans le cas où $\frac{dp}{dx} = 0$ à l'expression :

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} \quad (5.34)$$

- Remarque :

La vitesse de l'écoulement extérieur doit être déterminée au préalable avant de pouvoir appliquer la relation (5.33). Et puisqu'elle est reliée au gradient de pression par la relation (5.5), sa détermination revient donc à connaître le gradient de pression.

5.2.5 Analyse de la CLL par la méthode de Karman-Pohlhausen

Une approche alternative à la résolution des équations de la CLL est l'utilisation de solutions approchées. La méthode approximative de *Karman-Pohlhausen* donne d'une manière plus simple des résultats très proches des solutions exactes. De cette manière, la plupart des propriétés importantes de l'écoulement dans la couche limite seront définies. Nous allons donc appliquer cette méthode dans le cas d'une CLL sur une plaque plane en l'absence de gradient de pression et nous utiliserons alors l'équation (5.34). Considérons par exemple une distribution polynomiale du profil de vitesse telle que :

$$\frac{u}{U_e} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad (5.35)$$

Les quatre coefficients $a_0 \dots a_3$ doivent satisfaire les conditions aux limites suivantes :

- vitesse nulle à la paroi ;
- vitesse à la périphérie de la couche limite égale à celle de l'écoulement potentiel ;
- contrainte nulle à la périphérie de la couche limite.

La condition sur la vitesse transversale $v(x, 0) = 0$ ne peut être exploitée directement et il faudra une quatrième condition pour déterminer ces coefficients. Cette condition est obtenue par application de l'équation de quantité de mouvement au niveau de la parois ($y = 0$) :

$$\cancel{u(x, 0)} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} + \cancel{v(x, 0)} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial y^2} \implies \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial y^2} = 0$$

d'où les quatre conditions :

$$(C.L) \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = 0 \\ u(x, \delta(x)) = U_e(x) \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0 \end{array} \right. \quad (5.36)$$

La résolution de ce système d'équations nous donne : $a_0 = 0$; $a_1 = \frac{3}{2}$; $a_2 = 0$; $a_3 = -\frac{1}{2}$.

Le profil approximatif de la vitesse est donc :

$$\frac{u}{U_e} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad (5.37)$$

Calculons maintenant les propriétés de la couche limite :

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = \int_0^\delta \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy = \frac{3}{8} \delta.$$

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = \int_0^\delta \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy = \frac{39}{280} \delta.$$

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_e}{\delta} = \frac{3}{2} \rho \frac{\nu U_e}{\delta} \Rightarrow \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} = \frac{3}{2} \frac{\nu}{U_e \delta}$$

En remplaçant dans l'équation de Von-Karman sans gradient de pression (5.34), on aura :

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} \iff \frac{d}{dx} \left(\frac{39}{280} \delta \right) = \frac{3}{2} \frac{\nu}{U_e \delta} \Rightarrow \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{U_e \delta}$$

En séparant les variables et en intégrant, on aura : $\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\nu x}{U_e} + C$.

Comme l'épaisseur de la couche limite est nulle au bord d'attaque ($\delta(x=0) = 0$) alors la solution devient :

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\nu x}{U_e} \implies \delta = 4,641 \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$$

et en introduisant le nombre de Reynolds local (5.20) :

$$\delta = \frac{4,641 x}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (5.38)$$

En remplaçant dans les équations obtenues ci-dessus, on aura finalement :

$$\delta_1 = \frac{1,740 x}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (5.39)$$

$$\delta_2 = \frac{0,646 x}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (5.40)$$

$$C_f = \frac{0,646}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (5.41)$$

$$\frac{\tau_p}{\rho U_e^2} = \frac{0,323}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (5.42)$$

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} = 2,692 \quad (5.43)$$

Ces résultats, bien que approchés, sont comparables à ceux de la solution exacte de l'équation de Blasius (5.21 à 5.25).

A l'aide de cette méthode, nous pouvons donc obtenir une bonne approximation des caractéristiques de l'écoulement dans la couche limite sans avoir à déterminer d'une façon exacte la forme du profil de vitesse.

- Exercice :

Retrouver les valeurs du tableau (5.3) qui donne les solutions approchées de quelques profils de vitesse. Le tableau (5.2) ci-dessous vous permettra de vérifier les solutions intermédiaires.

Profil de vitesse	$\frac{\delta_1}{\delta}$	$\frac{\delta_2}{\delta}$	$\frac{\tau_p}{\rho U_e^2}$
$\frac{y}{\delta}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{\nu}{\delta U_e}$
$2 \left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2\nu}{\delta U_e}$
$2 \left(\frac{y}{\delta}\right) - 2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$	$\frac{3}{10}$	$\frac{37}{315}$	$\frac{2\nu}{\delta U_e}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta}\right)$	$1 - \frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2} \frac{\nu}{\delta U_e}$

TABLE 5.2: *Valeurs intermédiaires pour le tableau (5.3).*

Le tableau (5.3) ci-dessous donne les solutions approchées de quelques profils de vitesse, choisis arbitrairement, en les comparant avec la solution exacte de Blasius.

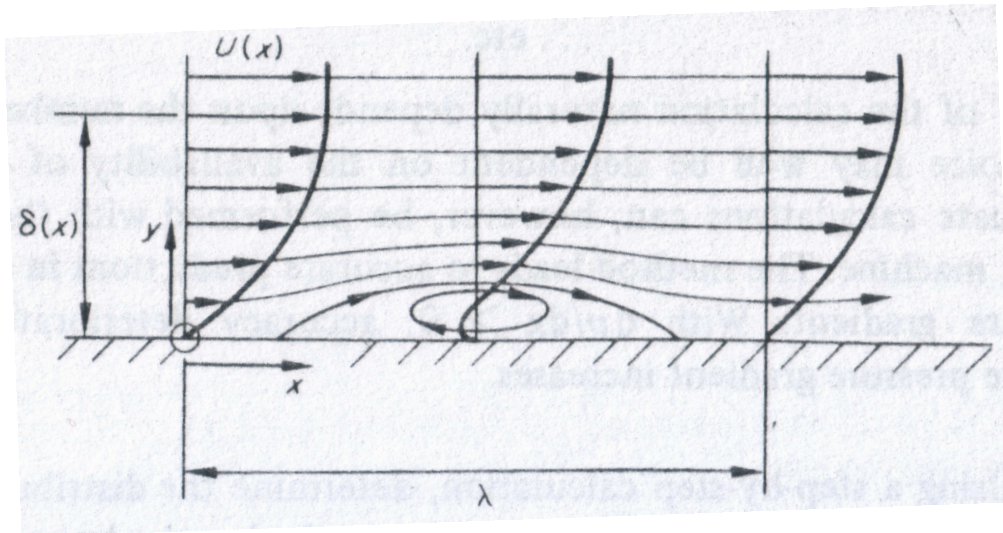
Profil de vitesse	$\frac{\delta}{x} \sqrt{\mathcal{R}_{ex}}$	$\frac{\delta_1}{x} \sqrt{\mathcal{R}_{ex}}$	$\frac{\delta_2}{x} \sqrt{\mathcal{R}_{ex}}$	$\frac{\tau_p}{\rho U_e^2} \sqrt{\mathcal{R}_{ex}}$	H
Blasius (exacte)	5	1,721	0,664	0,332	2,592
$\frac{y}{\delta}$	3,464	1,732	0,577	0,288	3,000
$2 \left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	5,477	1,826	0,730	0,365	2,500
$\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$	4,641	1,740	0,646	0,323	2,692
$2 \left(\frac{y}{\delta}\right) - 2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$	5,835	1,751	0,685	0,343	2,554
$\sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta}\right)$	4,795	1,742	0,655	0,327	2,660

TABLE 5.3: *Solutions approchées de quelques profils de vitesse.*

On constate, en premier lieu, que malgré sa simplicité, le profil linéaire donne des résultats qui ne sont pas loin de ceux de Blasius. Aussi, on remarque que le profil polynomial du 3^{ème} ordre ainsi que le profil sinusoïdal donnent les meilleurs résultats par rapport aux autres profils.

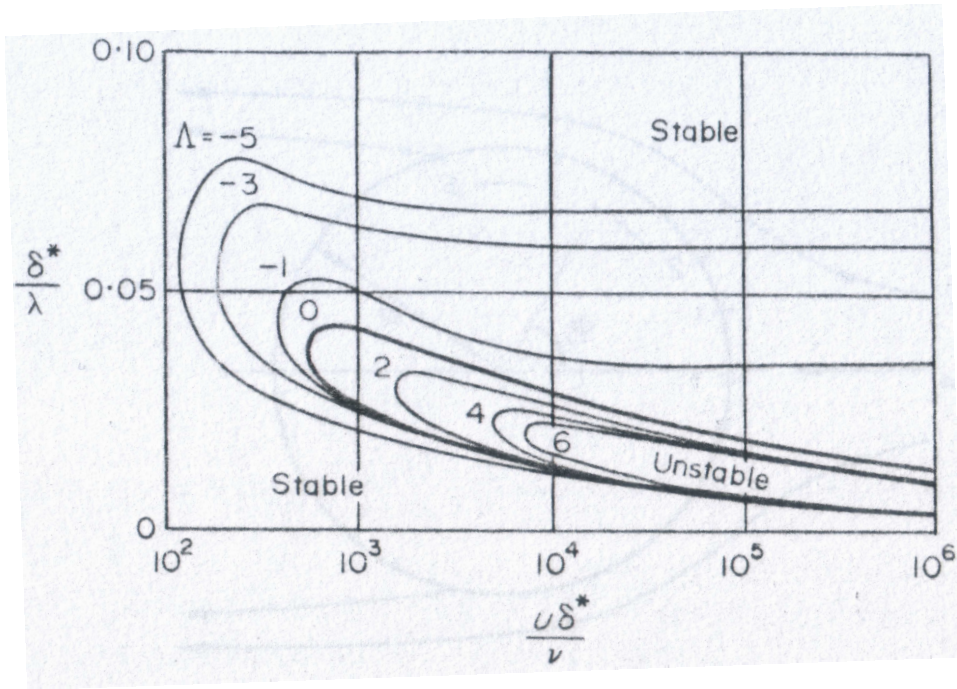
5.2.6 Stabilité de la couche limite laminaire

La dégénérescence éventuelle de l'écoulement laminaire initial dans la couche limite pour former la couche turbulente qui est observée à des nombres de Reynolds élevés est associée aux stabilités qui apparaissent dans la couche laminaire originale. La stabilité de la CLL avec $\frac{dp}{dx} = 0$ a été étudiée par *Tollmien* en utilisant la méthode des petites perturbations et ce travail a été étendu et amélioré par *Schlichting*. La stabilité de la CLL a été évaluée en faisant référence à de petites perturbations cycliques telles que celle représentées sur la figure (Fig.5.8).

FIGURE 5.8: *Perturbations cycliques dans une couche limite laminaire.*

La frontière de la ligne neutre de stabilité en fonction de la longueur d'onde λ de la perturbation et du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement est tracée sur la figure (Fig.5.9).

Pour les écoulements sans gradient de pression, il a été trouvé que la CLL est complètement stable en ce qui concerne les petites perturbations aux valeurs $\frac{U_e \delta_1}{\nu} < 575$. A partir de $\delta_1 = 1,73 \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$, il s'ensuit que l'écoulement laminaire est stable pour les valeurs de Reynolds $\frac{U_e x}{\nu} < 1,1 \cdot 10^5$. Par conséquent, aux nombres de Reynolds inférieurs à $1,1 \cdot 10^5$, les perturbations sont atténuées et l'écoulement garde sa forme laminaire. Cependant, aux nombres de Reynolds élevés, les perturbations peuvent être amplifiées et le processus de transition s'amorce. On peut aussi voir, d'après la figure, que pour un Reynolds donnée, la stabilité de la CLL est seulement mise en cause par les perturbations dans une bande de longueur d'onde relativement étroite. Du fait que le processus de transition est seulement déclenché par l'amplification des perturbations, il s'ensuit que la transition doit se produire en aval du point où $\frac{U_e x}{\nu} = 1,1 \cdot 10^5$.

FIGURE 5.9: *Limites de stabilité pour la couche limite laminaire.*

Dans cette figure, Λ est appelé “facteur de forme de Pohlhausen”, il est défini par la relation (5.44) et il varie dans la plage $-12 \leq \Lambda \leq 12$. Pour $\Lambda = -12$, la séparation de la CLL est atteinte et pour $\Lambda > 12$, les résultats n’ont aucun sens physique en écoulement stationnaire.

$$\Lambda = -\frac{\delta^2}{\mu U_e} \frac{dp}{dx} \quad (5.44)$$

La stabilité de la CLL est grandement affectée par la présence du gradient de pression. S’il est favorable ($\frac{dp}{dx} < 0$), il cause une augmentation notable de la stabilité mais, s’il est défavorable ($\frac{dp}{dx} > 0$), la transition vers l’écoulement turbulent est provoquée beaucoup plus facilement.

5.3 Couche limite turbulente

La couche limite laminaire est caractérisée par un écoulement sans fluctuations de vitesse locale. Lorsque le nombre de Reynolds \Re_{ex} prend une valeur suffisante, on observe l’apparition de bouffées turbulentes de faible durée et de faible amplitude longitudinale.

En introduisant un facteur d’intermittence γ qui est la fraction du temps correspondant au régime turbulent, on peut définir la zone de transition par le critère suivant : elle débute lorsque $\gamma = 2\%$ et se termine lorsque γ vaut 90 %. La couche limite est alors

considérée comme turbulente. Le début et la fin de cette zone de transition dépendent beaucoup de la rugosité de la paroi (Fig.5.10). Dans de nombreux cas, on néglige la longueur de la zone de transition en supposant que la couche limite change brutalement de régime en passant du laminaire au turbulent.

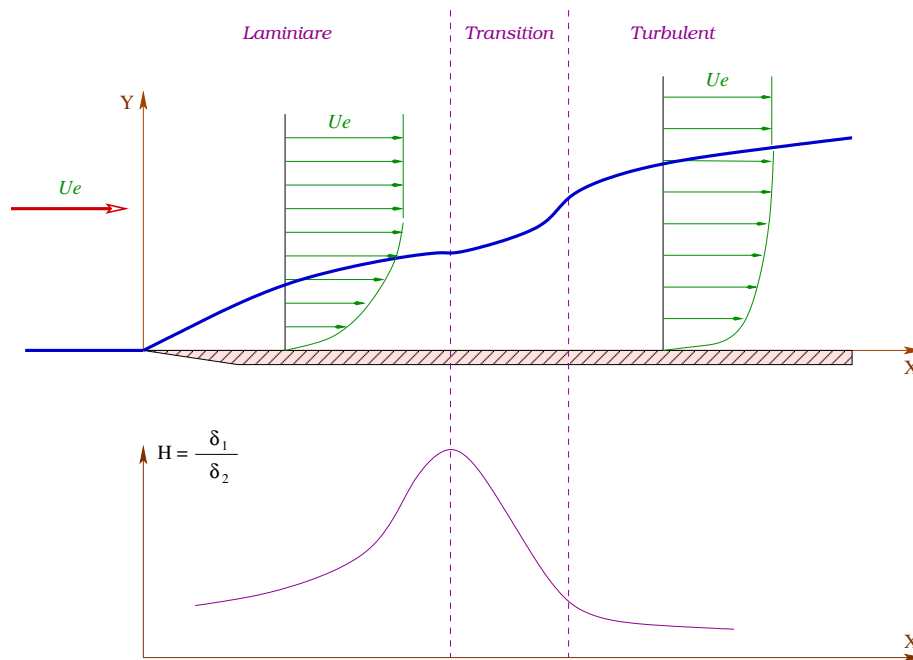


FIGURE 5.10: *Couche limite turbulente.*

Les équations de la couche limite turbulente bidimensionnelle incompressible se réduisent à des expressions comparables à (5.2) dans lesquelles apparaissent les tensions turbulentes jusqu'ici absentes. Elles s'écrivent à partir des moyennes temporelles des composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y} \end{cases} \quad (5.45)$$

Les tensions turbulentes difficilement modélisables sont maintenant prépondérantes sauf au voisinage immédiat de la paroi.

5.4 Exercices

L1 : 1- Ecrire les équations de Navier-Stokes régissant un écoulement, incompressible et visqueux en coordonnées cartésiennes.

2- Définir chacun des termes présents dans ces équations.

3- Simplifier ces équations pour un écoulement plan (xoz), stationnaire, et pour lequel les forces de volume sont négligeables.

4- En déduire les équations de la couche limite laminaire bidimensionnelle pour un écoulement sur une plaque plane. Justifier toutes vos réponses et simplifications.

5- En remplaçant le gradient de pression par une expression issue de la théorie potentielle que l'on précisera, donner une autre expression de ces équations de la couche limite ainsi que les conditions aux limites appropriées.

On utilisera pour les simplifications les variables de référence suivantes :

U_e : vitesse de référence = vitesse de l'écoulement à l'extérieur de la C.L. suivant x .

L : longueur caractéristique dans la direction x .

δ : longueur caractéristique dans la direction y . ($\delta \ll L$)

$U_e \cdot \delta/L$: vitesse de référence suivant y .

ρU_e^2 : pression de référence.

L2 : Considérons l'écoulement horizontal et stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux sur une plaque plane très mince. La vitesse de l'écoulement extérieur U_e est uniforme.

En suppose que l'expression du profil adimensionnel de vitesse à l'intérieure de la couche limite laminaire qui se développe sur la plaque ($\delta(x=0) = 0$) est de la forme :

$$\frac{u}{U_e} = \eta$$

$$\text{où } \eta = \frac{y}{\delta(x)}.$$

Donner les expressions de $\frac{\delta(x)}{x}$ et du coefficient de frottement à la paroi C_f en fonction du seul nombre de Reynolds local \Re_{ex} .

L3 : Considérons l'écoulement horizontal et stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux sur une plaque plane très mince. La vitesse de l'écoulement extérieur U_e est uniforme.

En suppose que l'expression du profil adimensionnel de vitesse à l'intérieure de la couche limite laminaire qui se développe sur la plaque ($\delta(x=0) = 0$) est de la forme :

$$\frac{u}{U_e} = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3$$

$$\text{où } \eta = \frac{y}{\delta}.$$

et a , b , c et d sont des constantes.

À la séparation de la couche limite :

1- Ecrire les quatre conditions aux limites de l'écoulement.

2- Calculer les valeurs des constantes a , b , c et d .

3- Calculer le facteur de forme H .

L4 : **A**- Considérons l'écoulement horizontal et stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux sur une plaque plane très mince. La vitesse de l'écoulement extérieur U_e est uniforme.

En appliquant la méthode de résolution intégrale à la couche limite qui se développe sur la plaque, on obtient l'expression du profil adimensionnel de vitesse conforme à la représentation polynomiale de Pohlhausen :

$$\frac{u}{U_e} = \Phi(\eta) = 2\eta - 3\eta^3 + \eta^4$$

où $\eta = \frac{y}{\delta}$.

1- Montrer que dans ce cas, les quantités $\frac{\delta_1}{\delta}$, $\frac{\delta_2}{\delta}$ et $\tau_p \cdot \delta$ sont des constantes dont on donnera les valeurs.

2- Dédurre de l'intégration de l'équation de Von-Karman la loi de variation de l'épaisseur de la couche limite $\delta(x)$.

3- Donner les expressions de $\frac{\delta}{x}$, $\frac{\delta_1}{x}$, $\frac{\delta_2}{x}$ ainsi que le coefficient de frottement $\frac{\tau_p}{\rho U_e^2}$ en fonction du seul nombre de Reynolds local \mathfrak{R}_{ex} .

B- On reprend le même problème en choisissant cette fois comme forme générale du profil adimensionnel de vitesse la relation sinusoïdale suivante :

$$\frac{u}{U_e} = \Phi(\eta) = a \cos(\alpha \eta) + b \sin(\beta \eta)$$

où a , b , α et β sont des constantes à priori fonctions de la seule variable x .

1- Déterminer les valeurs de ces constantes compatibles avec les conditions aux limites de l'écoulement.

2- Exprimer les valeurs de $\frac{\delta_1}{\delta}$, $\frac{\delta_2}{\delta}$ et $\tau_p \cdot \delta$. Vérifier qu'il s'agit bien toujours de constantes pour cet écoulement.

3- Déterminer la loi d'épaisseur de la couche limite $\delta(x)$.

4- Comparer les valeurs adimensionnelles $\frac{\delta}{x}$, $\frac{\delta_1}{x}$, $\frac{\delta_2}{x}$ avec celles obtenues à la partie **A** puis remplir le tableau ci-dessous :

TP	$\frac{\delta}{x} \mathfrak{R}_{ex}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\delta_1}{x} \mathfrak{R}_{ex}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\delta_2}{x} \mathfrak{R}_{ex}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\tau_p}{\rho U_e^2} \mathfrak{R}_{ex}^{\frac{1}{2}}$	H
P					
S					
B	4,92	1,72	0,66	0,33	2,59

TP : Type de profil. P : Polynomial.

S : Sinusoidal. B : Blasius.

5- Application numérique : Calculer les épaisseurs de la couche limite, de déplacement et de quantité de mouvement en bout d'une plaque de longueur $2m$ placée dans un écoulement de vitesse uniforme de $20 m/s$ d'un fluide de viscosité cinématique $1,4 \cdot 10^{-5} m^2/s$.

L5 : Considérons l'écoulement autour d'une plaque plane très mince.

1- Ecrire les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes pour un écoulement incompressible et instationnaire. Identifier les différents termes présents.

2- Simplifier ces équations pour obtenir celles de la couche limite laminaire bidimensionnelle d'un écoulement stationnaire en négligeant les forces de pesanteur et en prenant comme variables de référence :

U_e : vitesse de référence = vitesse de l'écoulement à l'extérieur de la C.L. suivant x .

L : longueur caractéristique dans la direction x .

δ : longueur caractéristique dans la direction y . ($\delta \ll L$)

$U_e \cdot \delta/L$: vitesse de référence suivant y .

ρU_e^2 : pression de référence.

3- Montrer en expliquant que ces équations peuvent aussi se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

Ecrire dans ce cas les conditions aux limites correspondantes.

4- On suppose maintenant que $U_e = C^{te}$ et que le gradient de pression axial est nul.

- Ecrire les nouvelles équations qui régissent cet écoulement avec les conditions aux limites associées.

- Montrer que la résolution de ce système re-

vient à la résolution d'une seule équation aux dérivées partielles en ψ dont on écrira l'expression avec les conditions aux limites associées sur la fonction de courant ψ .

5- Recherche des solutions auto-semblables pour les profils de vitesse de la forme :

$$\frac{u}{U_e} = \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

On pose :

$$\eta = \frac{y}{\delta} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$$

- Trouver la relation de type :

$$\psi(x, y) = K f(\eta)$$

où K est une variable à déterminer et

$$f'(\eta) = \Phi(\eta)$$

- Montrer que le problème revient à la résolution d'une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$a f''' + b f f'' = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$f(0) = 0; f'(0) = 0; f'(\infty) = 1$$

où a et b sont des constantes à déterminer.

- Donner l'expression du champ de vitesse $u(x, y)$ et $v(x, y)$ en fonction de $f(\eta)$.

6- En supposant que la plaque est percée de trous fins afin d'aspirer la couche limite. Quelles seront les nouvelles conditions aux limites sur f ?

7- On reprend maintenant les équations de la couche limite définies à la 3^{ème} question et on suppose un gradient de pression axial non nul.

- En intégrant directement ces équations (Von-Karman), montrer qu'on peut écrire l'expression :

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (\delta_1 + 2\delta_2) \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2}$$

où δ_1 est l'épaisseur de déplacement, δ_2 l'épaisseur de quantité de mouvement et τ_p la contrainte à la paroi.

- Quel est l'intérêt de cette solution directe par rapport à la résolution numérique du problème ? Discuter.

L6 : Considérons l'écoulement horizontal et stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux sur une plaque plane très mince. La vitesse de l'écoulement extérieur U_e est uniforme et égale à $0,5 \text{ m/s}$. On suppose que l'expression du profil de vitesse à l'intérieur de la couche limite laminaire qui se développe sur la plaque ($\delta(x=0) = 0$) est de la forme :

$$\frac{u}{U_e} = 2 \left(\frac{y}{\delta}\right) - 2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$$

Calculer l'épaisseur de la couche limite ainsi que la contrainte pariétale au milieu ($x = 3 \text{ m}$) et au bout de la plaque ($x = 6 \text{ m}$). Discuter les résultats trouvés.

On donne :

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3; \mu = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

L7 : Considérons l'écoulement horizontal et stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux sur une plaque plane très mince. La vitesse de l'écoulement extérieur U_e est uniforme. On suppose que l'expression du profil de vitesse à l'intérieur de la couche limite laminaire qui se développe sur la plaque ($\delta(x=0) = 0$) est approximé par deux segments de droite (voir figure).

Donner les expressions de l'épaisseur de la couche limite et de la contrainte pariétale puis calculer le facteur de forme. Que représente ce dernier ?

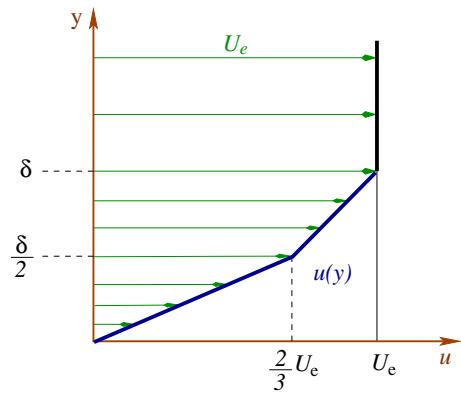


FIGURE 5.11: L7.

Chapitre 6

Écoulements dans les conduites

6.1 Introduction

Il s'agit d'un écoulement interne régi par les équations de Navier-Stokes (N-S) dans lequel la couche limite sur les parois occupe pratiquement toute la section d'écoulement.

Étudions le cas général en disposant l'axe Z vertical, les forces de volume étant supposées réduites à l'action de la pesanteur. Nous aurons alors, par unité de masse :

$$\vec{f} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -g \end{cases}$$

Le système d'équation de N-S (3.36) se ramène à :

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\ \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 w \end{cases} \quad (6.1)$$

On peut adimensionnaliser les variables en utilisant comme précédemment (Ch.5) les grandeurs de référence suivantes :

q : vitesse de référence correspondant par exemple à la vitesse débitante dans la conduite ;

D : longueur de référence correspondant à une dimension géométrique caractéristique, soit le diamètre de la conduite ou son diamètre hydraulique.

$\frac{D}{q}$: temps de référence ;

ρq^2 : pression de référence.

Les variables réduites s'écriront alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = \frac{u}{q}, \quad v^* = \frac{v}{q}, \quad w^* = \frac{w}{q} \\ x^* = \frac{x}{D}, \quad y^* = \frac{y}{D}, \quad z^* = \frac{z}{D} \\ t^* = \frac{t}{D/q}, \quad p^* = \frac{p}{\rho q^2} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Les différents termes sont facilement calculables :

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{q^2}{D} \frac{Du^*}{Dt^*}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{q^2}{D} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}, \quad \nu \nabla^2 u = \nu \frac{q}{D^2} \nabla^2 u^*$$

et en multipliant tous les termes par D/q^2 , le système (6.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Du^*}{Dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{qD} \nabla^2 u^* \\ \frac{Dv^*}{Dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\nu}{qD} \nabla^2 v^* \\ \frac{Dw^*}{Dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{gD}{q^2} + \frac{\nu}{qD} \nabla^2 w^* \end{array} \right. \quad (6.3)$$

On voit alors apparaître le nombre de Reynolds de l'écoulement :

$$\Re_e = \frac{qD}{\nu} \quad (6.4)$$

qui représente le rapport des *forces d'inertie* aux *forces de viscosité* ainsi que le nombre de Froude

$$F = \frac{q^2}{gD} \quad (6.5)$$

qui représente le rapport des *forces d'inertie* aux *forces de pesanteur*.

- Remarque :

Les nombres \Re_e et F servent de base aux règles de similitude des écoulements. L'influence du nombre de Froude n'est sensible que dans les écoulements à surface libre. Par contre, pour les écoulements en charge, c'est le nombre de Reynolds qui est prépondérant puisqu'il fixe à la fois le régime d'écoulement mais également les gradients de vitesse à la paroi, la forme de la distribution de vitesse, etc...

6.2 Etude de l'écoulement laminaire

Nous étudions ici un écoulement laminaire dans un tube de section circulaire en régime incompressible et permanent (écoulement de Poiseuille).

Pour déterminer le profil des vitesses, nous pourrions utiliser soit les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques, soit la seconde loi de Newton appliquée à un élément de fluide.

* Appliquons en premier lieu la loi de Newton avec les hypothèses suivantes :

Soit une conduite cylindrique horizontale (les forces de volume n'interviennent pas), siège d'un écoulement permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) symétrique par rapport à l'axe de la conduite. Nous supposons que cet écoulement a lieu par couches cylindriques coaxiales (écoulement laminaire), toutes les vitesses étant parallèles à XX' . La vitesse u en un point dépend uniquement de sa distance r à l'axe. Elle reste alors constante et les trajectoires sont rectilignes. Les quantités d'accélération sont donc nulles.

Les dimensions transversales sont généralement petites par rapport à la longueur de la conduite, on peut donc admettre que la pression est constante dans une section droite.

Considérons un anneau élémentaire de rayon intérieur r , d'épaisseur dr et de longueur dx comme il est indiqué sur la figure (Fig.6.1)

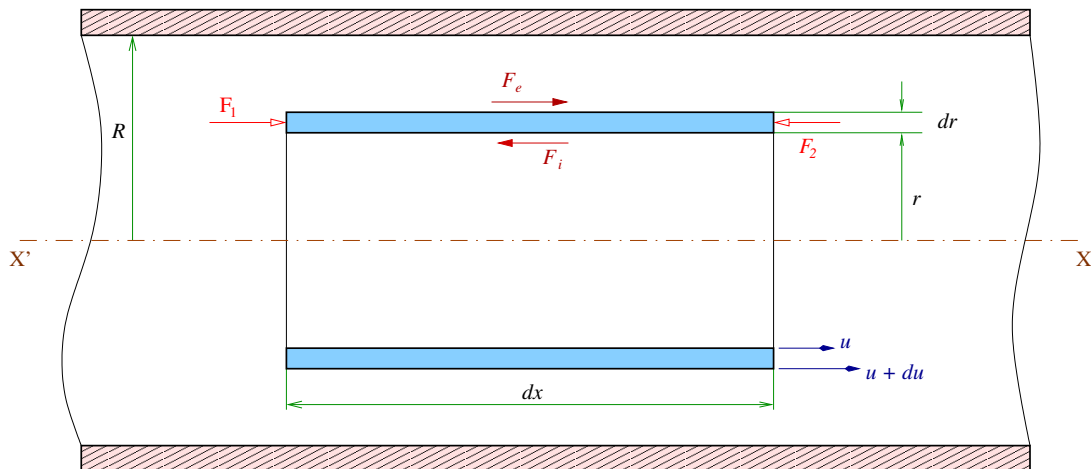


FIGURE 6.1: *Anneau élémentaire dans une conduite horizontale.*

- **Forces de pression :**

$$F_1 = p [\pi (r + dr)^2 - \pi r^2] \simeq 2\pi p r dr$$

$$F_2 = F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x} dx = 2 \pi r dr \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right)$$

$$\Rightarrow F_1 - F_2 \simeq -2 \pi r dr \left(\frac{dp}{dx} \right) dx$$

- Forces de viscosité :

$$F_i = \tau 2 \pi r dx = \mu \frac{du}{dr} 2 \pi r dx$$

$$F_e = F_i + \frac{\partial F_i}{\partial r} dr = F_i + 2 \pi \mu dx \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) dr$$

$$\Rightarrow F_e - F_i = 2 \pi \mu dx \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) dr$$

Puisque les quantités d'accélération sont nulles ($\gamma_x = 0$) alors la loi de Newton nous donne :

$$F_1 - F_2 + F_e - F_i = 0$$

En remplaçant les expressions des forces et en simplifiant nous aurons l'équation suivante :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) \quad (6.6)$$

* La relation (6.6) peut aussi s'obtenir directement à partir des équations de N-S en coordonnées cylindriques (Fig.6.2) :

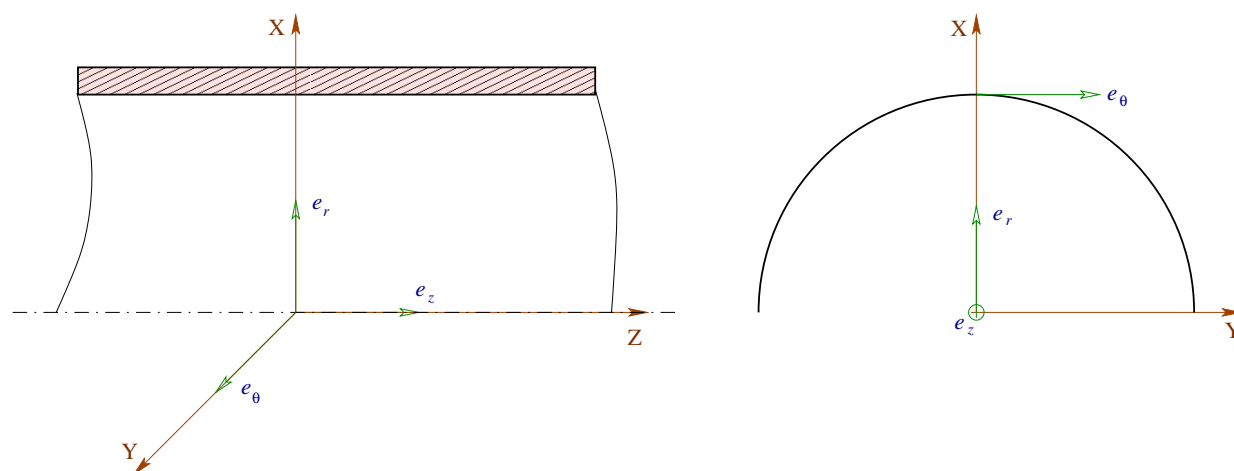


FIGURE 6.2: *Conduite horizontale. Coordonnées cylindriques.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D u_r}{D t} - \frac{v_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \frac{D v_\theta}{D t} + \frac{u_r v_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) \\ \frac{D w_z}{D t} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_z \end{array} \right.$$

avec :

$$\vec{q} = u_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + w_z \vec{e}_z = w_z \vec{e}_z \quad (\text{car } u_r \text{ et } v_\theta \text{ sont nulles})$$

$$\frac{D h}{D t} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

et

$$\nabla^2 h \equiv \Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$$

h étant une fonction qui peut être dans ce cas : u_r , v_θ ou w_z .

La simplification de ces équations nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + \nu \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow w_z = w_z(r)$$

La dernière équation du système devient :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right)$$

d'où la relation finale :

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_z}{dr} \right) \quad (6.7)$$

Revenons maintenant à notre relation (6.6) qui est une équation différentielle dont le 1^{er} membre dépend uniquement de x et le 2nd uniquement de r . Comme cette équation doit être satisfaite quelque soit x et r , les deux membres sont donc constants : $dp/dx = C^{te}$; ce qui signifie que la pression varie linéairement avec l'abscisse x .

Posons alors : $\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{l}$ avec l : longueur de la conduite et Δp la chute de pression ou perte de charge sur la longueur l . L'équation (6.6) s'intègre facilement en donnant le profil des vitesses suivant :

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

- Condition d'adhérence du fluide à la paroi : $u(r = R) = 0$.
- Pour obtenir une valeur finie sur l'axe du tube : $C_1 = 0$;

d'où le profil des vitesses :

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2) \quad (6.8)$$

Le profil des vitesses est donc parabolique (Fig.6.3). Pour le tracer correctement, il faut d'abord déterminer la vitesse maximale ainsi que la vitesse débitante. Cette dernière se calcul à partir du débit volumique traversant la section de passage.

- Vitesse maximale :

La position où la vitesse est maximale est donné par :

$$\left. \frac{du(r)}{dr} \right|_{r=d} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} d = 0 \Rightarrow d = 0$$

Elle est donc localisée au centre de la canalisation. Sa valeur est donnée par :

$$u_{max} = u(r = d) \quad \text{d'où :}$$

$$u_{max} = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l} R^2 \quad (6.9)$$

- Débit volumique :

$$Q_v = \int_0^R u(r) ds = \int_0^R \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right]$$

$$Q_v = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{l} R^4 = \frac{\pi}{128\mu} \frac{\Delta p}{l} D^4 \quad (6.10)$$

C'est la formule de *Poiseuille*, elle nous montre qu' en écoulement laminaire, le débit est proportionnel à la chute de pression Δp .

- Vitesse débitante (ou moyenne) :

$$Q_v = S\bar{u} = \pi R^2 \bar{u} \quad \text{d'où :}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{8\mu} \frac{\Delta p}{l} R^2 = \frac{1}{2} u_{max} \quad (6.11)$$

En combinant ces expressions, le profil des vitesses peut aussi s'écrire :

$$\frac{u(r)}{\bar{u}} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (6.12)$$

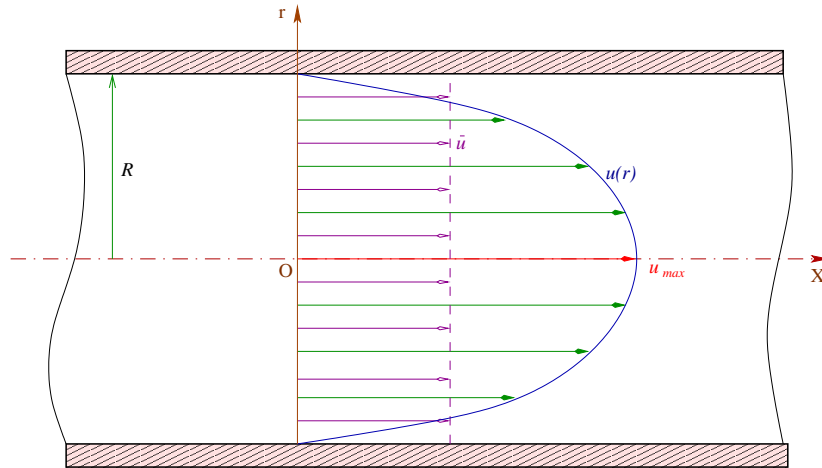


FIGURE 6.3: *Profil des vitesses.*

- **Contrainte au sein du fluide :**

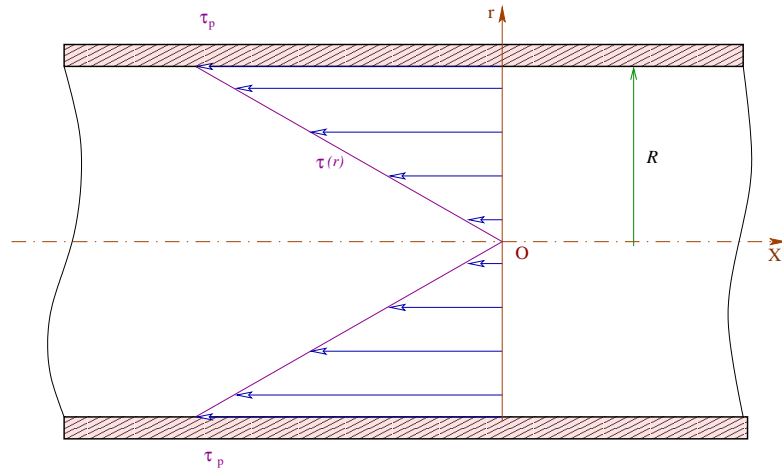
$$\tau = \mu \frac{du(r)}{dr} \quad \text{d'où :} \quad \tau(r) = -\frac{1}{2} \frac{\Delta p}{l} r \quad (6.13)$$

* au centre de la conduite : $\tau = \mu \left. \frac{du(r)}{dr} \right|_{r=0} = \tau(r=0) = 0$

* à la paroi :

$$\tau_p = \mu \left. \frac{du(r)}{dr} \right|_{r=R} = \tau(r=R) = -\frac{R}{2} \frac{\Delta p}{l} \quad (6.14)$$

La distribution des contraintes dans le fluide est représentée sur la figure (Fig.6.4) : la contrainte est donc maximale à la paroi et nulle au centre de la conduite puisque les effets de la viscosité sont négligeables loin de la paroi.

FIGURE 6.4: *Etat de contrainte au sein du fluide.*

- Coefficient de perte de charge :

La différence de pression traduisant la perte de charge dans une conduite cylindrique est donnée par :

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \rho \frac{\bar{u}^2}{2} \quad (6.15)$$

λ : coefficient sans dimension, appelé *coefficient de perte de charge linéaire*.

D : diamètre de la conduite.

En combinant (6.11) et (6.15), on trouve :

$$\lambda = \frac{64}{\Re_e} \quad (6.16)$$

avec :

$$\Re_e = \frac{\bar{u} D}{\nu} \quad (6.17)$$

En écoulement laminaire, le coefficient de pertes de charge linéaire est donc inversement proportionnel au nombre de Reynolds.

- Coefficient de frottement à la paroi :

Il est défini par :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} \quad (6.18)$$

En remplaçant τ_p et \bar{u} par leurs valeurs issues de (6.11) et (6.14), on obtient la relation qui lie le coefficient de frottement au coefficient de pertes de charge linéaire :

$$C_f = \frac{\lambda}{4} \quad (6.19)$$

6.3 Notions de charge et de perte de charge

Le long d'un filet fluide, sans viscosité et incompressible, en mouvement permanent, l'expression :

$$X = p + \frac{1}{2} \rho q^2 + \rho g h \quad (6.20)$$

reste constante et porte le nom de *charge*.

Pour une conduite de section constante nous avons :

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dp_g}{dx} \quad (6.21)$$

avec

$$p_g = p + \rho g h \quad (\text{pression motrice})$$

$\frac{dp_g}{dx}$: perte de charge par unité de longueur.

- Si le fluide, tout en restant incompressible, est visqueux, la charge ne reste plus constante le long du filet. On définit la *perte de charge unitaire* par :

$$j = -\frac{dX}{\rho g dx} \quad (6.22)$$

Pour faciliter la comparaison entre les écoulements, on utilise un coefficient sans dimension, appelé coefficient de perte de charge linéaire (ou unitaire) et défini par :

$$\lambda = -\frac{dX}{dx} \frac{D}{\frac{1}{2} \rho q^2} \quad (6.23)$$

D : diamètre de la conduite ;

$\frac{1}{2} \rho q^2$: pression dynamique avec $q \equiv \bar{u}$.

En combinant (6.22) et (6.23), nous aurons :

$$j = \frac{\lambda}{D} \frac{q^2}{2g} \quad (6.24)$$

j s'exprime dans ce cas en mètre de fluide par mètre de conduite.

La perte de charge dans une conduite de longueur L de diamètre constant D est donc :

$$J = \lambda \frac{L}{D} \frac{q^2}{2g} \quad [m] \quad (6.25)$$

$$gJ = \lambda \frac{L}{D} \frac{q^2}{2} \quad [J/Kg] \quad (6.26)$$

$$\rho g J = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{q^2}{2} \quad [N/m^2] \quad (6.27)$$

Ainsi, dans le cas d'un fluide visqueux, lorsqu'on suit le filet dans le sens du mouvement, la charge décroît. Dans ce cas, l'équation de Bernoulli devient entre deux sections (1) et (2) de la conduite :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{g} + z_2 + J \quad (6.28)$$

Le terme J correspond à une énergie en $[m]$ dissipée par frottement, donc sous forme de chaleur. La puissance dissipée s'exprime donc par la relation :

$$P_d = \rho g J Q_v = \Delta p Q_v \quad [W] \quad (6.29)$$

6.4 Détermination du coefficient de perte de charge linéaire

Les courbes expérimentales de Nikuradse (Fig.B.1, Annexe B.4) nous montrent que λ n'est fonction que du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la conduite ε/D :

— Si $\Re_e \leq 2300$: l'écoulement est dit *laminaire*. On utilise la droite de Poiseuille :

$$\lambda = \frac{64}{\Re_e} \quad (6.30)$$

donc λ n'est fonction que de \Re_e seulement.

— Si $2300 < \Re_e \leq 4.10^4$: l'écoulement est dit *turbulent lisse* car λ ne dépend pas encore de ε/D . On utilise soit la droite de Blasius :

$$\lambda = \frac{0,3164}{\Re_e^{0,25}} \quad (6.31)$$

ou encore l'équation de Von Karman :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\Re_e \sqrt{\lambda} \right) - 0,8 \quad (6.32)$$

Cette équation se résout d'une manière itérative (Newton) en commençant généralement par la valeur initiale $\lambda_0 = 0.02$.

- Si $\Re_e > 4.10^4$: l'écoulement est dit *turbulent rugueux*. λ ne dépend plus de \Re_e , ou très peu car la courbe ε/D est presque une droite horizontale (Fig.B.1, Annexe B.4,).

* Pour les conduites industrielles, on utilise la relation de Blench :

$$\lambda = 0,790 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}} \quad (6.33)$$

* Pour les conduites expérimentales de rugosité uniforme on utilise la relation de Karman-Nikuradse :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{D}{2\varepsilon} \right) + 1,74 \quad (6.34)$$

6.4.1 Loi générale de perte de charge

Pour représenter simultanément la perte de charge en régime turbulent lisse et en régime turbulent rugueux, ainsi que dans la zone de transition entre les deux régimes, Colebrook et White ont regroupé les lois de Prandtl et de Karman sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{2,51}{\Re_e \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3,71 D} \right] \quad (6.35)$$

Cette équation est non linéaire puisque le coefficient λ est implicite. Pour \Re_e et ε/D donnés, il n'est pas possible de déterminer λ sans passer par une méthode itérative. En utilisant la initiale $\lambda_0 = 0.02$, la méthode de Newton donne un résultat très acceptable après environ 5 itérations.

L'expression explicite de Swanee-Jain donne le même résultat que (6.35) avec une erreur de 1% dans la plage $5.10^3 < \Re_e \leq 10^8$ et $10^{-6} < \varepsilon/D \leq 10^{-2}$.

$$\lambda = \frac{0,25}{\left[\log \left(\frac{5,74}{\Re_e^{0,9}} + \frac{\varepsilon}{3,7 D} \right) \right]^2} \quad (6.36)$$

L'expression explicite de Churchill est plus compliquée mais valable pour tous les régimes d'écoulement et toutes les rugosités relatives. Elle "colle" bien avec le diagramme de Moody.

$$\lambda = 8 \left\{ \left(\frac{8}{\Re_e} \right)^{12} + \left[2,457 \ln \left(\frac{1}{\left(\frac{7}{\Re_e} \right)^{0,9} + 2,7 \frac{\varepsilon}{D}} \right) + \left(\frac{37530}{\Re_e} \right)^{16} \right]^{-\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{1}{12}} \quad (6.37)$$

- Remarque :

Dans le cas d'une conduite de section non circulaire, on utilisera à la place du diamètre D , le diamètre hydraulique D_H défini au Ch.4 §4.10.1.

- Exemple d'application :

Soit à déterminer la perte de charge par mètre de conduite en fonte de diamètre $D = 200 \text{ mm}$ et débitant 200 m^3 d'eau par heure. On donne : $\varepsilon = 0,20 \text{ mm}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Pour chercher le régime d'écoulement, il faut d'abord calculer la vitesse dans la conduite :

$$Q_v = q \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow q = \frac{4 Q_v}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 200}{\pi \cdot (0,2)^2 \cdot 3600} = 1,768 \text{ m/s}.$$

$$\Re_e = \frac{Dq}{\nu} = \frac{0,2 \cdot 1,768}{10^{-6}} = 3,532 \cdot 10^5 \quad \text{donc le régime est turbulent rugueux.}$$

$$\lambda = 0,790 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}} = 0,790 \sqrt{\frac{0,2}{200}} \Rightarrow \lambda \approx 0,025.$$

$$j = \frac{J}{L} = \frac{\lambda}{D} \frac{q^2}{2g} = \frac{0,025 (1,768)^2}{0,2 \cdot 2 \cdot 10} \Rightarrow j = 0,0195 \text{ m/m} \left(0,195 \frac{J}{Kg \cdot m} \text{ ou } 195 \frac{N}{m^3} \right).$$

Si la longueur de la conduite est $L = 1000 \text{ m}$, la perte de charge totale sera :

$$J = jL = 0,0195 \cdot 1000 \Rightarrow J = 19,5 \text{ m d'eau.}$$

La puissance dissipée sous forme de chaleur sera dans ce cas :

$$P_d = \rho g J Q_v = 10^3 \cdot 10 \cdot 19,5 \cdot 200/3600 \Rightarrow P_d = 10,83 \text{ KW}.$$

6.5 Pertes de charge singulières ou locales

Les pertes de charge singulières sont dues à la présence de coudes, de raccords, de branchements, de robinets... etc. le long de la conduite. Ces obstacles entraînent une variation de vitesse du courant et la naissance de tourbillons. Ceci entraîne une perte supplémentaire qui s'ajoute à la perte de charge linéaire qui est due aux frottements sur la partie rectiligne de la conduite. Dans la pratique, les pertes de charge singulières sont généralement estimées de 0,1 à 1,5 % des pertes de charge linéaires.

La perte de charge résultant d'un tel obstacle a pour expression : $\zeta \frac{q^2}{2g} [m]$;

où ζ est le *coefficient de pertes de charge singulières* (ou *locales*) ; il dépend de chaque type d'obstacle (*Annexe B*).

L'équation (6.28) devient dans ce cas :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{g} + z_2 + J_{12} + \sum_1^2 \zeta_i \frac{q_i^2}{2g} \quad (6.38)$$

J_{12} étant la perte de charge totale entre les points 1 et 2. Dans le cas par exemple où le diamètre de la conduite change, on aura :

$$J_{12} = \sum_1^2 J_i = \sum_1^2 \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{q_i^2}{2g} \quad (6.39)$$

6.6 Pertes de charge singulière à l'entrée d'une conduite

6.6.1 Cas du régime laminaire

Soit un tuyau horizontal (Fig.6.5) alimenté par un réservoir et comportant une entrée suffisamment arrondie pour éviter les décollements.

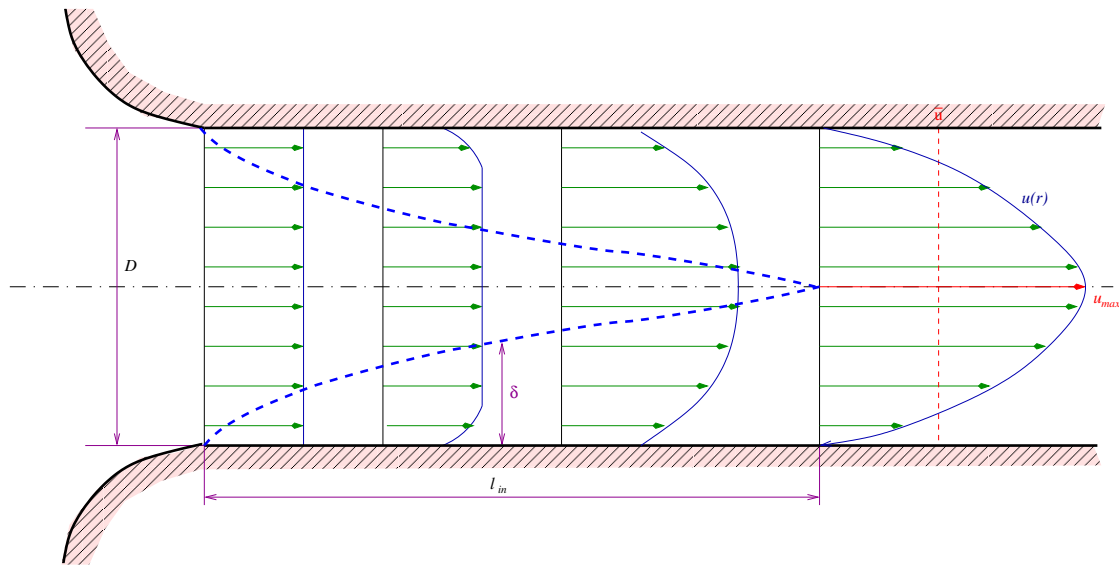


FIGURE 6.5: *Ecoulement laminaire à l'entrée d'une conduite.*

Près de l'entrée, le profil des vitesses est pratiquement rectangulaire, la couche limite étant très fine. Ensuite, cette couche limite se développe progressivement alors que la vitesse de la partie centrale, non affectée par le frottement, croît pour assurer la

conservation du débit. Puis la distribution des vitesses croît asymptotiquement vers la forme définitive, les couches limites occupant toute la section de la conduite.

Dans les calculs, on admet généralement que le régime *permanent établi* existe dès l'origine de la conduite. En fait, pour se rapprocher de la réalité, on tient compte globalement de cette perte de charge singulière dans les calculs et le coefficient ζ correspondant peut varier entre 0,2 et 1,2 selon la forme de l'entrée de la conduite et du nombre de Reynolds.

Pour déterminer la *longueur initiale* l_{in} (ou *longueur d'établissement*), on peut utiliser la formule approchée suivante :

$$\frac{l_{in}}{D} \simeq 0,029 \Re_e \quad (6.40)$$

Ceci nous montre que la longueur d'établissement peut atteindre 100 fois le diamètre de la conduite si le régime d'écoulement est à la limite du régime laminaire.

Si l'entrée est à bords vifs, il se produit des décollements qui engendrent des tourbillons, s'amortissant graduellement pour donner le régime laminaire.

Les pertes de charge dans un élément de conduite de longueur inférieure ou égale à l_{in} peuvent être déterminées à l'aide des formules (6.25) et (6.30) à condition d'y introduire un coefficient de correction $k > 1$ (Annexe B.6.1) tel que :

$$\lambda_{in} = k \frac{64}{\Re_e} \quad (6.41)$$

Ceci est dû au fait que les pertes de charge sont plus importantes ($\simeq 9\%$) dans la partie initiale du tuyau. Elles seront encore plus importantes si l'entrée est à bords vifs. Dans ce cas, il se produit des décollements qui engendrent des tourbillons s'amortissant graduellement pour donner le régime laminaire.

6.6.2 Cas du régime turbulent

Dans le cas d'une entrée parfaite sans décollement, on observe les mêmes phénomènes qu'à l'origine d'une plaque (Fig.6.6) :

La distance du point de transition à l'entrée est donnée par :

$$\frac{l_{in}}{D} \simeq \frac{10^5}{\Re_e} \quad (6.42)$$

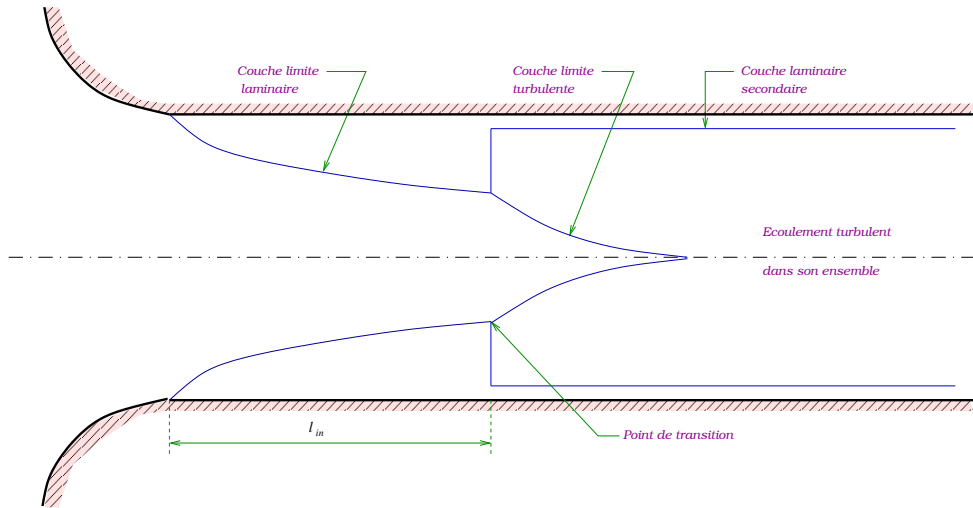


FIGURE 6.6: *Ecoulement turbulent à l'entrée d'une conduite.*

Si l'entrée est à bords vifs, les tourbillons dus aux décollements ne s'amortissent plus et l'écoulement est tout de suite turbulent. La longueur d'établissement peut varier entre 25 et 80 fois le diamètre, ce qui limite la possibilité d'installer un système déprimogène de mesure de débit trop près de l'origine de la conduite.

6.7 Généralisation de l'équation de Bernoulli

Supposons que le système passe de l'état initial (1) à l'état final (2) en échangeant du travail avec le milieu extérieur. La variation, augmentation ou diminution, de l'énergie actuelle du système ne peut être qu'égal au travail échangé :

$$W_{12} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{1}{2} (q_2^2 - q_1^2) + g (z_2 - z_1) + g J_{12} + \sum_1^2 \zeta_i \frac{q_i^2}{2} \quad (6.43)$$

W_{12} : travail échangé entre le système (1 kg de fluide) et le milieu extérieur par l'intermédiaire de l'arbre de la machine.

- $W_{12} > 0$ si le système reçoit du travail du milieu extérieur (pompe, compresseur, ...etc).
- $W_{12} < 0$ si le système fourni du travail au milieu extérieur (turbine, ...etc).

- Exemples d'application :

1-

Dans le système représenté dans la figure (Fig.6.7), la pompe BC doit amener avec un débit de 160 l/s de l'huile de pétrole, de masse volumique 762 Kg/m^3 au réservoir D . En admettant que l'énergie perdue de A à B est de $2,5 \text{ m}$ et entre C et D de $6,5 \text{ m}$. Déterminer la puissance fournie au fuel par la pompe et tracer la ligne de charge de l'installation.

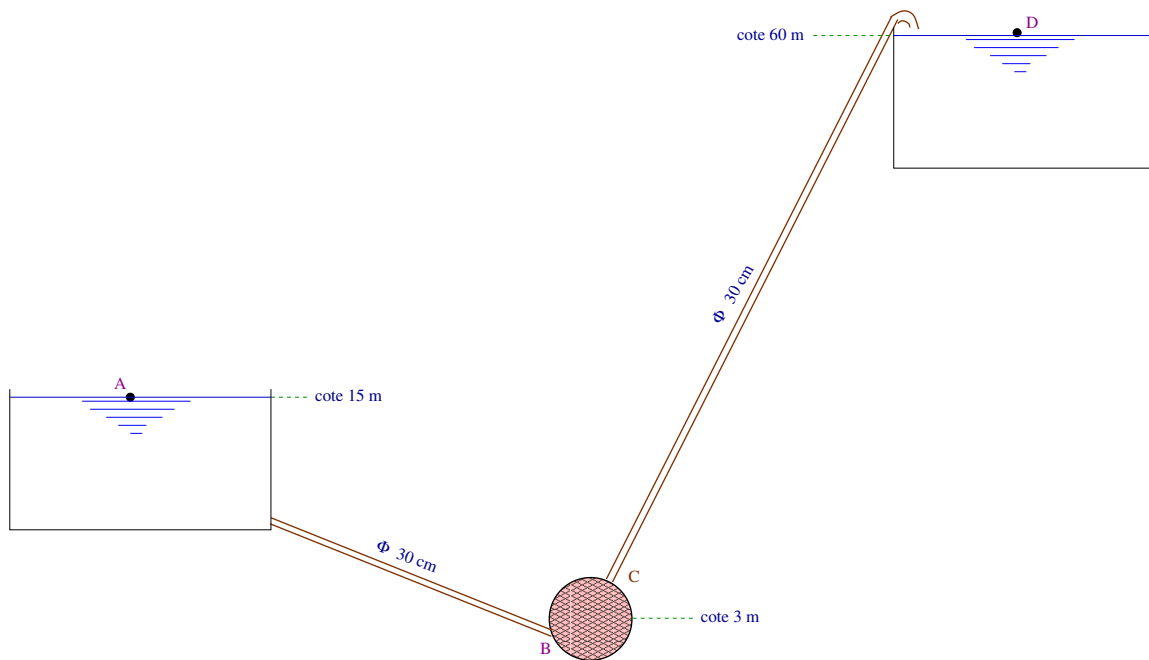


FIGURE 6.7: *Exemple d'application. Alimentation d'un réservoir par une pompe.*

* La puissance fournie est donnée par : $P_f = \Delta p_{BC} Q_v = \rho g H_p Q_v$

H_p étant la hauteur fournie par la pompe.

Appliquons l'équation (6.43) entre les points A et D :

$$W_{AD} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} = W_{BC}$$

$$W_{BC} = \frac{p_C - p_B}{\rho} + \frac{1}{2} (q_C^2 - q_B^2) + g (z_C - z_B) + g J_{BC} + \sum_B^C \zeta \frac{q^2}{2} = g H_p$$

$$W_{AB} = \frac{p_B - p_A}{\rho} + \frac{1}{2} (q_B^2 - q_A^2) + g (z_B - z_A) + g J_{AB} + \sum_A^B \zeta \frac{q^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{p_B - p_A}{\rho g} + \frac{1}{2g} q_B^2 + (z_B - z_A) + H_{AB} = 0 \quad (*)$$

$$W_{CD} = \frac{p_D - p_C}{\rho} + \frac{1}{2} (q_D^2 - q_C^2) + g (z_D - z_C) + g J_{CD} + \sum_C^D \zeta \frac{q^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{p_D - p_C}{\rho g} - \frac{1}{2g} q_C^2 + (z_D - z_C) + H_{CD} = 0 \quad (**)$$

(*) + (**) nous donne, puisque $p_A = p_D$ et $z_C = z_B$:

$$\frac{p_B - p_C}{\rho g} + \frac{1}{2g} (q_B^2 - q_C^2) + (z_D - z_A) + H_{AB} + H_{CD} = 0$$

$$\Rightarrow -H_p + (z_D - z_A) + H_{AB} + H_{CD} = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$H_p = (z_D - z_A) + H_{AB} + H_{CD} = 54 \text{ m}$$

$$\text{et } P_f = 762 \cdot 10 \cdot 54 \cdot 0,16 \quad \text{soit } P_f = 65,837 \text{ KW}$$

Pour tracer la ligne de charge de l'installation (Fig.6.8), il est utile de calculer les charges en A , B , C et D .

Comme on travail avec les pressions effectives, à la surface du liquide nous avons :

$$p_A = p_{eff} = p_T - p_{atm} = 0$$

* Charge en A :

$$H_A = \frac{p_A}{\rho g} + \frac{q_A^2}{2g} + z_A = z_A = 15 \text{ m.}$$

* Charge en B :

$$H_B = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{q_B^2}{2g} + z_B = H_A - H_{AB} = 15 - 2,5 = 12,5 \text{ m.}$$

* Charge en C :

$$H_C = \frac{p_C}{\rho g} + \frac{q_C^2}{2g} + z_C = H_B + H_p = 12,5 + 54 = 66,5 \text{ m.}$$

* Charge en D :

$$H_D = \frac{p_D}{\rho g} + \frac{q_D^2}{2g} + z_D = z_D = H_C - H_{CD} = 66,5 - 6,5 = 60 \text{ m.}$$

Traçons maintenant la ligne piézométrique de l'installation.

Pour un écoulement permanent dans un tuyau de diamètre constant, la ligne de charge est une droite. La ligne piézométrique est parallèle à la ligne de charge et située à $\frac{q^2}{2g}$ au dessous (Fig.6.8). Pour la tracer, il faut donc calculer les valeurs suivantes :

Vitesse dans les conduites : $q = \frac{Q_v}{S} = \frac{4Q_v}{\pi D^2} = 2,263 \text{ m/s}$

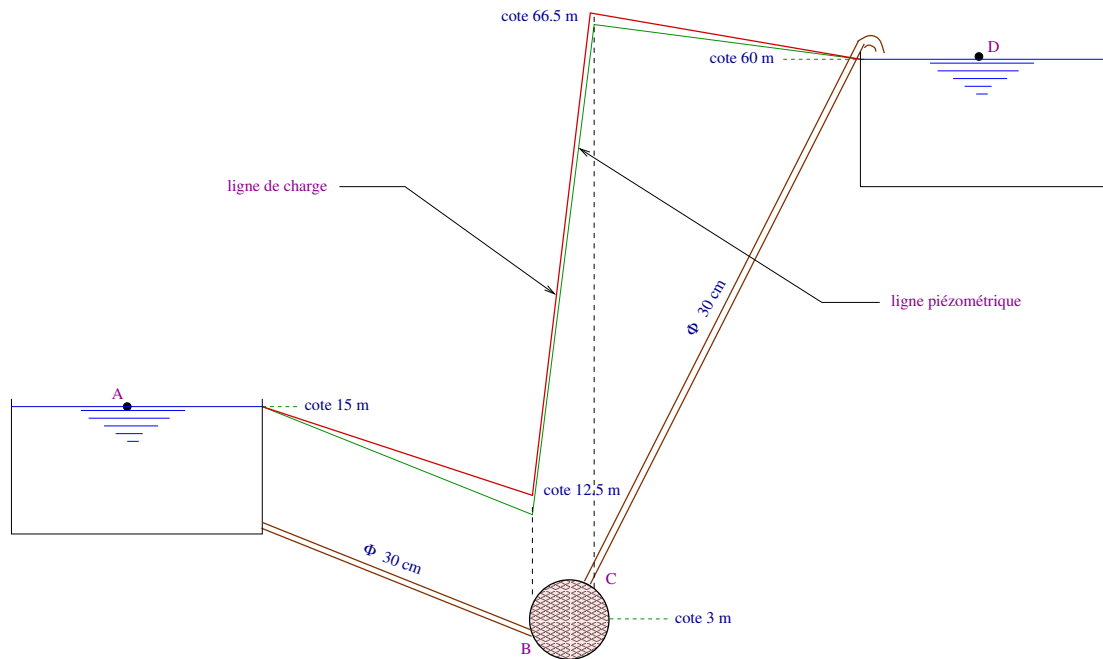


FIGURE 6.8: *Ligne de charge et ligne piézométrique de l'installation.*

Point A :

$$H_A - \frac{q_A^2}{2g} = H_A = 15 \text{ m.}$$

Point B :

$$H_B - \frac{q_B^2}{2g} = 12,5 - \frac{(2,263)^2}{2 \cdot 10} = 12,244 \text{ m.}$$

Point C :

$$H_C - \frac{q_C^2}{2g} = 66,5 - \frac{(2,263)^2}{2 \cdot 10} = 66,244 \text{ m}$$

Point D :

$$H_D - \frac{q_D^2}{2g} = H_D = 60 \text{ m.}$$

2-

Soit à calculer la perte de charge singulière due à un élargissement brusque (Fig.6.9).

On donne : $D_1 = 15 \text{ cm}$; $D_2 = 30 \text{ cm}$; $q_v = 30 \text{ l/s}$; $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

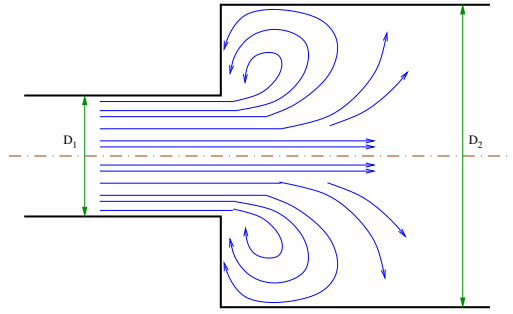


FIGURE 6.9: *Perte de charge dans un élargissement brusque.*

* Utilisons le tableau (Tab.B.1, *Annexe B.1*) : $H_s = \frac{(q_1 - q_2)^2}{2g}$

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{Q_v}{S_1} = \frac{4Q_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0,03}{\pi (0,15)^2} = 1,6976 \text{ m/s} \\ q_2 &= \frac{Q_v}{S_2} = \frac{4Q_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0,03}{\pi (0,3)^2} = 0,4244 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_s = 0,0826 \text{ m}$$

* Ou encore en utilisant la formule :

$$\zeta = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}\right)^2 = 0,5625 \Rightarrow H_s = \zeta \frac{q_1^2}{2g} = 0,0826 \text{ m}.$$

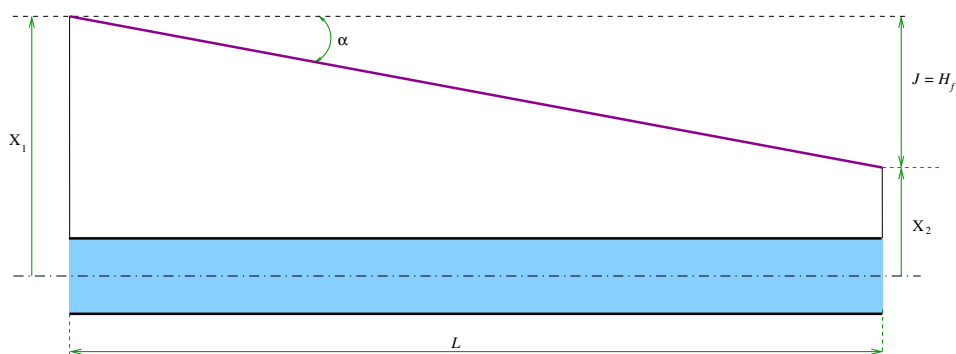
* Ou encore en utilisant le tableau (Tab.B.3) (*Annexe B.3*) on a :

$$\begin{aligned} \text{pour } D_1/D_2 = 0,4 \quad \text{on a } \zeta &= 0,7 \\ \text{pour } D_1/D_2 = 0,6 \quad \text{on a } \zeta &= 0,4 \end{aligned}$$

puisque nous avons $D_1/D_2 = 0,5$ alors en faisant une interpolation linéaire nous aurons : $\zeta = 0,55$; ce qui nous donne une perte de charge singulière de $0,0808 \text{ m}$.

6.8 Pente hydraulique

Par définition, la pente hydraulique notée j (relation 6.24), représente la perte de charge par unité de longueur de la conduite (Fig.6.10).

FIGURE 6.10: *Définition de la pente hydraulique.*

$$j = \tan \alpha = \frac{X_1 - X_2}{L} = \frac{J}{L} = \frac{H_f}{L} \quad (6.44)$$

Donc, connaissant α , on peut déterminer J . Dans la pratique, on utilise généralement la formule généralisée de Leybson :

$$j = \beta \frac{Q_v^{2-m} \nu^m}{D^{5-m}} \quad (6.45)$$

où les coefficient m et β sont donnés dans le tableau (Tab.6.1).

Cette formule est commode car elle donne une dépendance directe entre les pertes de charge et le débit.

Régime	m	β
<i>Laminaire</i>	1	4,155
<i>Turbulent lisse</i>	0,25	0,0247
<i>Turbulent mixte</i>	0,123	$0,08 + 0,127 \log \left \frac{\varepsilon}{D} - 0,627 \right $
<i>Turbulent rugueux</i>	0	$0,0826 \lambda$

TABLE 6.1: *Coefficients m et β pour la formule de Leybson.*

La nature du régime peut être déterminée avec précision en utilisant les relations suivantes :

$$\textit{Laminaire} \leq \Re_e = 2300 \leq \textit{Turbulent lisse}$$

$$\textit{Turbulent lisse} \leq \Re_e = 59,5 \left(\frac{\varepsilon}{D}\right)^{-\frac{8}{7}} \leq \textit{Turbulent mixte}$$

$$\textit{Turbulent mixte} \leq \Re_e = \frac{66,5 - 756 \log\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)} \leq \textit{Turbulent rugueux}$$

Calcul des conduites

7.1 Introduction

La tuyauterie était déjà connue comme un moyen pratique de transport des liquides depuis l'antiquité. Les Chinois savaient ajuster les unes aux autres en guise de tubes les tiges creuses du bambou. Les Egyptiens et les Aztèques fabriquaient des tubes en poterie et les civilisations grecque et romaine utilisaient des tuyaux de plomb. Aux Etats-Unis même, les toutes premières canalisations d'eau potable n'étaient autres que des bûches percées et mises bout à bout.

Les besoins en énergie du monde moderne se sont considérablement développés, le pétrole et le gaz naturel ayant largement contribué à leur couverture depuis les dernières décennies. La mise en place de ces produits énergétiques a nécessité l'emploi de moyens de transport massifs, au premier rang desquels figure la *conduite*. En effet, malgré son investissement initial très lourd, le transport par conduite reste le moyen le plus efficace et on assiste depuis les dernières décennies à un développement très marqué de ce mode de transport qui présente les quelques avantages suivant, comparé aux autres moyens classiques (bateaux, wagons, camions, ...etc.) :

- Le tracé est sensiblement rectiligne et, de ce fait, la distance parcourue est plus faible, car la conduite franchit plus aisément les accidents de la géographie et du relief : fleuves, montagnes, marécages, ...etc.
- La faible emprise au sol de la conduite et son peu de nuisance lui donne un atout de poids dans les considérations à l'ordre du jour touchant la protection de la nature, l'environnement et la sécurité.
- L'énergie à dépenser est relativement faible puisqu'il n'y a pas de déplacement du contenant et pas de retour à vide.
- Son exploitation est sans aléas et indépendante des contingence atmosphériques et de ce fait spécialement adaptée à la marche en continu.

7.2 Conduites simples et conduites multiples

7.2.1 Conduites simples

Convenons d'appeler *conduite simple* une conduite dont le diamètre est constant et ne comportant aucune bifurcation. Un liquide se déplace dans une conduite grâce à la différence d'énergie potentielle entre son début (plus grande) et son bout (plus faible). Cette différence de niveaux de l'énergie peut être créée grâce à la différence des niveaux du liquide soit au travail fourni par une pompe.

Considérons une conduite simple disposée d'une façon quelconque dans l'espace (Fig.7.1) de longueur totale l et de diamètre D et qui comprend toute une série de résistances hydrauliques locales (obstacles ou accessoires). Puisque le diamètre D est constant alors la vitesse q est elle aussi constante le long de la conduite et l'équation de Bernoulli généralisée entre les sections d'entrée (1) et de sortie (2) s'écrira :

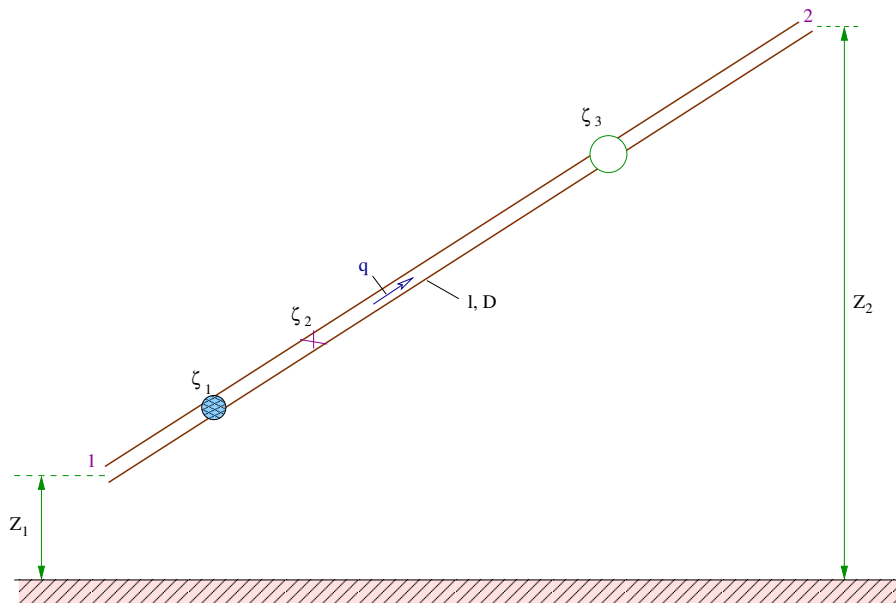


FIGURE 7.1: *Conduite simple.*

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + J_{12} + \sum_1^2 \zeta \frac{q^2}{2g} \quad (7.1)$$

L'expression (7.1) peut s'écrire :

$$H_{ex} = -\Delta z + \sum_1^2 h \quad (7.2)$$

où :

$\Delta z = z_1 - z_2$: est la différence de niveau entre les points (1) et (2).

$H_{ex} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g}$: qui est appelée *hauteur exigée* et dans le cas où cette grandeur est donnée, nous l'appellerons *hauteur disponible* H_{disp} .

$$\sum_1^2 h = J_{12} + \sum_1^2 \zeta \frac{q^2}{2g} \quad \text{:perte de charge totale entre (1) et (2).}$$

D'après le relation (7.2), la hauteur exigée se compose de la hauteur géométrique jusqu'où s'élève le liquide au cours de son mouvement dans la conduite et de la somme de toutes les pertes de charge qui naissent dans cette conduite. Cette dernière somme est fonction du débit et on peut alors écrire :

$$H_{ex} = -\Delta z + \beta Q_v^m \quad (7.3)$$

où β et m prennent des valeurs différentes suivant le régime d'écoulement.

7.2.1.1 Cas du régime laminaire

Dans le cas où le régime d'écoulement est laminaire, nous aurons :

$$\sum_1^2 h = J_{12} + \sum_1^2 \zeta \frac{q^2}{2g} = \lambda \frac{l}{D} \frac{q^2}{2g} + \sum_1^2 \zeta \frac{q^2}{2g}$$

Pour les résistances locales et les nombres de Reynolds qui obéissent à une loi plutôt linéaire, on exprime souvent les pertes de charge locales à partir de la *longueur équivalente* l_e de la conduite, c'est-à-dire qu'on ajoute à la longueur réelle de la conduite une longueur qui correspond aux résistances locales considérées. On aura donc :

$$\sum_1^2 h = \lambda \frac{l}{D} \frac{q^2}{2g} + \lambda \frac{l_e}{D} \frac{q^2}{2g} = \frac{64}{Re} \frac{(l+l_e)}{D} \frac{1}{2g} \frac{16 Q_v^2}{\pi^2 D^4}$$

et en simplifiant :

$$\sum_1^2 h = \frac{128 \nu (l+l_e)}{\pi g D^4} Q_v \quad (7.4)$$

donc pour le régime laminaire : $m = 1$.

7.2.1.2 Cas du régime turbulent

Dans le cas où le régime d'écoulement est turbulent, nous aurons :

$$\sum_1^2 h = J_{12} + \sum_1^2 \zeta \frac{q^2}{2g} = \lambda \frac{l}{D} \frac{q^2}{2g} + \sum_1^2 \zeta \frac{q^2}{2g} = \left(\lambda \frac{l}{D} + \sum_1^2 \zeta \right) \frac{1}{2g} \frac{16 Q_v^2}{\pi^2 D^4}$$

et en simplifiant :

$$\sum_1^2 h = \left(\lambda \frac{l}{D} + \sum_1^2 \zeta \right) \frac{8 Q_v^2}{\pi^2 g D^4} \quad (7.5)$$

donc pour le régime turbulent : $m = 2$.

La formule (7.3), complétée par les relations (7.4) ou (7.5), selon le régime d'écoulement, est la formule principale employée pour le calcul des conduites simples. Elle exprime la caractéristique de la conduite.

7.2.1.3 Caractéristique d'une conduite

On appelle *caractéristique d'une conduite* la hauteur exigée portée en fonction du débit. Dans le cas où le régime d'écoulement est laminaire, la caractéristique de la conduite est représentée par une droite et dans le cas où le régime d'écoulement est turbulent, par une parabole du second degré (si λ est constant) ou presque (compte tenu de la variation de λ en fonction de \Re_e). La grandeur Δz est négative au cas où le liquide passe d'une hauteur plus basse à une hauteur plus élevée au cours de son mouvement. Elle est positive dans le cas contraire (Fig.7.2).

Le point d'intersection A détermine le débit au cas où le liquide se déplace de lui-même, c'est-à-dire seulement sous l'action de la différence de niveaux Δz . Dans ce cas, la hauteur exigée est nulle. Cette conduite est appelée *conduite à courant non forcé*.

7.2.1.4 Problèmes posés pour le calcul d'une conduite simple

Les différents cas que nous pouvons rencontrer dans les problèmes de calcul d'une conduite simple se résument aux cas suivants :

- 1^{er} cas : sont données le débit, les propriétés physiques du liquide ainsi que les dimensions, matière et rugosité de la conduite. *On détermine alors la hauteur exigée.*
- 2^{ème} cas : sont donnés la hauteur disponible, les propriétés physiques du liquide ainsi que les dimensions, matière et rugosité de la conduite. *On détermine alors le débit.*
- 3^{ème} cas : sont donnés le débit, la hauteur disponible, les propriétés physiques du liquide ainsi que toutes les propriétés de la conduite à part le diamètre. *On détermine alors le diamètre de cette conduite.*

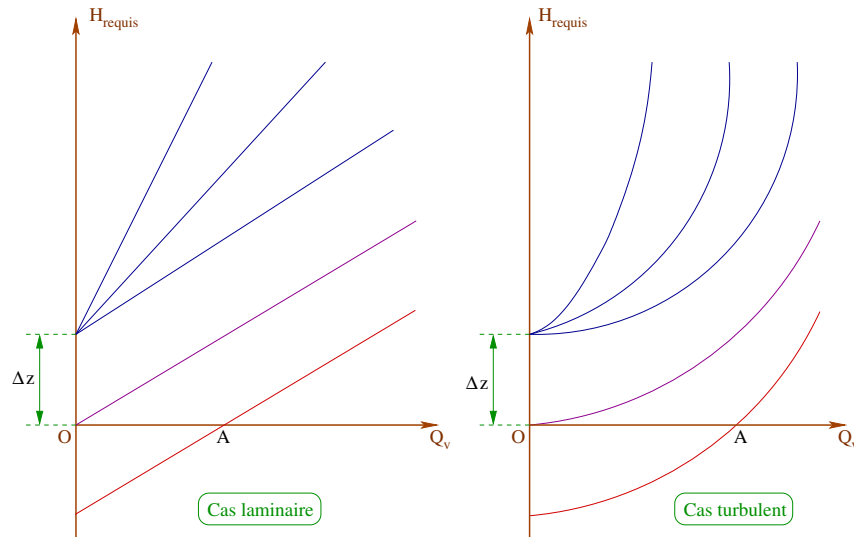


FIGURE 7.2: *Caractéristique d'une conduite.*

7.2.2 Conduites mixtes et conduites multiples

7.2.2.1 Conduite mixte

Considérons un tuyau mixte formé par exemple par 3 tronçons de longueurs et de diamètres différents, comprenant des résistances locales différentes et *reliés en série* (Fig.7.3).

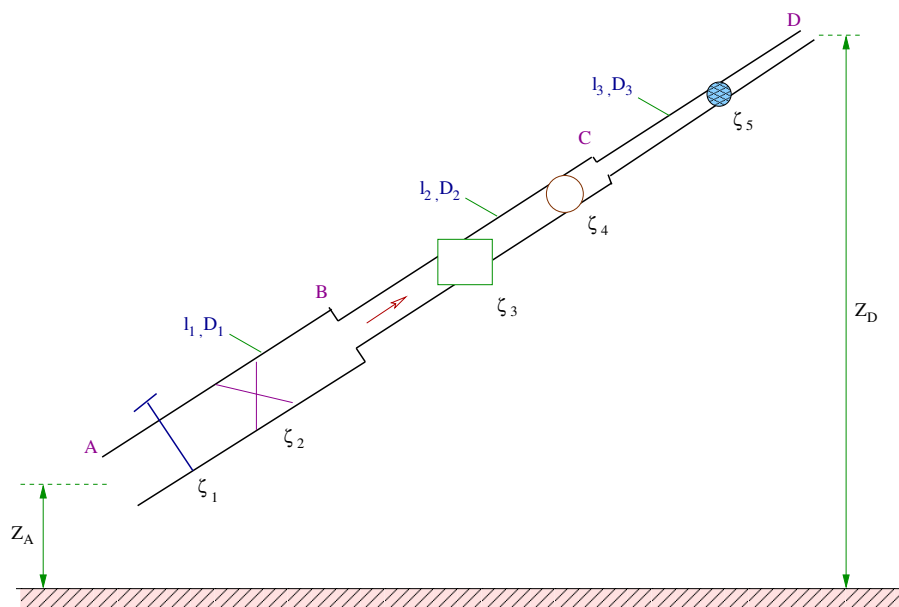


FIGURE 7.3: *Conduite mixte.*

Pour tracer la caractéristique globale de la conduite, on additionne, pour un même

débit Q_{v0} , les pertes de charge de chaque tronçon. C'est-à-dire, on additionne les ordonnées des trois caractéristiques pour une même valeur des abscisses (Fig.7.4).

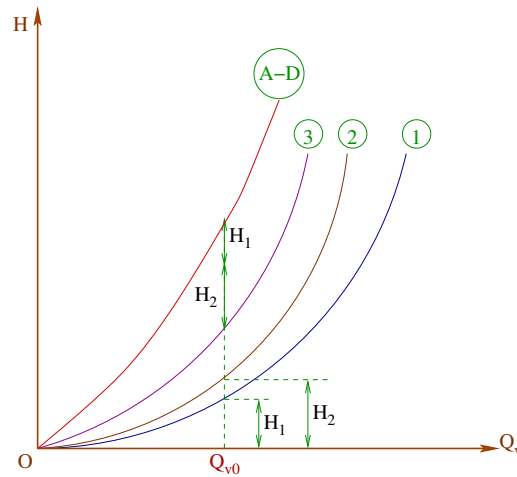


FIGURE 7.4: *Caractéristique d'une conduite mixte.*

La conservation du débit entre les point A et D nous montre que le débit qui circule dans chaque tronçon de cette conduite est le même. Par contre, la perte de charge totale entre ces deux points est égale à la somme de toutes les pertes de charge qui naissent dans chaque tronçon. Nous obtenons alors les équations principales suivantes :

$$Q_{v1} = Q_{v2} = Q_{v3}$$

$$\sum_A^D h = \sum_A^B h + \sum_B^C h + \sum_C^D h \quad (7.6)$$

Déterminons l'expression générale de cette perte de charge :

$$\sum_A^D h = J_{AD} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \frac{q_1^2}{2g} + \sum_{j=1}^m \zeta_j \frac{q_2^2}{2g} + \sum_{k=1}^l \zeta_k \frac{q_3^2}{2g}$$

Pour la perte de charge linéaire totale :

$$J_{AD} = J_{AB} + J_{BC} + J_{CD} = \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{q_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{q_2^2}{2g} + \lambda_3 \frac{l_3}{D_3} \frac{q_3^2}{2g}$$

$$\Rightarrow J_{AD} = \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_i \frac{l_i}{D_i^5} \right) \frac{8 Q_v^2}{\pi^2 g}$$

et les pertes de charge singulières totales :

$$h_s = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\zeta_i}{D_1^4} + \sum_{j=1}^m \frac{\zeta_j}{D_2^4} + \sum_{k=1}^l \frac{\zeta_k}{D_3^4} \right) \frac{8 Q_v^2}{\pi^2 g}$$

et finalement :

$$\sum_A^D h = \left\{ \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{l_i}{D_i^5} + \sum_{i=1}^n \frac{\zeta_i}{D_1^4} + \sum_{j=1}^m \frac{\zeta_j}{D_2^4} + \sum_{k=1}^l \frac{\zeta_k}{D_3^4} \right\} \frac{8 Q_v^2}{\pi^2 g} \quad (7.7)$$

n , m et l étant respectivement les nombres de singularités présentes au niveau des trois tronçons AB , BC et CD .

- Remarque :

Dans le cas le plus général, les vitesses au début (A) et à la fin (D) de la conduite sont différentes. L'expression de la hauteur exigée pour toute la conduite mixte doit comprendre la différence des hauteurs dynamiques à la fin et au début de la conduite. L'expression (7.3) deviendra alors :

$$H_{ex} = z_D - z_A + \frac{1}{2g} (q_D^2 - q_A^2) + \sum_A^D h = -\Delta z + \alpha Q_v^2 + \beta Q_v^m \quad (7.8)$$

avec :

$$\alpha = \frac{8}{\pi^2 g} \left(\frac{1}{D_D^4} - \frac{1}{D_A^4} \right)$$

7.2.2.2 Conduite multiple

Considérons un tuyau multiple formé par exemple par 3 tronçons de longueurs et de diamètres différents, comprenant des résistances locales différentes et *reliés en parallèle* (Fig.7.5).

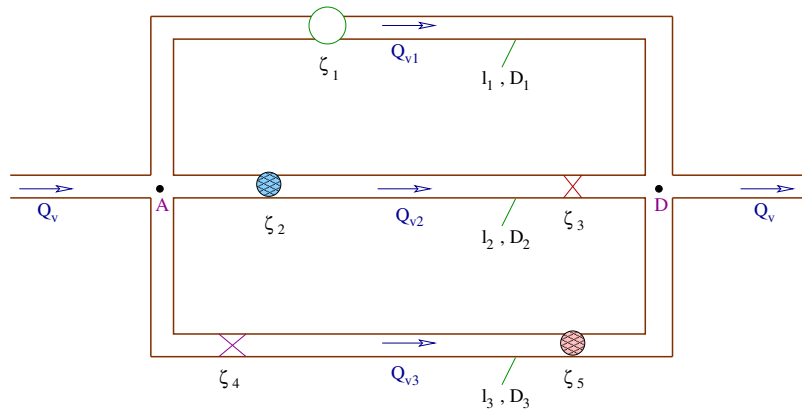


FIGURE 7.5: *Conduite multiple.*

La conservation du débit entre les point A et D nous montre que le débit qui circule dans la branche principale est égal à la somme des débits dans chaque tronçon de cette conduite. Par contre, la perte de charge totale entre ces deux points est la même dans chaque tronçon. En effet, en supposant que toutes ces branches se trouvent dans un plan horizontal, nous avons :

- Conservation du débit :

$$Q_v = Q_{v1} + Q_{v2} + Q_{v3} \quad (7.9)$$

- Equation de Bernoulli généralisée pour la branche N°1 :

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{q_A^2}{g} + z_A = \frac{p_D}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{q_D^2}{g} + z_D + \sum h_1$$

$$\Rightarrow \sum h_1 = \frac{p_A - p_D}{\rho g}$$

et de même pour les deux autres branches :

$$\sum h_2 = \frac{p_A - p_D}{\rho g} \quad \text{et} \quad \sum h_3 = \frac{p_A - p_D}{\rho g}$$

d'où finalement :

$$\sum_A^D h = \sum h_1 = \sum h_2 = \sum h_3 = \frac{p_A - p_D}{\rho g} \quad (7.10)$$

Ces pertes de charge peuvent être exprimées en fonction des débits correspondants sous la forme générale :

$$\sum h_1 = \beta_1 Q_{v1}^m$$

$$\sum h_2 = \beta_2 Q_{v2}^m \quad (7.11)$$

$$\sum h_3 = \beta_3 Q_{v3}^m$$

Les paramètres β et m se déterminent selon le régime d'écoulement, à l'aide des formules (7.4) ou (7.5).

Pour tracer la caractéristique globale de la conduite, on additionne, pour une même perte de charge H_0 , les débits de chaque tronçon. C'est-à-dire, on additionne les abscisses des trois caractéristiques pour une même valeur des ordonnées (Fig.7.6).

Les expressions que nous avons établi et qui se rapportent à des conduites multiples sont aussi applicables au cas où les tuyaux 1, 2 et 3 ne se rencontrent pas en un même

point D et amènent le liquide à des points différents à condition que la pression et la cote de leurs sections finales soient les mêmes. Au cas où cette condition n'est pas respectée, les tuyaux ne seront plus parallèles et doivent être considérés comme des conduites ramifiées (voir §7.2.3).

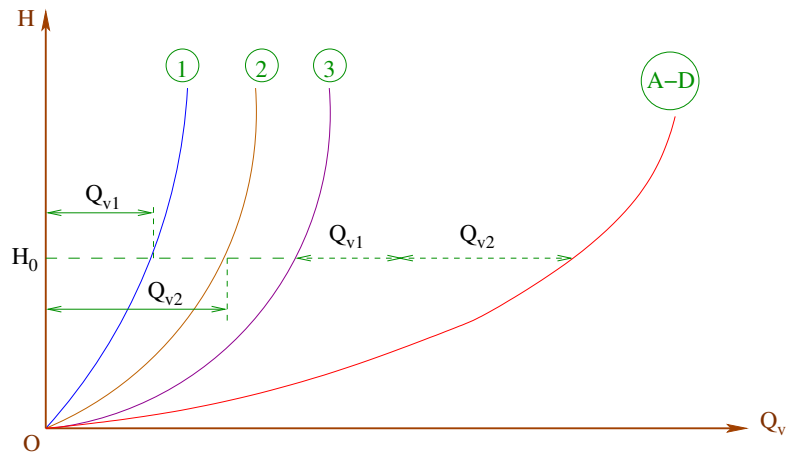


FIGURE 7.6: *Caractéristique d'une conduite multiple.*

7.2.2.3 Longueur équivalente

En pratique, les canalisations de diamètre graduellement variable ne sont utilisées que sur de très petites longueurs pour constituer des cônes ou réductions employés pour raccorder deux tuyaux de diamètres différents. La canalisation proprement dite est constituée en réalité de plusieurs tronçons successifs ayant chacun un diamètre constant. Dans un problème de distribution d'eau, il peut être commode de remplacer virtuellement une conduite mixte par une conduite de diamètre constant transportant le même débit avec la même perte de charge. Il serait alors très intéressant de déterminer la *longueur équivalente* de cette conduite. La règle approchée de Dupuit est souvent utilisée mais une formulation plus exacte pourra être aisément établie. Cette règle s'écrit :

$$l_e = \left(\frac{D}{D_1}\right)^5 l_1 + \left(\frac{D}{D_2}\right)^5 l_2 + \dots + \left(\frac{D}{D_n}\right)^5 l_n \quad (7.12)$$

- Exemple :

1- De l'huile circule du réservoir fermé A de cote 24 m par 150 m de tuyau neuf de fonte asphaltée de 15 cm de diamètre ($\varepsilon = 0,012 \text{ cm}$) au point B de cote 30 m (Fig.7.7). Quelle devra être la pression en A en kg/cm^2 pour que le débit de l'huile soit de 13 l/s ?

L'huile a une densité de 0,84 et une viscosité cinématique de $2,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

La sortie brusque du réservoir a pour coefficient de perte de charge locale $\zeta_s = 0,5$.

2- Si on veut changer ce tuyau par une conduite mixte constituée de deux tronçons montés en série de dimensions respectifs (100 m, 15 cm) et (50 m, 30 cm). Calculer le débit assuré par cette nouvelle conduite.

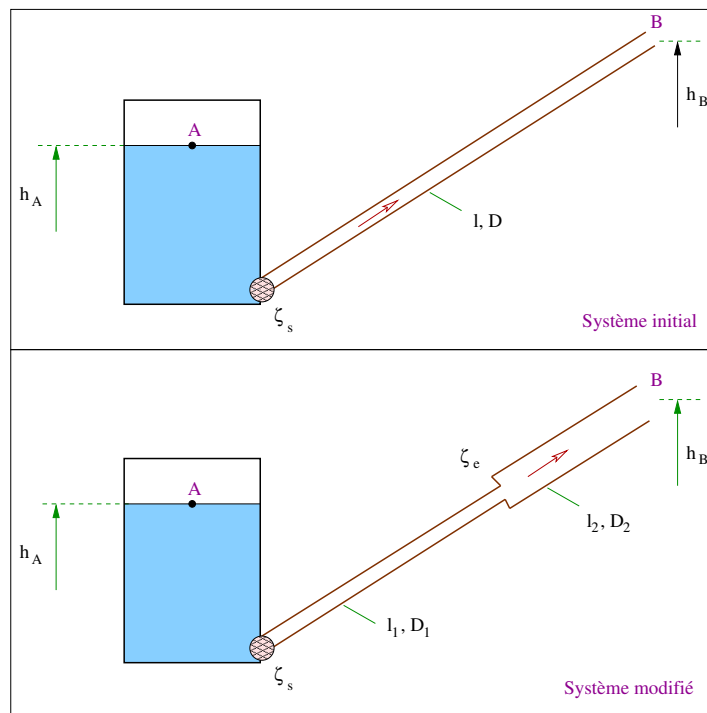


FIGURE 7.7: Exemple : Longueur équivalente.

Solution :

1- L'application de l'équation de Bernoulli généralisée entre les points A et B nous donne :

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{q_A^2}{g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{q_B^2}{g} + z_B + J_{AB} + \sum_A^B \zeta_s \frac{q^2}{2g}$$

En simplifiant cette équation ($q_A = 0$ et $p_B = 0$) et en remplaçant les expressions des pertes de charges on aura :

$$P_A = \frac{8 \rho Q_v^2}{\pi^2 D^4} + \rho g (z_B - z_A) + \frac{8 \rho \lambda l Q_v^2}{\pi^2 D^5} + \frac{8 \rho \zeta_s Q_v^2}{\pi^2 D^4}$$

Pour trouver la pression, il faut donc calculer le coefficient de pertes de charge linéaire λ . Pour cela, il faut d'abord déterminer le régime d'écoulement :

* Déterminons d'abord la vitesse de l'écoulement :

$$q = \frac{4 Q_v}{\pi D^2} = 0,735 \text{ m/s.}$$

Le nombre de Reynolds est :

$$\Re_e = \frac{Dq}{\nu} = 52546.4$$

et par suite, le régime d'écoulement est turbulent rugueux.

* Calculons maintenant le coefficient λ par la relation de Colebrook-White :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{2,51}{\Re_e \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3,71 D} \right] \Rightarrow \lambda = \frac{0,25}{\log^2 \left[\frac{2,51}{\Re_e \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3,71 D} \right]}$$

Cette équation non linéaire sera résolue par la méthode de Newton en commençant par la valeur initiale $\lambda = 0,02$. Nous aurons alors au bout de 5 itérations :

$$\text{itération 1 : } \lambda = 0,023567$$

$$\text{itération 2 : } \lambda = 0,023260$$

$$\text{itération 3 : } \lambda = 0,023284$$

$$\text{itération 4 : } \lambda = 0,023282$$

$$\text{itération 5 : } \lambda = 0,023282$$

La perte de charge linéaire associée est :

$$J = h_f = \lambda \frac{l}{D} \frac{q^2}{2g} = 0,63 \text{ m.}$$

La perte de charge singulière est :

$$h_s = \zeta_s \frac{q^2}{2g} = 0,0135 \text{ m.}$$

Finalement la pression au point A est de 56033 N/m^2 ou $0,56 \text{ kg/cm}^2$.

2- Dans le but de simplifier, utilisons la formule de Blench pour le calcul des coefficients λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1 = 0,79 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D_1}} = 0,022344 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0,79 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D_2}} = 0,015800.$$

Pour que les deux systèmes soient équivalents, il faut maintenir la même perte de charge pour les deux, c'est-à-dire :

$$\sum h = J + h_s = 0,6435 \text{ m} \quad (*).$$

Pour le système équivalent, nous avons :

$$\sum_A^B h = \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{q_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{q_2^2}{2g} + \varsigma_s \frac{q_1^2}{2g} + \varsigma_e \frac{q_1^2}{2g} \quad (**)$$

où ς_e est le coefficient de perte de charge singulière de l'élargissement brusque. Il peut être calculé par la relation suivante :

$$\varsigma_e = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 = 0,5625.$$

En introduisant l'équation de continuité : $q_1 D_1^2 = q_2 D_2^2$, en remplaçant toutes les valeurs numériques dans l'équation (**) et en égalisant avec l'équation (*), on obtient l'équation suivante :

$$0,80617331 q_1^2 = 0,6435$$

d'où la vitesse du fluide dans le premier tronçon : $q_1 = 0,8934 \text{ m/s}$.

Finalement, le débit véhiculé par le nouveau système équivalent sera :

$$Q_v = q_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = 0,015788 \text{ m}^3/\text{s}, \text{ soit environ } 15,8 \text{ l/s}.$$

Essayons maintenant d'établir une formule plus exacte que celle de Dupuit à partir de cet exemple :

En appliquant directement la relation de Dupuit, on aura la longueur équivalente du nouveau système :

$$l_e = \left(\frac{D}{D_1} \right)^5 l_1 + \left(\frac{D}{D_2} \right)^5 l_2 = \left(\frac{0,15}{0,15} \right)^5 100 + \left(\frac{0,15}{0,3} \right)^5 50 = 101,56 \text{ m}$$

Nous avons d'une part, pour la conduite mixte :

$$\sum_1^2 h = J_{12} + \sum_1^2 \zeta \frac{q^2}{2g} = \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{q_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{q_2^2}{2g} + \zeta_e \frac{q_1^2}{2g}$$

$$\sum_1^2 h = \left(\lambda_1 \frac{l_1}{D_1^5} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2^5} \right) \frac{8 Q_v^2}{\pi^2 g} + \frac{\zeta_e}{D_1^4} \frac{8 Q_v^2}{\pi^2 g}$$

et d'autre part, pour la conduite simple :

$$\sum_1^2 h = \lambda \frac{l_e}{D} \frac{q^2}{2g} = \left(\lambda \frac{l_e}{D^5} \right) \frac{8 Q_v^2}{\pi^2 g}$$

et en combinant les deux parties, nous aurons :

$$\lambda \frac{l_e}{D^5} = \lambda_1 \frac{l_1}{D_1^5} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2^5} + \frac{\zeta_e}{D_1^4}$$

et en fin la longueur équivalente :

$$l_e = \left(\frac{D}{D_1} \right)^5 \frac{\lambda_1}{\lambda} l_1 + \left(\frac{D}{D_2} \right)^5 \frac{\lambda_2}{\lambda} l_2 + \left(\frac{D}{D_1} \right)^4 \frac{\zeta_e}{\lambda} D$$

En appliquant cette dernière formule, nous aurons une longueur équivalente $l_e = 100,65 \text{ m}$.

7.2.3 Conduites ramifiées

Convenons d'appeler *conduite ramifiée* un ensemble de plusieurs conduites simples comportant une bifurcation. Soit une conduite principale qui se ramifie au point A , par exemple, en trois tuyaux de dimensions différentes et comportant différentes résistances hydrauliques locales (Fig.7.8).

Les cotes et les pressions des sections finales B , C et D pouvant être différentes, déterminons la relation qui existe entre la pression P_A et les débits dans les branches AB , AC et AD . La conservation du débit volumique nous donne tout de suite, comme pour une conduite multiple :

$$Q_v = Q_{v1} + Q_{v2} + Q_{v3} \quad (7.13)$$

L'équation de Bernoulli généralisée pour la branche N°1 nous donne :

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{q_A^2}{g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{q_B^2}{g} + z_B + \sum h_1$$

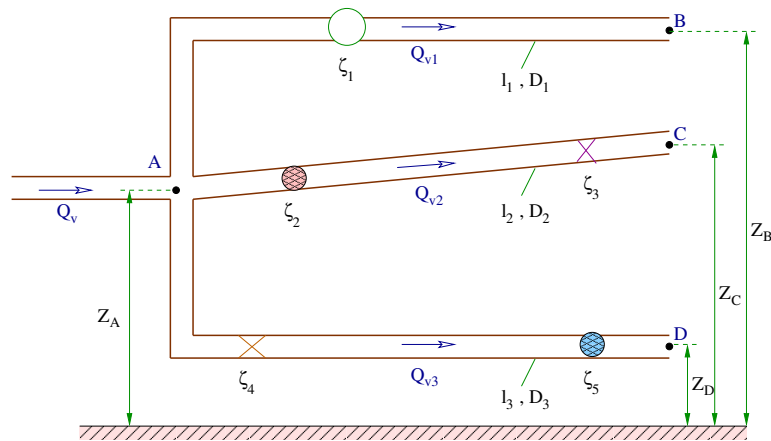


FIGURE 7.8: *Conduite ramifiée.*

En faisant abstraction de la différence des hauteurs dynamiques :

$$\Rightarrow \frac{p_A}{\rho g} = \frac{p_B}{\rho g} + (z_B - z_A) + \sum h_1$$

En regroupant les deux premiers termes du membre droit et en exprimant les pertes de charge en fonction du débit, comme nous l'avons fait ci-dessus (relations 7.11), nous aurons pour les trois branches :

$$\frac{p_A}{\rho g} = z_1 + \beta_1 Q_{v1}^m$$

$$\frac{p_A}{\rho g} = z_2 + \beta_2 Q_{v2}^m \tag{7.14}$$

$$\frac{p_A}{\rho g} = z_3 + \beta_3 Q_{v3}^m$$

avec :

$$z_1 = \frac{p_B}{\rho g} + (z_B - z_A) \quad ; \quad z_2 = \frac{p_C}{\rho g} + (z_C - z_A) \quad ; \quad z_3 = \frac{p_D}{\rho g} + (z_D - z_A)$$

Nous obtenons ainsi un système de quatre équations à quatre inconnues : Q_{v1} , Q_{v2} , Q_{v3} et P_A . Ce système pourra éventuellement être résolu par voie graphique de la manière suivante : On trace, en premier lieu, la caractéristique de chacun des tuyaux comme la variation de $\frac{P_A}{\rho g}$ en fonction de Q_v , en se servant des équations que nous venons d'obtenir ; ensuite on additionne ces caractéristiques de la même façon que pour les tuyaux reliés en parallèle, c'est-à-dire que nous devons additionner les abscisses (Q_v) pour une même valeur des ordonnées ($H = \frac{P_A}{\rho g}$) (Fig.7.9).

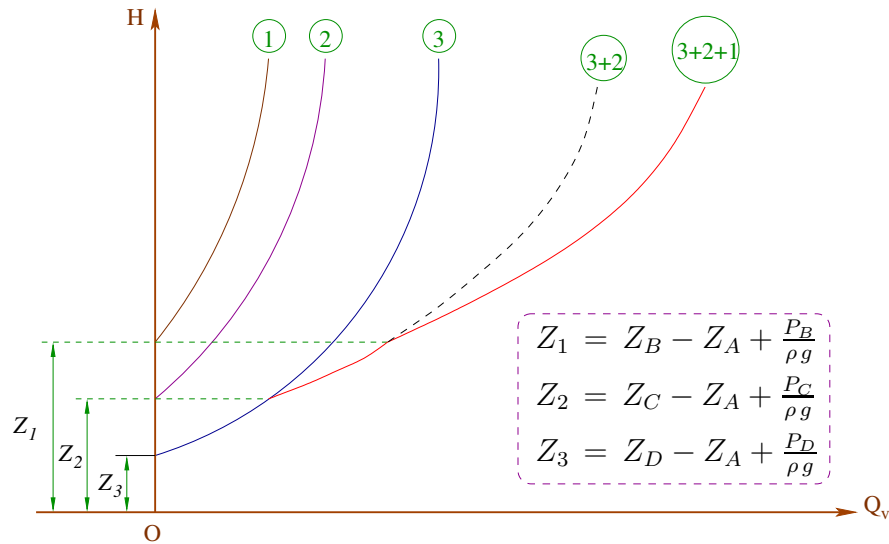


FIGURE 7.9: *Caractéristique d'une conduite ramifiée.*

La courbe en cascade que nous obtenons de cette manière est la caractéristique de la conduite ramifiée qui permet de déterminer la valeur des débits d'après la pression P_A et vice versa.

- Remarque :

Dans le cas où l'écoulement du fluide s'effectue dans le sens inverse, c'est-à-dire des points B , C et D vers le point A , les pertes de charge dans les équations précédentes changent de signe et doivent être portées vers le bas au cours du tracé des courbes.

7.2.4 Conduites complexes

Nous appellerons *conduite complexe* une conduite qui comprend une ou plusieurs ramifications.

Le calcul des conduites complexes aussi bien à écoulement libre qu'à alimentation par pompe s'effectue en général par voie grapho-analytique, c'est-à-dire à l'aide des caractéristiques.

Le calcul et le tracé de la caractéristique d'une conduite complexe s'effectue de la manière suivante. La conduite complexe doit être divisée en conduites simples dont chacune doit être calculée séparément puis on trace leurs caractéristiques ainsi qu'il a été décrit ci-dessus. Ensuite, on additionne les caractéristiques des éléments parallèles ou bien des éléments constituant une ramification, suivant les lois établies au § 7.2.2. De cette façon, on obtient les caractéristiques des conduites multiples aussi bien que ramifiées. Ensuite, on additionne les caractéristiques que l'on vient d'obtenir avec les caractéristiques des conduites mixtes, selon les formules (7.6).

En se basant sur ce principe, on peut tracer la caractéristique de n'importe quelle conduite complexe, aussi bien dans le cas où l'écoulement est laminaire que celui où il est turbulent.

7.3 Problèmes économiques relatifs aux conduites

Dans le cas d'un circuit industriel comportant une pompe ou une turbine, le diamètre de la conduite n'est pas imposé par les lois de l'écoulement. Il sera le plus souvent déterminé par des considérations économiques.

Si on choisit un petit diamètre, les frais d'investissement seront plus faibles, mais les pertes de charge en exploitation plus élevées (ce qui correspond à une dépense pour une pompe et à un manque à gagner pour une turbine). Au contraire, si on augmente le diamètre, les frais d'investissement augmentent et les pertes d'énergie en exploitation diminuent.

La solution idéale consiste à choisir un compromis entre ces deux choix comme l'indique la figure (Fig.7.10) ci-dessous. C'est-à-dire que le diamètre optimal est celui pour lequel la dépense annuelle totale de l'installation est minimale.

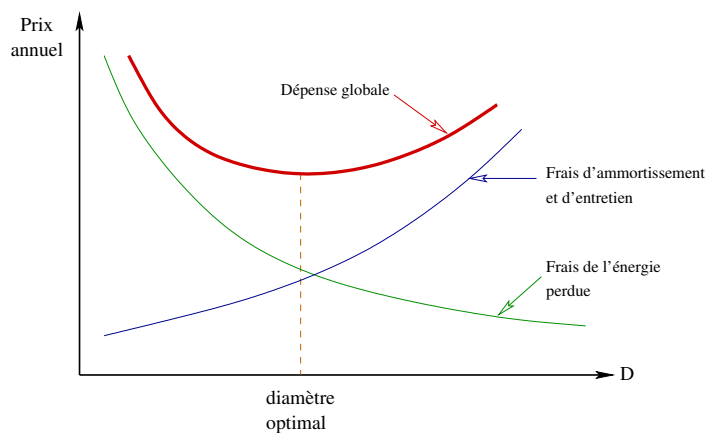


FIGURE 7.10: *Diamètre optimal d'une conduite.*

- Remarque :

Pour de petites installations courantes, cette méthode approximative conduit le plus souvent à des vitesses d'écoulement de l'ordre de 1 m/s pour l'eau et 10 m/s pour le gaz. Elle n'est pas absolument valable dans tous les cas, d'autres facteurs pouvant intervenir comme le risque de *coups de béliers*, l'impossibilité d'admettre de

trop grandes variations de charge en fonction du débit, l'utilisation de conduites de diamètre et d'épaisseur variables pour l'alimentation des turbines à haute pression, ...etc.

7.4 Calcul de l'épaisseur d'une conduite

Le fait de remplir un tube de fluide (liquide ou gaz) et de porter ce fluide à une certaine pression engendre des contraintes dans la matière du tube (acier ou autre). Lorsque la pression s'accroît, le tube commence par se déformer puis rompt. Cette rupture doit être évitée à tout prix car les produits transportés sont généralement très cher ou très dangereux.

Pour éviter la rupture ou la déformation permanente, avec un certain coefficient de sécurité, la contrainte τ engendrée par la pression dans le tube doit être limitée à la valeur fournie par la réglementation :

$$\tau < \tau_{max}$$

τ_{max} est la contrainte admissible maximale, elle est donnée par la réglementation et dépend du produit transporté par la conduite (gaz, pétrole, eau, produits chimiques,...etc.).

τ est calculée par la formule générale (7.15) qui suppose, pour les dimensions courantes, que l'épaisseur de la paroi est suffisamment faible pour que l'on puisse admettre l'hypothèse de contraintes également réparties sur tout le long de la section d'un tube :

$$\tau = \frac{P \cdot D}{2e} \quad (7.15)$$

où :

- τ : contrainte tangentielle ;
- P : pression de service dans la conduite ;
- D : diamètre de la conduite ;
- e : épaisseur de la conduite.

D'où l'on tire l'épaisseur minimale de la conduite qui doit résister à cette pression de service :

$$e > \frac{P D}{2 \tau_{max}} \quad (7.16)$$

On choisit, bien sûr, la valeur maximale normalisée.

7.5 Exercices

R1 : De l'huile de viscosité dynamique $0,0103 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ et de densité $0,85$ circule dans 3 km de conduite en fonte de 30 cm de diamètre au rythme de 44 l/s .

- 1- Quelle est la perte de charge dans le tuyau.
- 2- Que devient cette perte de charge si la conduite est à moitié pleine ?

On donne :

- pour le régime laminaire : $\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$;
- pour le régime turbulent : $\lambda = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}}$.

Rép : 1) $5,487 \text{ m}$; 2) $5,220 \text{ m}$.

R2 : De l'eau circule dans un tuyau horizontal de 15 cm de diamètre à la pression de 42 N/cm^2 . Quel est le débit volumétrique si la pression mesurée est de 14 N/cm^2 en un endroit où le diamètre s'est rétréci de $7,5 \text{ cm}$?

Rép :

R3 : Quelle est la puissance nécessaire pour transporter dans une conduite horizontale de $0,1 \text{ m}$ de diamètre et 10 km de long, $50 \text{ m}^3/\text{h}$ d'une huile de masse volumique 950 kg/m^3 et de viscosité dynamique $\mu = 0,2 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$.

Quel est l'inconvénient d'utiliser une seule pompe pour véhiculer ce débit ? Justifiez.

Rép : $157,4 \text{ kW}$.

R4 : Un réservoir A dont le niveau demeure constant à la cote 600 m alimente un réservoir B dont le niveau demeure aussi constant à la cote 520 m . La conduite d'alimentation, en fonte usagée, est constituée par : passage du réservoir A à la conduite par une entrée à arête vive ($\zeta_1 = 1,0$); tronçon de 200 m

de longueur et 100 mm de diamètre; tronçon de 300 m de longueur et 200 mm de diamètre ($\zeta_2 = 0,6$); robinet-vanne de 200 mm de diamètre ($\zeta_3 = 0,1$); tronçon de 100 m de longueur et 200 mm de diamètre; entrée à arête vive dans le réservoir B ($\zeta_4 = 0,5$). Déterminer le débit véhiculé.

Les coefficients de pertes de charge linéaire des deux conduites sont respectivement $0,048$ et $0,038$.

Rép : $0,031 \text{ m}^3/\text{s}$.

R5 : De l'huile de viscosité cinématique $2.10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ et de masse volumique 950 kg/m^3 circule dans 100 m de conduite ($\varepsilon/D = 0,0002$) de 30 cm de diamètre avec une perte de charge linéaire de 8 m .

Trouver la vitesse moyenne ainsi que le débit véhiculé par cette conduite.

On supposera le régime turbulent et on utilisera la relation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.71 D} \right).$$

Rép : $4,89 \text{ m/s}$; $0,345 \text{ m}^3/\text{s}$.

R6 : On considère le système de conduites schématisé ci-dessous.

On donne :

$P_A = 0,550 \text{ N/mm}^2$; $Z_A = 30,5 \text{ m}$; $Z_B = 24,3 \text{ m}$; $Q_v = 340 \text{ l/s}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$; $L_1 = 914 \text{ m}$; $L_2 = 608 \text{ m}$; $L_3 = 1216 \text{ m}$; $D_1 = 300 \text{ mm}$; $D_2 = 200 \text{ mm}$; $D_3 = 400 \text{ mm}$; $\lambda_1 = 0,005$; $\lambda_2 = 0,0045$; $\lambda_3 = 0,0043$.

On négligeant les pertes de charge locales calculer :

- 1- Le débit qui circule dans chaque tronçon.
- 2- La pression au point B.

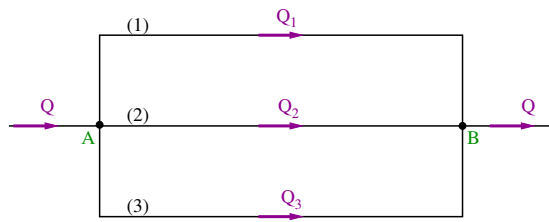


FIGURE 7.11: R6.

Rép : 1) $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$; $0,047 \text{ m}^3/\text{s}$; $0,192 \text{ m}^3/\text{s}$;
2) $6,108 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

R7 : Soit le schéma de l'installation hydraulique ci-dessous :

On donne :

- perte de charge totale au niveau de la turbine : $H_{CR} = 60 \text{ m}$;
- perte de charge totale dans la conduite 1 : $H_1 = 3 \frac{q_1^2}{2g}$;
- perte de charge totale dans la conduite 2 : $H_2 = 2 \frac{q_2^2}{2g}$;
- hauteurs géométriques : $h_1 = 75 \text{ m}$;
 $h_2 = 45 \text{ m}$; $h = 30 \text{ m}$;
- diamètres des conduites : $D_1 = 30 \text{ cm}$;
 $D_2 = 60 \text{ cm}$;
- pression à la sortie de la pompe : $P_P = 5,1 \text{ bar}$;

- Accélération de la pesanteur :
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

- 1- Calculer le débit volumique qui circule dans les conduites.
- 2- Calculer la hauteur de pression en R.
- 3- Tracer la ligne de charge de l'installation.

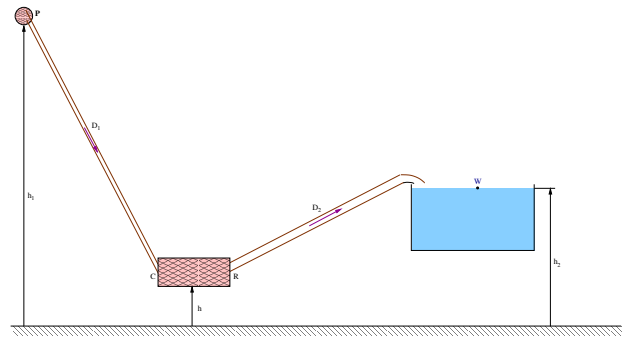


FIGURE 7.12: R7.

Rép : 1) $0,984 \text{ m}^3/\text{s}$; 2) $15,62 \text{ m}$.

R8 : Déterminer la pression P_1 exigée à la sortie de la pompe de gavage d'un avion à débit de kérosène 1200 kg/h , la longueur de la conduite en Duralumin allant du réservoir d'alimentation jusqu'à la pompe principale est de 5 m , son diamètre est 15 mm , la pression P_2 exigée à l'entrée de la pompe principale est de $0,3 \text{ bar}$, la viscosité cinématique du kérosène est $0,045 \text{ cm}^2/\text{s}$ et sa masse volumique 820 kg/m^3 .

On donne :

- pour le régime laminaire : $\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}_e}$;
- pour le régime turbulent : $\lambda = \frac{0,316}{\mathcal{R}_e^{0,25}}$.

N.B : Ne pas tenir compte de la hauteur du liquide dans le réservoir.

Légende :

- 1- Réservoir d'alimentation.
- 2- Pompe de gavage.
- 3- Coudes ($\zeta_c = 1.2$).
- 4- Capteur du débitmètre ($\zeta_{cd} = 7$).
- 5- Robinet de fermeture ($\zeta_r = 1.5$).
- 6- Filtre ($\zeta_f = 2$).
- 7- Pompe principale à carburant.
- 8- Réacteur ou chambre de combustion.

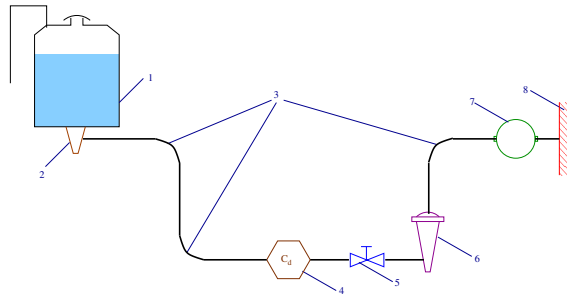


FIGURE 7.13: R8.

Viscosité cinématique de l'eau : $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Rugosité relative de la conduite 0,0002.

Dans le cas où le régime d'écoulement est turbulent, utiliser la relation de Colebrook-White.

Rép : 15,68 m.

Rép : 1,85 bar.

R9 : On considère un grand réservoir de diamètre D contenant du liquide (ρ) à la hauteur h . Le réservoir se vide à travers une conduite (L, d) horizontale attachée à sa base. La pression au dessus de la surface du liquide est P_t . La vitesse à la sortie du tube est q_e à la pression atmosphérique P_a . Trouver l'équation qui régie l'écoulement du fluide pour n'importe quelle hauteur et à n'importe quel instant.

On donne les coefficients de pertes de charge linéaire λ et singulières ζ_1 et ζ_2 respectivement de la sortie du réservoir et de la sortie de la conduite ainsi que la vitesse moyenne q_m dans la conduite.

On suppose que les vitesses sont uniformes au niveau de la surface du liquide ainsi qu'à l'entrée et à la sortie de la conduite.

Rép :
$$\frac{P_a - P_t}{\rho g} + \frac{q_e^2}{2g}(1 + \zeta_2) + \lambda \frac{L}{d} \frac{q_m^2}{2g} + \frac{\zeta_1}{2g} \left(\frac{D}{d}\right)^4 \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = h$$

R10 : Une conduite horizontale de diamètre intérieur 100 mm et de longueur 200 m est attachée au fond d'un grand réservoir d'eau. Le coefficient de perte de charge de la sortie du réservoir est de 0,5. Déterminer la hauteur d'eau qui doit être maintenue dans le réservoir pour produire un débit de $0,03 \text{ m}^3/\text{s}$.

On donne :

R11 : De l'eau de viscosité dynamique $0,001 \text{ kg/m.s}$ circule dans 1 m de conduite de 30 cm de diamètre au rythme de $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$. La rugosité relative de cette conduite est de 3.10^{-4} . Calculer la perte de pression dans le tuyau.

On donne :

- pour le régime laminaire : $\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}_e}$;

- pour le régime turbulent :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{\mathcal{R}_e \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.71 D} \right).$$

Rép :

R12 : Calculer la puissance de la pompe pour transporter l'eau de A à D.

On donne :

- $Q_v = 10 \text{ l/s}$; $\varepsilon = 0,1 \text{ mm}$; $z_A = 5 \text{ m}$;
 $z_D = 47 \text{ m}$;

- $L_a = 15 \text{ m}$; $D_a = 125 \text{ mm}$; $L_r = 925 \text{ m}$;
 $D_r = 80 \text{ mm}$;

- C_r : Crépine ($\zeta_{cr} = 3$) ;

- C_l : Clapet ($\zeta_{cl} = 1.2$) ;

- C_d : Coude ($\zeta_{cd} = 0.134$) ; E_r : Entrée de réservoir ($\zeta_{Er} = 1$) ;

- Dans le cas où le régime d'écoulement est turbulent, utiliser la relation de Colebrook-White.

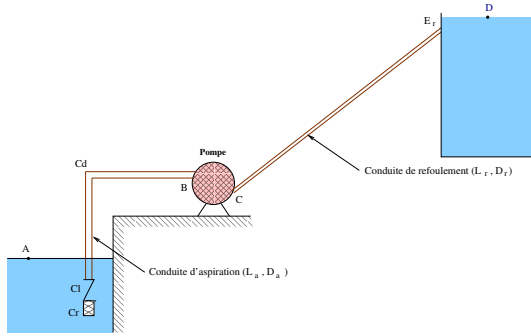


FIGURE 7.14: R12.

Rép : 9,31 kW.

R13 : La pompe montré sur la figure apporte à l'eau une puissance de 25 kW et provoque un débit volumique de 0,04 m³/s. Déterminer le débit qui sera véhiculé si on enlève la pompe du système. On suppose que dans les deux cas (avec ou sans pompe) le coefficient de perte de charge linéaire est $\lambda = 0,016$ et que les pertes de charge singulières sont négligeables dans tout le système.

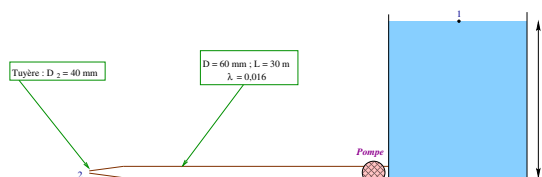


FIGURE 7.15: R13.

Rép : 0,0288 m³/s.

R14 : Trouver le débit en l/s qui circule dans la conduite pour $H = 10\text{ m}$.
On donne : $l_1 = 30\text{ m}$; $l_2 = 12\text{ m}$; $l_3 = 60\text{ m}$;
 $D = 15\text{ cm}$; $\lambda = 0,023$; $\zeta_{SR} = 0,5$;
 $\zeta_C = 0,9$; $\zeta_S = 10$.

- Déterminer H si le débit véhiculé est de 60 l/s.

La rugosité relative de la conduite est 0,0017. Dans le cas du régime turbulent, utiliser la relation de Colebrook-White.

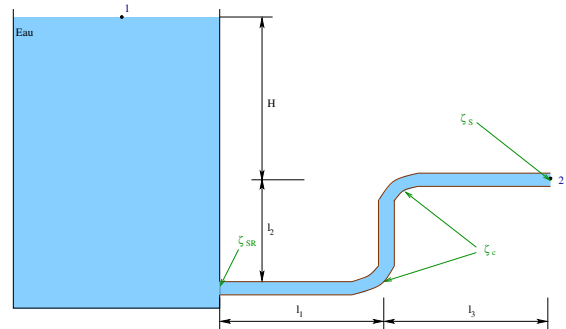


FIGURE 7.16: R14.

Rép : 46,45 l/s ; 16,614 m.

R15 : On pompe de l'huile de densité 0,86 par un tuyau horizontal de diamètre 5 cm et de longueur 300 m. Le débit véhiculé est de 1,2 l/s et la perte de charge entre les extrémités du tuyau vaut 206 kPa. En faisant l'hypothèse d'un régime d'écoulement laminaire que l'on justifiera à posteriori, calculer les viscosités cinématique et dynamique de l'huile.

Rép : $102 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$; 0,0877 kg/m.s.

R16 : Soit deux réservoirs A et B situés respectivement aux cotes Z_A et Z_B . Ils sont reliés par 3 conduites 1, 2 et 3 disposées en parallèle et de diamètres respectifs D , $2D$ et $3D$. Ces conduites ont la même longueur L et le même coefficient de perte de charge linéaire. En négligeant les pertes de charge singulières calculer les débits volumiques dans les conduites 2 et 3 sachant que celui dans la

conduite 1 est $Q_{v1} = 0,05 m^3/s$.

Rép : $Q_{v2} = 0,2828 m^3/s$;

$Q_{v3} = 0,7794 m^3/s$.

R17 : De l'eau circule par gravité entre deux grand réservoirs à travers une conduite de longueur $L = 250 m$ et de rugosité relative $0,003$ et de rugosité moyenne $0,15 mm$. Trouver la différence de hauteur ($Z_1 - Z_2$) entre les réservoirs afin de maintenir un débit de $0,007 m^3/s$.

On donne :

$\nu = 10^{-6} m^2/s$; $g = 9,81 m/s^2$; $\zeta_{ER} = 0,5$; $\zeta_{SR} = 1,0$.

Dans le cas où le régime d'écoulement est turbulent, utiliser la relation de Colebrook-White.

Rép : $88,107 m$.

R18 : De l'eau circule par gravité entre deux grand réservoirs à travers une conduite ($L = 4500 m$, $D = 4 cm$) de rugosité relative $0,003$. Trouver le débit en m^3/h qui circule dans cette conduite si la différence de hauteur entre les réservoirs est de $100 m$ et si les pertes de charge sont négligeables.

On supposera que le régime d'écoulement est turbulent et on utilisera la relation de Colebrook-White.

Rép : $Q_v = 3,492 m^3/h$.

R19 : De l'eau circule par gravité entre deux grand réservoirs à travers une conduite de longueur $L = 1000 m$ et de rugosité moyenne $3 mm$ avec un débit de $1 m^3/s$. Si la différence de hauteur entre les réservoirs est de $10 m$ et si les pertes de charge sont négligeables, calculer le diamètre de cette conduite.

On supposera que le régime d'écoulement est turbulent et on utilisera la relation de Colebrook-White.

Rép : $D = 0,748 m$.

R20 : L'eau est drainée d'un grand réservoir pressurisé ($P_1 = 50 KPa$) à travers une conduite ($L = 200 m$, $D = 0,1 m$, $\varepsilon = 0,0008 m$). Le travail communiqué à la turbine est de $1,16 KJ/Kg$. Calculer le débit véhiculé par cette conduite.

On supposera que le régime d'écoulement est turbulent, et on utilisera la relation de Colebrook-White.

On donne :

$h = 200 m$; $\zeta_v = 5,0$; $\zeta_c = 1,0$.

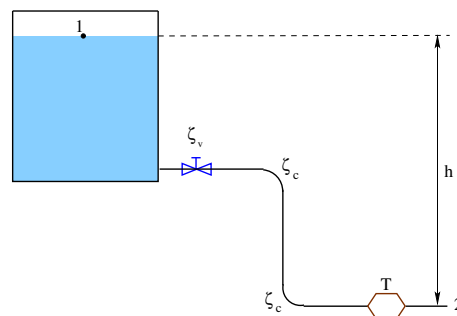


FIGURE 7.17: R20.

Rép : $Q_v = 0,0375 m^3/s$.

R21 : On considère le système de conduites schématisé ci-dessous avec :

$Q_v = 147 l/s$; $g = 9,81 m/s^2$; $L_1 = 914 m$; $D_1 = 300 mm$; $\lambda_1 = 0,005$; $L_2 = 608 m$; $D_2 = 200 mm$; $\lambda_2 = 0,0045$.

En négligeant les pertes de charge locales calculer le débit d'eau qui circule dans chaque tronçon.

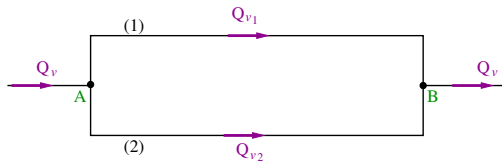


FIGURE 7.18: R21.

Rép : $0,1000 \text{ m}^3/\text{s}$; $0,047 \text{ m}^3/\text{s}$.

R22 : De l'eau est pompée d'un grand réservoir vers un autre à travers une conduite horizontale ($L = 30 \text{ m}$, $D = 30 \text{ cm}$). En négligeant les pertes de charge locales déterminer la puissance maximale de la pompe pour que l'écoulement reste laminaire.

Rép : $P_{max} = 0,0043 \text{ W}$.

R23 : Quand la vanne est fermée l'eau s'écoule de réservoir A vers B (Fig.R23). Quel est le débit qui s'écoulera dans la branche (3) quand la vanne est ouverte?. Négliger toutes les pertes de charge singulières et supposer le même coefficient de pertes de charge linéaire (0.02) pour toutes les conduites.

On donne :

$$L_1 = 80 \text{ m} ; L_2 = 40 \text{ m} ; L_3 = 75 \text{ m} ;$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = 100 \text{ mm} ; g = 9.81 \text{ m/s}^2.$$

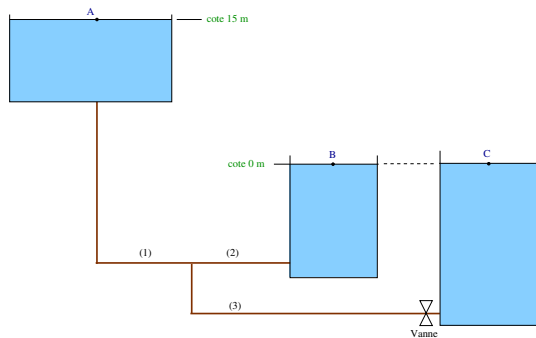


FIGURE 7.19: R23.

Rép : $Q_{v3} = 0,0131 \text{ m}^3/\text{s}$.

R24 : Même exercice que **R23** avec des conduites en acier ($\varepsilon = 0.045 \text{ mm}$) et les coefficients de perte de charge linéaire inconnus. Supposer l'écoulement turbulent dans les trois conduites et utiliser la formule de Colebrook-White.

Rép : $Q_{v1} = 0,0331 \text{ m}^3/\text{s}$;

$$Q_{v2} = 0,0193 \text{ m}^3/\text{s} , Q_{v3} = 0,0138 \text{ m}^3/\text{s}.$$

R25 : Quels doivent être les diamètres des conduites (2) et (3) pour qu'elles transportent le même débit d'eau de $0,02 \text{ m}^3/\text{s}$.

On donne :

$$h = 35 \text{ m} ; h_0 = 10 \text{ m} ; D_1 = 100 \text{ mm} ;$$

$$L_1 = 60 \text{ m} ; \lambda_1 = 0,02 ; L_2 = 30 \text{ m} ;$$

$$\lambda_2 = 0,025 ; L_3 = 45 \text{ m} ; \lambda_3 = 0,027.$$

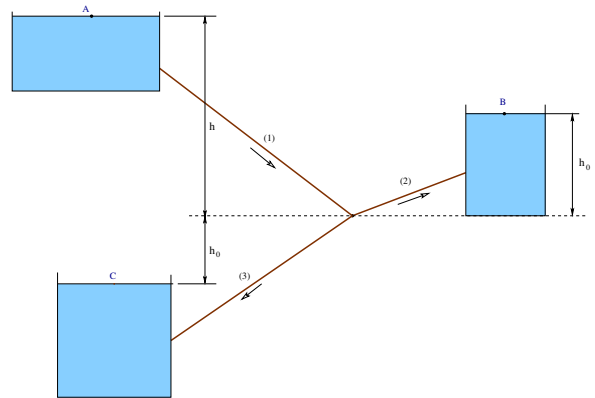


FIGURE 7.20: R25.

Rép : $D_2 = 76,24 \text{ mm}$; $D_3 = 66,88 \text{ mm}$.

R26 : Quelle longueur de tuyau de 15 cm de diamètre peut remplacer le système de tuyaux ci-dessous ?

On donne :

$\zeta_1 = 8,0$; $\zeta_2 = 0,5$; $\zeta_3 = 0,7$; $\zeta_4 = 1,0$;
 $\zeta_5 = 0,7$; $\zeta_6 = 6,0$; $\zeta_7 = 0,5$; $\zeta_8 = 3,0$.

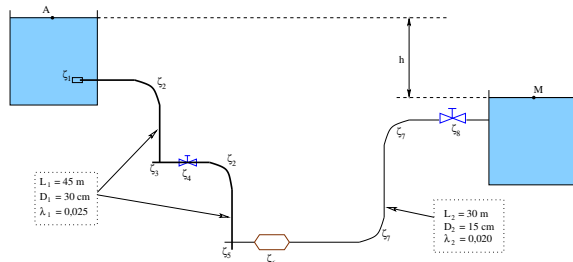


FIGURE 7.21: R26.

Rép : $L_{eq} = 117 m$.

R27 : Pour le système hydraulique **R25**, déterminer la répartition des débits dans les trois branches.

On donne :

$h = 35 m$; $h_0 = 10 m$; $D_1 = 15 cm$;
 $D_2 = 7,5 cm$; $D_3 = 10 cm$; $L_1 = 244 m$;
 $L_2 = 61 m$; $L_3 = 91 m$; $Z_A = 26 m$;
 $Z_B = 7,6 m$; $\lambda_1 = 0,03$; $\lambda_2 = 0,03$;
 $\lambda_3 = 0,03$; $Z_C = 0 m$; $g = 9,81 m/s^2$.

Rép : $Q_{v1} = 0,037 m^3/s$;
 $Q_{v2} = 0,011 m^3/s$; $Q_{v3} = 0,026 m^3/s$.

R28 : L'eau est drainée d'un grand réservoir à travers une conduite droite ($L = 365,76 m$; $D = 76,2 mm$) au rythme de $0,34 m^3/mn$. L'extrémité de la conduite, située à $12,19 m$ de la surface libre du réservoir, est en contact direct avec l'atmosphère. En négligeant les pertes de charge locales, calculer le coefficient de pertes de charge linéaire.

Rép : $0,032$.

R29 : On considère un système de deux conduites en série séparées par une singula-

rité de type rétrécissement brusque et contenant chacune 2 coudes. Déterminer la perte de charge du système équivalent si la longueur équivalente de chaque coude est de 40 fois son diamètre. On utilisera la relation de Karman-Nikuradse.

On donne : $L_1 = 50 m$; $L_2 = 50 m$;
 $D_1 = 50 mm$; $D_2 = 38 mm$; $\varepsilon_1 = 0,02$;
 $\varepsilon_2 = 0,02$; $\rho = 815 Kg/m^3$;
 $Q_m = 12000 Kg/h$; $g = 9,81 m/s^2$;
 $\zeta_R = 0,2$ (prise/seconde conduite).

Rép : $19,55 m$.

R30 : L'eau est drainée d'un grand réservoir A vers un grand réservoir B à travers une conduite composée de deux tronçons en série. Calculer le débit volumique qui circule dans cette conduite.

On donne :

$L_1 = 500 m$; $L_2 = 500 m$; $D_1 = 12 cm$;
 $D_2 = 6 cm$; $\lambda_1 = 0,02$; $\lambda_2 = 0,02$;
 $Z_A = 35 m$; $Z_B = 5 m$; $\zeta_{SR} = 0,5$; $\zeta_R = 7,0$;
 $\zeta_{ER} = 1,0$; $g = 9,81 m/s^2$.

Rép : $5,26 \cdot 10^{-3} m^3/s$.

R31 : Calculer la pression nécessaire à la sortie de la pompe pour élever l'eau jusqu'à un grand réservoir avec un débit volumique de $0,01 m^3/s$. Les pertes de charge singulières sont négligeables dans tout le système et on utilisera, dans le cas du régime turbulent, la relation de Colebrook-White.

On donne :

$D = 75 mm$; $L = 100 m$; $\varepsilon = 0,15 mm$;
 $h = 10 m$.

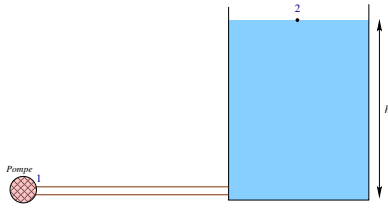


FIGURE 7.22: R31.

Rép : $2,8 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

R32 : Une conduite en acier transporte de l'eau au rythme de $2,035 \text{ m}^3/\text{s}$ avec une vitesse de $1,8 \text{ m/s}$, la pression de service étant de $17,70 \text{ kg/cm}^2$. Quelle est l'épaisseur minimale de cette conduite sachant que la contrainte admissible maximale donnée par réglementation est de 1130 kg/cm^2 .

Rép : $0,94 \text{ cm}$.

R33 : De l'huile circule d'un grand réservoir fermé A (cote 24 m) à travers 150 m de conduite neuve de 15 cm de diamètre et de rugosité absolue 0.012 cm au point B (cote 30 m) sortant à l'atmosphère. Quelle devra être la pression en A en kg/cm^2 pour que le débit de l'huile soit de 13 l/s .

La densité de l'huile est de 0.84 et sa viscosité cinématique de $2,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Le coefficient de perte de charge de la sortie du réservoir est de $0,5$.

Dans le cas où le régime d'écoulement est turbulent, utiliser la relation de Colebrook-White.

Rép : $1,57 \text{ kg/cm}^2$.

R34 : A- La pompe \mathbf{P} refoule avec une pression de 830 kPa de l'eau à la température $t = 35^\circ\text{C}$ avec un débit de $0.12 \text{ m}^3/\text{s}$ à travers une conduite en fer galvanisé ($\varepsilon = 0,015 \text{ cm}$)

de 25 cm de diamètre. Déterminer la pression de l'eau à l'entrée du réservoir et en déduire la hauteur jusqu'à la surface libre.

On donne :

$$L_1 = 400 \text{ m}; L_2 = 200 \text{ m}; L_3 = 300 \text{ m};$$

$$\alpha = 15^\circ; \zeta_3 = 1.0.$$

Pour les coudes à angles vifs :

$$\zeta = 0,9457 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2,047 \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Viscosité cinématique de l'eau [m^2/s] :

$$\nu = \frac{1,8 \cdot 10^{-6}}{1 + 0,0368 t + 0,000221 t^2}$$

Masse volumique de l'eau [kg/m^3] :

$$995,649 \text{ à } 30^\circ\text{C} \text{ et } 992,22 \text{ à } 40^\circ\text{C}.$$

Dans le cas où le régime d'écoulement est turbulent, utiliser la relation de Colebrook-White.

B- On veut changer ce tuyau par une conduite mixte de A à D constituée de deux tronçons montés en série de dimensions respectifs ($644,68 \text{ m}; 25 \text{ cm}$) et ($250 \text{ m}; 30 \text{ cm}$). Calculer le débit assuré par cette nouvelle conduite afin de maintenir la même pression à l'entrée du réservoir.

On donne :

$$\zeta = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2; \lambda = 0,79 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$$

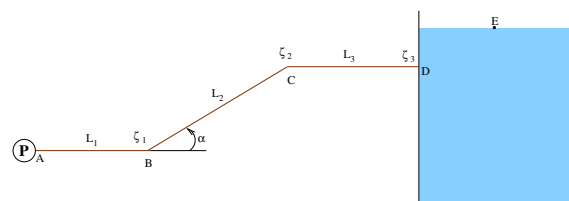


FIGURE 7.23: R34.

Rép : $P_D = 1,217828 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$; $h = 2,0582 \text{ m}$; $Q_v = 0,1283 \text{ m}^3/\text{s}$.

R35 : Un fluide de viscosité cinématique ν s'écoule dans une conduite mixte formée par deux tronçons en série de diamètres respectifs 250 mm et 150 mm . Si le nombre de Reynolds dans le premier tronçon est 2000 , quel sera le régime d'écoulement dans le second tronçon ? Justifiez votre réponse.

Rép : $Re_2 = 3333,33$ (régime turbulent).

R36 : Soit une conduite rouillée transportant un débit d'eau de $0,0566 \text{ m}^3/\text{s}$. Si on remplace cette ancienne conduite par une conduite neuve de diamètre inférieur, est-il vraie que cette nouvelle conduite peut transporter le même débit avec une perte de charge unitaire inférieur ? Justifiez votre réponse par les calculs.

On donne :

Pour la conduite rouillée :

$D_r = 15,24 \text{ cm}$; rugosité relative : $0,01$.

Pour la conduite neuve :

$D_n = 12,70 \text{ cm}$; rugosité absolue : $0,002 \text{ cm}$.

Si le régime est turbulent, utiliser la relation de Karman-Nikuradse.

Rép : $J_n = 0,86 J_r$.

R37 : L'eau est drainée d'un grand réservoir A vers un grand réservoir B à travers une conduite composée de trois tronçons en série. Déterminer la dénivellation ($z_A - z_B$) pour que le débit volumique véhiculé soit de $0,11 \text{ m}^3/\text{s}$.

On donne : $L_1 = 600 \text{ m}$; $L_2 = 900 \text{ m}$;

$L_3 = 1500 \text{ m}$; $D_1 = 300,0 \text{ mm}$;

$D_2 = 428,5 \text{ mm}$; $D_3 = 535,6 \text{ mm}$;

$\zeta_{SR} = 1,0$; $\zeta_1 = 0,3$; $\zeta_2 = 0,2$; $\zeta_{ER} = 0,5$;

$\varepsilon = 0,15 \text{ mm}$ (pour toutes les conduites).

Si le régime est turbulent, utiliser la relation de Karman-Nikuradse.

Rép : $z_A - z_B = 5,75 \text{ m}$.

R38 : Déterminer la puissance de la pompe ($Z_P = 3 \text{ m}$) qui doit faire monter un débit d'eau de 130 l/s d'un grand réservoir A ($Z_A = 13 \text{ m}$) jusqu'à un grand réservoir D ($Z_D = 65 \text{ m}$). Les conduites d'aspiration ($L_a = 120 \text{ m}$; $D_a = 30 \text{ cm}$) et de refoulement ($L_r = 300 \text{ m}$; $D_r = 25 \text{ cm}$) sont en acier ($\varepsilon = 0,015 \text{ cm}$). Le coefficient de perte de charge local à la sortie du réservoir A est $\zeta_1 = 0,5$, celui de l'entrée du réservoir D est $\zeta_2 = 1,0$. Les pertes de charge au niveau de la pompe sont négligeables.

Tracer la ligne de charge de l'installation.

Dans le cas où le régime d'écoulement est turbulent, utiliser la relation de Colebrook-White.

Rép : $P_f = 79.351 \text{ KW}$.

R39 : Deux conduites qui se rejoignent en un point alimentent une troisième conduite en eau à 40 °C ($\nu = 0.658 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$). Sachant que le débit dans la première conduite est $Q_{v1} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$, calculer le débit volumique maximal dans la deuxième conduite pour obtenir un écoulement laminaire dans la troisième. On donne :

$D_1 = 6 \text{ mm}$; $D_2 = 5 \text{ mm}$; $D_3 = 7 \text{ mm}$.

Rép : $P_f = 79.351 \text{ kW}$.

R40 : Déterminer la puissance de la pompe ($Z_B = Z_C$) qui doit faire monter un débit d'eau de 120 l/s d'un grand réservoir A ($Z_A = 5\text{ m}$) jusqu'à un grand réservoir D ($Z_D = 70\text{ m}$). Les conduites d'aspiration ($L_a = 100\text{ m}$; $D_a = 28\text{ cm}$) et de refoulement ($L_r = 600\text{ m}$; $D_r = 24\text{ cm}$) sont en acier ($\varepsilon = 0.012\text{ cm}$). Le coefficient de perte de charge local à la sortie du réservoir A est $\zeta_1 = 0.5$, celui de l'entrée du réservoir D est $\zeta_2 = 1.0$. Les pertes de charge au niveau de la pompe sont négligeables.

Tracer la ligne de charge de l'installation.

Dans le cas où le régime d'écoulement est turbulent, utiliser la relation de Colebrook-White.

Rép : $P_f = 98.166\text{ kW}$.

R41 : Même exercice que **R21** avec les données :

$Q_v = 180\text{ l/s}$; $g = 10\text{ m/s}^2$; $L_1 = 800\text{ m}$;
 $D_1 = 240\text{ mm}$; $\lambda_1 = 0,0025$; $L_2 = 400\text{ m}$;
 $D_2 = 300\text{ mm}$; $\lambda_2 = 0,0022$.

Rép : $0,0495\text{ m}^3/\text{s}$; $0,13\text{ m}^3/\text{s}$.

R42 : Une conduite en acier transporte de l'eau au rythme de $1,875\text{ m}^3/\text{s}$ avec une vitesse de $2,25\text{ m/s}$, la pression de service étant de $13,50\text{ kg/cm}^2$. Quelle est l'épaisseur minimale de cette conduite sachant que la contrainte admissible maximale donnée par réglementation est de 150 kg/cm^2 .

Rép : $4,635\text{ cm}$.

R43 : On veut transporter 120 l/s d'eau depuis un grand réservoir A vers un grand ré-

servoir D . Les données du système sont dans l'ordre :

- Altitude du réservoir A : $Z_A = 10\text{ m}$.
- Conduite d'aspiration : $L_a = 120\text{ m}$;
 $D_a = 260\text{ mm}$; $\varepsilon = 0,12\text{ mm}$.

- Sortie réservoir ($\zeta_{SR} = 0,5$); coude 45° ($\zeta_{C1} = 0,5$); coude 60° ($\zeta_{C2} = 0,7$); robinet ($\zeta_{R1} = 1,2$).

- Pompe BC : $Z_B = Z_C = 2\text{ m}$; pertes de charges négligeables.

- Conduite de refoulement composée de deux tronçons :

- $L_{r1} = 450\text{ m}$; $D_{r1} = 168\text{ mm}$; $\varepsilon_1 = 0.12\text{ mm}$;

- Robinet ($\zeta_{R1} = 1,2$); coude ($\zeta_{C3} = 0,9$); élargissement brusque ($\zeta_{Eb} = 0,3$).

- $L_{r2} = 150\text{ m}$; $D_{r2} = 240\text{ mm}$; $\varepsilon_2 = 0,12\text{ mm}$;

- Coude ($\zeta_{C4} = 0,35$); filtre ($\zeta_F = 2,0$); entrée réservoir ($\zeta_{ER} = 1,0$).

- Altitude du réservoir D : $Z_D = 50\text{ m}$.

- 1- Faire le schéma de l'installation.
- 2- Calculer la perte de charge totale à l'aspiration.
- 3- Calculer la perte de charge totale au refoulement.
- 4- Calculer la puissance de la pompe.
- 5- Tracer la ligne de charge de l'installation.
- 6- Calculer l'épaisseur minimale de la conduite de refoulement sachant que la pression de service est 10 kg/cm^2 et que la contrainte admissible maximale donnée par réglementation est de 100 kg/cm^2 .

Dans le cas où le régime d'écoulement est turbulent, utiliser la relation de Colebrook-White.

Dans le cas où le régime d'écoulement est turbulent, utiliser la relation de Colebrook-White.

Rép : 2) $1,9413\text{ m}$; 3) $57,9413\text{ m}$;
 4) $98,112\text{ kW}$;

6) $8,4\text{ mm}$; 12 mm .

Rép : $46,1\text{ kW}$.

R44 : De l'eau circule dans une turbine au rythme de $0,22\text{ m}^3/\text{s}$. La pression au niveau de la conduite d'entrée de diamètre 30 cm est de 15 N/cm^2 , celle au niveau de la conduite de sortie de diamètre 60 cm est de $-3,5\text{ N/cm}^2$. La différence de hauteur entre la sortie et l'entrée est égale à 1 m . Calculer la puissance fournie par l'eau à la turbine.

R45 : Si dans l'exercice **R44**, la puissance fournie par l'eau à la turbine est de 68 ch , la pression au niveau de la conduite d'entrée est de $14,5\text{ N/cm}^2$ et celle au niveau de la conduite de sortie est de $-3,4\text{ N/cm}^2$. Quelle est le débit d'eau dans les conduites.

Rép : $0,262\text{ m}^3/\text{s}$.

Analyse dimensionnelle et lois de similitude

La question de la similitude entre un modèle à échelle réduite et un prototype (système en vraie grandeur) peut être examinée à l'aide des méthodes de l'analyse dimensionnelle. Au préalable, il est utile de se livrer à quelques considérations générales sur les essais sur maquette et leurs applications pratiques.

Un essai sur modèle réduit est souvent envisagé lorsqu'on doit étudier un problème compliqué que l'on souhaite d'éviter des études coûteuses en vraie grandeur. La mise au point et l'optimisation d'un système par une étude sur modèle réduit est plus commode et moins chère. Le recours à une maquette n'est d'ailleurs pas toujours la meilleure solution et il faut d'abord se demander si des études théoriques et numériques ne peuvent pas donner à un moindre coût les réponses recherchées.

Dans l'interprétation des résultats d'essais à échelle réduite, on doit se garder de faire une transposition directe à l'échelle 1. Les maquettes ne reproduisent pas exactement les phénomènes que l'on pourra observer sur le prototype en vraie grandeur. Les différences sont liées à des défauts de similitude qui sont inhérents à la réduction d'échelle. On dit qu'il y a effet d'échelle.

Malgré ces difficultés, les essais sur modèle sont nécessaires dans un grand nombre d'applications technologiques. Ce type d'essai est couramment pratiqué dans le domaine de l'hydraulique pour l'étude de barrages et de canaux. Des modèles permettent aussi d'envisager l'interaction entre la houle et des structures marines comme les plate-formes de forage pétroliers, les ports ou les navires.

Dans le domaine aérospatial, les essais en soufflerie restent un élément indispensable à la conception des avions, des hélicoptères, des missiles ou des fusées. On étudie sur maquette les coefficients aérodynamiques, le comportement aux grandes incidences, le flottement aéroélastique, ...etc.

Dans le domaine de génie des procédés, l'essai sur modèle des réacteurs chimiques fait partie de la pratique courante. Les effets d'échelle sont particulièrement sensibles dans ce contexte ; on est ainsi souvent amené à construire des modèles à plusieurs

échelles pour s'assurer que le prototype aura le comportement souhaité.

8.1 Géométrie des maquettes

Si les formes de la maquette et du prototype sont homothétiques, on dit que les deux systèmes sont géométriquement semblables. Cette similitude est généralement adoptée dans la plupart des modèles. On trouve cependant des situations dans lesquelles la similitude géométrique ne peut être totalement respectée. C'est le cas, par exemple, des systèmes hydrauliques de grande dimension, une similitude géométrique complète conduirait à des hauteurs d'eau de l'ordre du centimètre. Dans cette situation, l'écoulement serait fortement perturbé par les forces de tension superficielle. Pour éviter cette difficulté, les modèles hydrauliques sont généralement distordus avec des rapports d'échelle différents dans les directions verticale et horizontale. L'interprétation des essais doit être effectuée dans ce cas en tenant compte des distorsions introduites sur maquette.

Lorsque la similitude géométrique est respectée, la mesure en un point de la maquette peut être directement transposée au point correspondant sur le prototype à l'échelle 1. Il faut cependant que les conditions de similitude entre la maquette et le prototype soient respectées.

8.2 Conditions de similitude

Les conditions qui assurent la similitude entre un modèle et le système à l'échelle 1, peuvent être directement déduites du théorème π de *Vaschy-Buckingham*. Ce théorème indique qu'un phénomène physique dépendant d'un ensemble de n variables indépendantes dont les dimensions sont définies à partir de p grandeurs fondamentales, permet de définir $(n - p)$ produits sans dimension indépendants. Ce phénomène peut être caractérisé par une relation telle que :

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-p}) = 0 \quad (8.1)$$

Où : $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-p}$ étant les produits sans dimension indépendants.

La similitude entre la maquette et le prototype sera donc assurée si tous les nombres sans dimensions ont les mêmes valeurs à l'échelle réduite et à l'échelle 1.

Considérons par exemple le cas de l'écoulement d'un fluide incompressible dans une conduite et admettons que les conditions aux limites soient les mêmes pour le prototype et pour la maquette.

Les équations (6.3) qui décrivent le mouvement (Ch.6) du fluide font sortir deux nombres sans dimension : le nombre de *Reynolds* (6.4) et le nombre de *Froude* (6.5). Si

ces deux nombres sont identiques pour le prototype et pour la maquette, les équations du mouvement seront parfaitement identiques dans les deux cas. Les distributions de vitesse et de pression seront alors les mêmes sur le prototype et sur la maquette. On dira alors que la similitude est complète : c-à-d similitude géométrique et similitude cinématique.

Remarques :

1. Ces lois de similitude existent dans tous les domaines. Nous nous limiterons ici à la similitude des écoulements incompressibles.
2. En générale, la similitude complète est impossible (égalité impossible de tous les produits sans dimension). Mais puisque dans chaque cas, certains facteurs son moins importants que d'autres et peuvent être négligés. On choisit alors la condition de similitude la plus importante dans chaque cas considéré. On dira alors que nous avons réalisé une similitude *restreinte*.

8.3 Recherche des produits sans dimension

En MDF il y a le plus souvent trois grandeurs fondamentales. Dans la recherche des produits sans dimension on a intérêt à considérer, parmi les variables du problème, des grandeurs primaires, en nombre égal au nombre de grandeurs fondamentales, et utilisées chacune pour caractériser un type de similitude.

Pour caractériser la similitude géométrique on choisit une longueur de référence dans l'écoulement (diamètre d'une conduite D , corde d'un profil L).

Pour la similitude cinématique on choisit une vitesse linéaire q ou angulaire ω de référence, et pour la similitude dynamique on choisit la masse volumique ρ ou une autre variable comportant ρ .

Les produits sans dimensions peuvent se mettre sous la forme d'un rapport d'une grandeur non primaire à un produit de puissances de grandeurs primaires. Il est donc possible de former chaque groupement π en mettant une grandeur non primaire au numérateur, les trois grandeurs primaires au dénominateur, affectés chacune d'un exposant, et en déterminant ces exposants pour que le groupement soit sans dimension. On obtient ainsi les $(n - 3)$ produits sans dimension d'une manière plus systématique.

$$\pi_i = \frac{G_i}{F_1^{\alpha_i} F_2^{\beta_i} F_3^{\gamma_i}}, \quad (i = 1..n - p) \tag{8.2}$$

- G_i : grandeurs non primaires ;
- F_i : grandeurs primaires ;
- $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$: coefficients à déterminer ;

n : nombre de variables du problème ;
 p : nombre de grandeurs fondamentales.

Remarque :

1. La compréhension et l'analyse physique du phénomène doivent aider à choisir la meilleure façon d'établir les produits sans dimensions.
2. L'analyse dimensionnelle n'est pas susceptible de donner la loi du phénomène lui-même car elle ne donne ni la forme précise de cette loi ni ses coefficients numériques mais, d'une part, elle permet d'expérimenter physiquement sur un modèle et, d'autre part, elle met de l'ordre dans les résultats, réduit le nombre de paramètres à faire intervenir et achemine vers la loi du phénomène étudié.

8.4 Exemples

Nous allons directement mettre en pratique la formule (8.2) à travers quelques exemples simples en mécanique des fluides. Le premier exemple sera détaillé pas à pas afin d'assimiler cette technique, les autres exemples seront moins détaillés afin de ne pas alourdir le document.

8.4.1 Chute de pression dans une conduite rectiligne

Soit à déterminer la chute de pression Δp sur une longueur L de la conduite de diamètre D et dont la surface présente des rugosités de hauteur moyenne ε , dans laquelle circule un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ à la vitesse moyenne q .

Ecrivons d'abord ces variables avec leurs unités puis exprimons-les avec les unités fondamentales :

Variable	Unité	Unité fondamentale
Δp	$\frac{N}{m^2} = \frac{Kg}{m s^2}$	$L^{-1} M^1 T^{-2}$
L	m	$L^1 M^0 T^0$
D	m	$L^1 M^0 T^0$
ε	m	$L^1 M^0 T^0$
ρ	$\frac{Kg}{m^3}$	$L^{-3} M^1 T^0$
μ	$\frac{Kg}{m s}$	$L^{-1} M^1 T^{-1}$
q	$\frac{m}{s}$	$L^1 M^0 T^{-1}$

Ce problème contient $n = 7$ variables, le nombre d'unités fondamentales est $p = 3$ (L , M et T), donc le nombre de produits sans dimension que l'on peut former est $(n - p) = 4$.

Pour caractériser les similitudes géométrique, cinématique et dynamique, choisissons 3 grandeurs fondamentales soient D , q et ρ . Nous pouvons maintenant former les 4 produits sans dimension π_i ($i = 1..4$) de la manière suivante :

$$\pi_i = \frac{G_i}{D^{\alpha_i} \rho^{\beta_i} q^{\gamma_i}}, \quad (i = 1..4)$$

ce qui nous donne :

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{D^{\alpha_1} \rho^{\beta_1} q^{\gamma_1}}, \quad \pi_2 = \frac{L}{D^{\alpha_2} \rho^{\beta_2} q^{\gamma_2}}, \quad \pi_3 = \frac{\varepsilon}{D^{\alpha_3} \rho^{\beta_3} q^{\gamma_3}}, \quad \pi_4 = \frac{\mu}{D^{\alpha_4} \rho^{\beta_4} q^{\gamma_4}}$$

Le produit π_1 étant sans dimension, il correspond donc à $L^0 M^0 T^0$, nous pouvons donc écrire en remplaçant chaque variable par son unité fondamentale issue du tableau :

$$L^0 M^0 T^0 = \frac{L^{-1} M^1 T^{-2}}{(L^{\alpha_1} M^0 T^0)(L^{-3\beta_1} M^{\beta_1} T^0)(L^{\gamma_1} M^0 T^{-\gamma_1})} = \frac{L^{-1} M^1 T^{-2}}{L^{\alpha_1 - 3\beta_1 + \gamma_1} M^{\beta_1} T^{-\gamma_1}}$$

ce qui nous donne le système d'équations suivant à résoudre :

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 3\beta_1 - \gamma_1 - 1 = 0 \\ -\beta_1 + 1 = 0 \\ \gamma_1 - 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = 2 \end{cases} \implies \pi_1 = \frac{\Delta p}{D^0 \rho^1 q^2} = \frac{\Delta p}{\rho q^2}$$

Chaque produit sera déterminé de la même manière après avoir résolu le système correspondant de 3 équations à 3 inconnues c-à-d :

$$\begin{cases} -\alpha_2 + 3\beta_2 - \gamma_2 + 1 = 0 \\ -\beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases} \implies \pi_2 = \frac{L}{D^1 \rho^0 q^0} = \frac{L}{D}$$

$$\begin{cases} -\alpha_3 + 3\beta_3 - \gamma_3 + 1 = 0 \\ -\beta_3 = 0 \\ \gamma_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_3 = 0 \end{cases} \implies \pi_3 = \frac{\varepsilon}{D^1 \rho^0 q^0} = \frac{\varepsilon}{D}$$

$$\begin{cases} -\alpha_4 + 3\beta_4 - \gamma_4 - 1 = 0 \\ -\beta_4 + 1 = 0 \\ \gamma_4 - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_4 = 1 \\ \beta_4 = 1 \\ \gamma_4 = 1 \end{cases} \implies \pi_4 = \frac{\mu}{D^1 \rho^1 q^1} = \frac{\mu}{D \rho q} = \frac{1}{\mathfrak{R}_e}$$

D'après la relation (8.1) nous pouvons écrire la relation donnant la perte de charge :

$$\pi_1 = \varphi(\pi_2, \pi_3, \pi_4) \Rightarrow \frac{\Delta p}{\rho q^2} = \varphi\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{1}{\Re_e}\right) \implies \Delta p = \rho q^2 \varphi\left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{1}{\Re_e}\right)$$

Comparons cette relation avec celle déjà utilisée en (6.27) :

$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{q^2}{2}$ avec λ le coefficient de perte de charge linéaire qui dépend du régime d'écoulement et de la rugosité relative de la conduite $\frac{\varepsilon}{D}$. Que ce soit en régime laminaire ou turbulent, les formules utilisés montrent tous que λ est inversement proportionnel à \Re_e . Donc la relation que nous venons de trouver avec l'analyse dimensionnelle nous donne le modèle de perte de charge sans préciser la loi exacte (φ) ni les coefficients intervenant dans l'équation (ici le nombre $\frac{1}{2}$). Seule l'expérience et le bon sens physique peuvent permettre la formulation complète de cette relation.

8.4.2 Portance d'un profil

Soit à déterminer la portance F_L sur un profil aérodynamique de corde L_c soumis à un écoulement incident avec un angle α . Nous cherchons donc une relation de type $F_L = f(q, a, \mu, \rho, L_c, \alpha)$, où a représente la vitesse du son.

Ecrivons les variables et leurs unités fondamentales intervenant dans ce problème :

Variable	Unité	Unité fondamentale
q	$\frac{m}{s}$	$L^1 M^0 T^{-1}$
a	$\frac{m}{s}$	$L^1 M^0 T^{-1}$
μ	$\frac{Kg}{ms}$	$L^{-1} M^1 T^{-1}$
ρ	$\frac{Kg}{m^3}$	$L^{-3} M^1 T^0$
L_c	m	$L^1 M^0 T^0$
α	$^\circ$	$L^0 M^0 T^0$
F_L	$N = \frac{Kgm}{s^2}$	$L^1 M^1 T^{-2}$

Ce problème contient 7 variables, le nombre d'unités fondamentales est 3, donc le nombre de produits sans dimension que l'on peut former est 4.

Pour caractériser les similitudes géométrique, cinématique et dynamique, choisissons 3 grandeurs fondamentales soient L_c , q et ρ . Nous pouvons maintenant former les 4 produits sans dimension π_i ($i = 1..4$) :

$$\pi_1 = \frac{F_L}{L_c^{\alpha_1} \rho^{\beta_1} q^{\gamma_1}}, \quad \pi_2 = \frac{a}{L_c^{\alpha_2} \rho^{\beta_2} q^{\gamma_2}}, \quad \pi_3 = \frac{\mu}{L_c^{\alpha_3} \rho^{\beta_3} q^{\gamma_3}}, \quad \pi_4 = \frac{\alpha}{L_c^{\alpha_4} \rho^{\beta_4} q^{\gamma_4}}$$

et en résolvant les systèmes d'équations correspondant, nous aurons :

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 3\beta_1 - \gamma_1 + 1 = 0 \\ -\beta_1 + 1 = 0 \\ \gamma_1 - 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = 2 \end{cases} \implies \pi_1 = \frac{F_L}{\rho q^2 L_c^2}$$

$$\begin{cases} -\alpha_2 + 3\beta_2 - \gamma_2 + 1 = 0 \\ -\beta_2 = 0 \\ \gamma_2 - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 1 \end{cases} \implies \pi_2 = \frac{a}{q} = \frac{1}{M_a}$$

$$\begin{cases} -\alpha_3 + 3\beta_3 - \gamma_3 - 1 = 0 \\ -\beta_3 + 1 = 0 \\ \gamma_3 - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \beta_3 = 1 \\ \gamma_3 = 1 \end{cases} \implies \pi_3 = \frac{\mu}{L_c \rho q} = \frac{1}{\Re_e}$$

$$\begin{cases} -\alpha_4 + 3\beta_4 - \gamma_4 = 0 \\ -\beta_4 = 0 \\ \gamma_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_4 = 0 \\ \beta_4 = 0 \\ \gamma_4 = 0 \end{cases} \implies \pi_4 = \alpha$$

D'après la relation (8.1) nous pouvons écrire la relation donnant la portance :

$$\frac{F_L}{\rho q^2 L_c^2} = \varphi\left(\frac{1}{M_a}, \frac{1}{\Re_e}, \alpha\right) \implies F_L = \rho q^2 L_c^2 \varphi\left(\frac{1}{M_a}, \frac{1}{\Re_e}, \alpha\right)$$

Ce résultat est bien sûr confirmé dans toutes les références en aérodynamique où le coefficient de portance est donné par :

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho q^2 L_c^2} = \varphi(\Re_e, M_a, \alpha)$$

8.4.3 Débit dans un tube capillaire horizontal

Si on suppose que le débit à travers un tube capillaire horizontal dépend de la chute de pression $\frac{\Delta p}{L}$, du diamètre D et de la viscosité dynamique μ . Trouver la forme de l'équation qui donne ce débit.

Ecrivons les variables et leurs unités fondamentales intervenant dans ce problème :

Variable	Unité	Unité fondamentale
Q_v	$\frac{m^3}{s}$	$L^3 M^0 T^{-1}$
D	m	$L^1 M^0 T^0$
μ	$\frac{Kg}{m s}$	$L^{-1} M^1 T^{-1}$
$\frac{\Delta p}{L}$	$\frac{N}{m^3} = \frac{Kg}{m^2 s^2}$	$L^{-2} M^1 T^{-2}$

Ce problème contient 4 variables, le nombre d'unités fondamentales est 3, donc le nombre de produits sans dimension que l'on peut former est 1.

Pour trouver la relation donnant le débit volumique, choisissons les 3 grandeurs fondamentales D , μ et $\frac{\Delta p}{L}$. Nous pouvons maintenant former le seul produit sans dimension :

$$\pi = \frac{Q_v}{D^\alpha \mu^\beta \frac{\Delta p}{L}^\gamma}$$

et en résolvant le système d'équations correspondant, nous aurons :

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + 2\gamma + 3 = 0 \\ -\beta - \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \implies \pi = \frac{Q_v}{D^4 \mu^{-1} \frac{\Delta p}{L}^1} = \frac{\mu Q_v}{D^4 \frac{\Delta p}{L}}$$

Puisque le produit est sans dimension, nous pouvons écrire :

$$Q_v = \frac{C^{te}}{\mu} \frac{\Delta p}{L} D^4$$

En comparant cette relation avec celle de *Poiseuille* déjà étudiée (6.10), la valeur de la constante est : $\frac{\pi}{128}$.

Supposons maintenant que nous avons choisi les grandeurs fondamentales D , Q_v et $\frac{\Delta p}{L}$. Le produit adimensionnel à former est :

$$\pi = \frac{\mu}{D^\alpha Q_v^\beta \frac{\Delta p}{L}^\gamma}$$

en résolvant le système d'équations correspondant, nous aurons :

$$\begin{cases} -\alpha - 3\beta + 2\gamma - 1 = 0 \\ -\gamma + 1 = 0 \\ \beta + 2\gamma - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \implies \pi = \frac{\mu}{D^4 Q_v^{-1} \frac{\Delta p}{L}^1} = \frac{\mu Q_v}{D^4 \frac{\Delta p}{L}}$$

On retrouve bien la même relation.

Supposons finalement que nous choisissons les grandeurs fondamentales μ , Q_v et $\frac{\Delta p}{L}$. Le produit adimensionnel à former est :

$$\pi = \frac{D}{\mu^\alpha Q_v^\beta \frac{\Delta p}{L}^\gamma}$$

en résolvant le système d'équations correspondant, nous aurons :

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + 2\gamma + 1 = 0 \\ -\alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{1}{4} \\ \gamma = -\frac{1}{4} \end{cases} \implies \pi = \frac{D}{\mu^{\frac{1}{4}} Q_v^{\frac{1}{4}} \frac{\Delta p}{L}^{-\frac{1}{4}}}$$

Puisque le produit est sans dimension (constant), nous pouvons élever les deux membre à la puissance 4 :

$$\implies C^{te} = \left(\frac{D}{\mu^{\frac{1}{4}} Q_v^{\frac{1}{4}} \frac{\Delta p}{L}^{-\frac{1}{4}}} \right)^4 = \frac{D^4}{\mu Q_v \frac{\Delta p}{L}^{-1}} \implies Q_v = \frac{C^{te}}{\mu} \frac{\Delta p}{L} D^4.$$

Nous retrouvons bien le même résultat que précédemment.

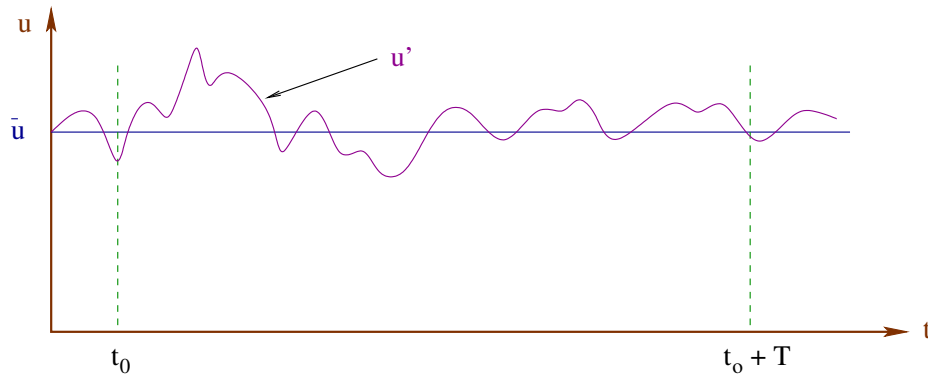
Écoulements turbulents

9.1 Propriétés des écoulements turbulents

Le passage du régime laminaire au régime turbulent s'effectue dans une conduite donnée par augmentation du débit.

La connaissance des propriétés des écoulements turbulents est essentiellement d'origine expérimentale. En régime turbulent, l'écoulement unidimensionnel est instationnaire et présente des fluctuations dans les directions de l'écoulement et également dans les directions normales. Ces fluctuations à caractère aléatoire (régies par les loi du hasard) prennent naissance de l'existence au sein du fluide de tourbillons de tailles variables en interaction permanente. Elles tendent à égaliser les vitesses beaucoup plus rapidement et le profil prend une forme beaucoup plus aplatie que celui du régime laminaire qui a une forme parabolique.

Une étude théorique basée sur l'intégration de perturbations dans l'équation de Navier-Stokes, montre que dans la couche limite, celles-ci sont soit amorties pour de faibles nombres de Reynolds, soit amplifiées pour donner à l'aval un régime turbulent. En un point quelconque d'un écoulement unidimensionnel, l'enregistrement des valeurs instantanées de la composante u présente l'allure suivante (Fig.9.1) :

FIGURE 9.1: *Fluctuations de la vitesse dans un écoulement turbulent.*

On présente généralement la vitesse comme la somme de la composante moyenne et d'une composante fluctuante u' (pouvant atteindre localement 20 à 30 % de u) :

$$u = \bar{u} + u' \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u \, dt \\ \bar{u}' = 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

Pour un écoulement permanent en moyenne, \bar{u} reste constante si le temps T d'observation est suffisamment important.

Les fluctuations de vitesse se produisent également sur les directions normales à l'écoulement principal, les composantes v et w ne sont plus nulles mais égales à leurs composantes fluctuantes v' et w' .

$$v = v' \quad \text{et} \quad w = w' \quad (\bar{v}' = 0, \bar{w}' = 0)$$

Les moyennes quadratiques étant non nulles :

$$\overline{u^2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2 \, dt > 0$$

On définit ainsi l'intensité de turbulence I par le rapport :

$$I = \frac{1}{\bar{u}} \sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})} \quad (9.2)$$

Dans le cas d'un écoulement tridimensionnel, le dénominateur sera constitué de la vitesse moyenne \bar{q} .

- Remarques :

1. La turbulence s'entretient par prélèvement d'énergie sur l'écoulement principal, assurant la création de grands tourbillons qui se déplacent en formant des tourbillons plus petits jusqu'à une échelle telle qu'ils sont dissipés par viscosité.
2. En écoulement turbulent, l'influence des termes fluctuants devient plus importante que celle des termes visqueux. Leurs introductions dans les équations nécessite une modélisation qui reste aujourd'hui de caractère empirique.
3. Il existe une catégorie d'écoulement non permanent, dont cependant, en un point fixe, les propriétés moyennes temporelles sont constantes. Il est alors possible de trouver un intervalle de temps T tel que les quantités moyennes de la forme $\bar{q} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} q dt$ sont indépendantes de l'instant initial t_0 choisi.
4. Les appareils usuels de mesure des vitesses ne peuvent être utilisés pour mesurer les fluctuations instantanées de la vitesse en raison de leur inertie spécifique. On fait appel, pour les liquides et les gaz, à des appareils de très faible temps de réponse ; le plus employé est l'*anémomètre à fil chaud*. Son principe est le suivant : un fil de platine ou de tungstène de quelques millièmes de mm de diamètre et de quelques mm de longueur est chauffé par un courant électrique et placé au sein du fluide étudié. La température d'équilibre prise par le fil et, par suite, sa résistance électrique, sont fonction de la vitesse du courant fluide ; en raison du très faible diamètre du fil par rapport à sa longueur on peut négliger les échanges thermique par conduction aux extrémités et ne considérer que les échanges par convection. Si l'axe du fil est perpendiculaire à la vitesse moyenne du fluide, on peut alors déterminer cette température d'équilibre par une mesure de résistance.

Annexes

Notions de calcul vectoriel

A.1 Produit scalaire

Soit deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} formant un angle α entre eux, leur produit scalaire est défini par :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Le produit scalaire étant commutatif : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

et distributif par rapport à l'addition : $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Pour les vecteurs unitaires, nous avons :

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \end{cases}$$

Si les composantes des vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont respectivement (a_x, a_y, a_z) et (b_x, b_y, b_z) , on aura :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

A.2 Produit vectoriel

Le produit vectoriel des vecteurs \vec{a} et \vec{b} formant un angle α entre eux est défini par :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

Le produit vectoriel n'étant pas commutatif : $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{b} \wedge \vec{a}$

mais, par contre, distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

Pour les vecteurs unitaires, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad , \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \quad , \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Si les composantes des vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont respectivement (a_x, a_y, a_z) et (b_x, b_y, b_z) , on aura :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

A.3 Produit mixte

Le produit mixte des vecteurs \vec{a} et \vec{b} et \vec{c} est défini par :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

A.4 Divergence d'un vecteur

Soit le vecteur \vec{V} de composantes (V_x, V_y, V_z) . La divergence de ce vecteur est définie par :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

A.5 Vecteur gradient

Soit $P = P(x, y, z)$ une fonction scalaire. Le gradient de P est défini par le vecteur :

$$\vec{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k}$$

On définit l'opérateur du 1^{er} ordre (Hamiltonien ou encore Nabla) par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

donc on peut écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{\nabla} P$$

A.6 Rotationnel d'un vecteur

Soit le vecteur \vec{V} de composantes (u, v, w) . Le rotationnel de \vec{V} est définie par :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

et en développant ce produit vectoriel, on aura :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

A.7 Laplacien

C'est l'opérateur du second ordre défini par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Il s'applique soit à une fonction scalaire P ou vectorielle \vec{V} :

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{V} = \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}$$

On peut aussi utiliser les notations suivantes :

$$\Delta \vec{V} \equiv \nabla^2 \vec{V} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

A.8 Circulation d'un vecteur

On appelle circulation du vecteur \vec{a} le long de la courbe \tilde{AB} au point M , l'intégrale curviligne :

$$\Gamma = \int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{M}$$

$d\vec{M}$ étant l'abscisse curviligne (ou élément de courbe) au point M .

Il est évident que si le vecteur \vec{a} est une force, alors Γ représentera un travail.

A.9 Théorème de Gauss-Ostrogradski

Si le vecteur \vec{V} est différentiable alors :

$$\int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{V} dv$$

Le premier membre de cette équation représente le flux de \vec{V} sortant à travers la surface fermée S .

A.10 Différentielle totale

Soit ϕ une fonction des coordonnées et du temps : $\phi = \phi(x, y, z, t)$.

La différentielle totale de ϕ sera donnée par :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt$$

Inversement, la fonction $K = k_1 dx + k_2 dy + k_3 dz + k_4 dt$ est une différentielle totale exacte égale à dU si l'on a simultanément :

$$k_1 = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad k_2 = \frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad k_3 = \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{et} \quad k_4 = \frac{\partial U}{\partial t}$$

A.11 Potentiel des vitesses

Tout vecteur \vec{V} fonction d'un point M de l'espace dont le rotationnel est nul, peut être considéré comme le gradient d'une fonction scalaire φ du point M et on peut écrire :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

On dit alors que le champ du vecteur vitesse dérive d'un potentiel scalaire $\varphi(x, y, z)$, lui même appelé *potentiel des vitesses*.

Annexe **B**

Pertes de charge

B.1 Pertes de charge en accessoires

Le tableau (Tab.B.1) nous donne les pertes de charge de certains accessoires :

Accessoire	Perte de charge moyenne (Indices : 1 en amont et 2 en aval)
1- De réservoir à conduite	
- connexion au ras de la paroi (perte à l'entrée)	$0,50 \frac{q_2^2}{2g}$
- tuyau entrant	$1,00 \frac{q_2^2}{2g}$
- connexion arrondie	$0,050 \frac{q_2^2}{2g}$
2- De conduite à réservoir (perte à la sortie)	$1,00 \frac{q_1^2}{2g}$
3- Divergent brusque	$\frac{(q_1 - q_2)^2}{2g}$
4- Divergent progressif (voir Tab.B.2 ci-dessous)	$\zeta \frac{(q_1 - q_2)^2}{2g}$
5- Convergent brusque (voir Tab.B.2 ci-dessous)	$\zeta_c \frac{q^2}{2g}$

TABLE B.1: *Pertes de charge en accessoires.*

B.2 Convergent et divergent

Convergent brusque		Divergent progressif pour un angle total de cône de						
$\frac{D_1}{D_2}$	ζ_c	4°	10°	15°	20°	30°	50°	60°
1,2	0,08	0,02	0,04	0,09	0,16	0,25	0,35	0,37
1,4	0,17	0,03	0,06	0,12	0,23	0,36	0,50	0,53
1,6	0,26	0,03	0,07	0,14	0,26	0,42	0,57	0,61
1,8	0,34	0,04	0,07	0,15	0,28	0,44	0,61	0,65
2,0	0,37	0,04	0,07	0,16	0,29	0,46	0,63	0,68
2,5	0,41	0,04	0,08	0,16	0,30	0,48	0,65	0,70
3,0	0,43	0,04	0,08	0,16	0,31	0,48	0,66	0,71
4,0	0,45	0,04	0,08	0,16	0,31	0,49	0,67	0,72
5,0	0,46	0,04	0,08	0,16	0,31	0,50	0,67	0,72

TABLE B.2: *Convergent brusque et divergent progressif.*

B.3 Divers accessoires

Le tableau (Tab.B.3) ci-dessous donne quelques valeurs des coefficient de pertes de charge singulières de certains accessoires.

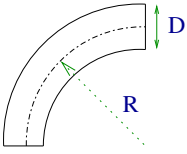
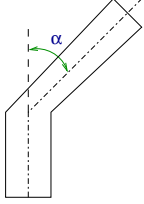
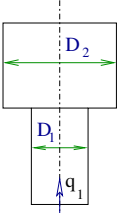
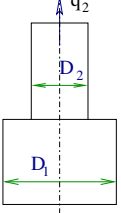
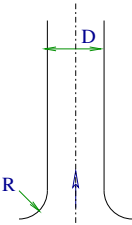
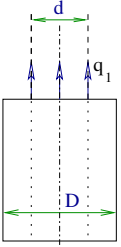
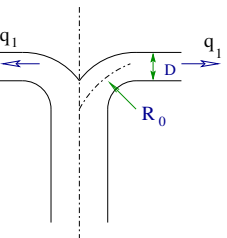
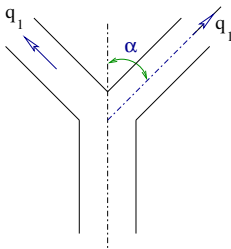
 <table border="1" data-bbox="671 241 804 443"> <thead> <tr> <th>R/D</th> <th>ζ</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,50</td><td>0,90</td></tr> <tr><td>0,75</td><td>0,45</td></tr> <tr><td>1,00</td><td>0,35</td></tr> <tr><td>1,50</td><td>0,25</td></tr> <tr><td>2,00</td><td>0,20</td></tr> </tbody> </table>	R/D	ζ	0,50	0,90	0,75	0,45	1,00	0,35	1,50	0,25	2,00	0,20	 <table border="1" data-bbox="1070 241 1203 443"> <thead> <tr> <th>α</th> <th>ζ</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>15°</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>30°</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>45°</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>60°</td><td>0,7</td></tr> <tr><td>90°</td><td>1,3</td></tr> </tbody> </table>	α	ζ	15°	0,1	30°	0,2	45°	0,5	60°	0,7	90°	1,3
R/D	ζ																								
0,50	0,90																								
0,75	0,45																								
1,00	0,35																								
1,50	0,25																								
2,00	0,20																								
α	ζ																								
15°	0,1																								
30°	0,2																								
45°	0,5																								
60°	0,7																								
90°	1,3																								
 <table border="1" data-bbox="663 499 804 689"> <thead> <tr> <th>D_1/D_2</th> <th>ζ_1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,1</td><td>1,0</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,9</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,7</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,4</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,2</td></tr> </tbody> </table>	D_1/D_2	ζ_1	0,1	1,0	0,2	0,9	0,4	0,7	0,6	0,4	0,8	0,2	 <table border="1" data-bbox="1062 499 1203 689"> <thead> <tr> <th>D_2/D_1</th> <th>ζ_2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,1</td><td>0,6</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,4</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,3</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,2</td></tr> </tbody> </table>	D_2/D_1	ζ_2	0,1	0,6	0,2	0,5	0,4	0,4	0,6	0,3	0,8	0,2
D_1/D_2	ζ_1																								
0,1	1,0																								
0,2	0,9																								
0,4	0,7																								
0,6	0,4																								
0,8	0,2																								
D_2/D_1	ζ_2																								
0,1	0,6																								
0,2	0,5																								
0,4	0,4																								
0,6	0,3																								
0,8	0,2																								
 <table border="1" data-bbox="671 835 804 969"> <thead> <tr> <th>R/D</th> <th>ζ</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,2</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>0,5</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,05</td></tr> </tbody> </table>	R/D	ζ	0,2	0,2	0,5	0,1	0,8	0,05	 <table border="1" data-bbox="1062 757 1203 969"> <thead> <tr> <th>d/D</th> <th>ζ_1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,1</td><td>2,5</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>2,5</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>2,5</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>2,3</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>1,9</td></tr> <tr><td>0,9</td><td>1,5</td></tr> </tbody> </table>	d/D	ζ_1	0,1	2,5	0,2	2,5	0,4	2,5	0,6	2,3	0,8	1,9	0,9	1,5		
R/D	ζ																								
0,2	0,2																								
0,5	0,1																								
0,8	0,05																								
d/D	ζ_1																								
0,1	2,5																								
0,2	2,5																								
0,4	2,5																								
0,6	2,3																								
0,8	1,9																								
0,9	1,5																								
 <table border="1" data-bbox="663 1059 804 1261"> <thead> <tr> <th>R_0/D</th> <th>ζ_1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,50</td><td>1,20</td></tr> <tr><td>0,75</td><td>0,60</td></tr> <tr><td>1,00</td><td>0,40</td></tr> <tr><td>1,50</td><td>0,25</td></tr> <tr><td>2,00</td><td>0,20</td></tr> </tbody> </table>	R_0/D	ζ_1	0,50	1,20	0,75	0,60	1,00	0,40	1,50	0,25	2,00	0,20	 <table border="1" data-bbox="1062 1059 1203 1261"> <thead> <tr> <th>α</th> <th>ζ_1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>15°</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>30°</td><td>0,3</td></tr> <tr><td>45°</td><td>0,7</td></tr> <tr><td>60°</td><td>1,0</td></tr> <tr><td>90°</td><td>1,4</td></tr> </tbody> </table>	α	ζ_1	15°	0,1	30°	0,3	45°	0,7	60°	1,0	90°	1,4
R_0/D	ζ_1																								
0,50	1,20																								
0,75	0,60																								
1,00	0,40																								
1,50	0,25																								
2,00	0,20																								
α	ζ_1																								
15°	0,1																								
30°	0,3																								
45°	0,7																								
60°	1,0																								
90°	1,4																								

TABLE B.3: *Accessoires divers.*

B.4 Pertes de charge linéaires

Le coefficient de pertes de charge linéaires est donné par le diagramme de Moody (Fig.B.1) ci-dessous :

B.5 Rugosité des conduites

Le tableau (Tab.B.4) ci-dessous nous donne quelques valeurs des rugosités des conduites les plus utilisées.

Types de tuyau ou de revêtement (neuf)	Valeur de ε en cm	
	Intervalle	Valeur de conception
Laiton	0,00015	0,00015
Cuivre	0,00015	0,00015
Béton	0,03-3	0,012
Fonte nue	0,012-0,6	0,024
Fonte asphaltée	0,006-0,18	0,012
Fonte revêtue de ciment	0,00024	0,00024
Fonte revêtue de bitume	0,00024	0,00024
Fonte centrifugée	0,0003	0,0003
Fer galvanisé	0,006-0,24	0,015
Fer forgé	0,003-0,09	0,006
Acier commercial et acier soudé	0,003-0,09	0,006
Acier riveté	0,09-9	0,18
Tube étiré	0,00024	0,00024
Bois	0,018-0,9	0,06

TABLE B.4: *Rugosités des conduites.*

B.6 Pertes de charge à l'entrée d'une conduite

B.6.1 Ecoulement laminaire

La figure (Fig.B.2) permet de calculer la longueur d'établissement.

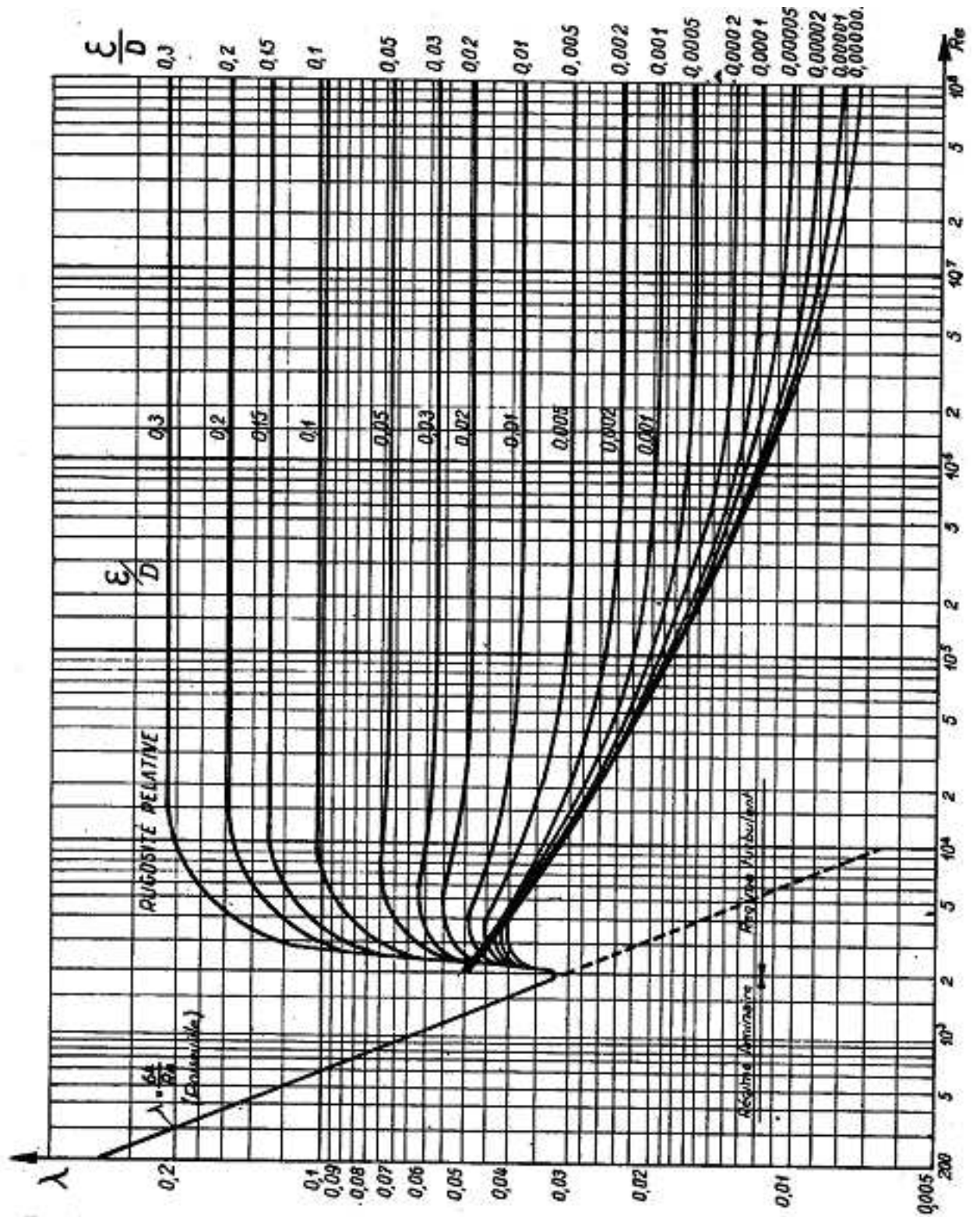


FIGURE B.1: *Diagramme de Moody pour le calcul de λ .*

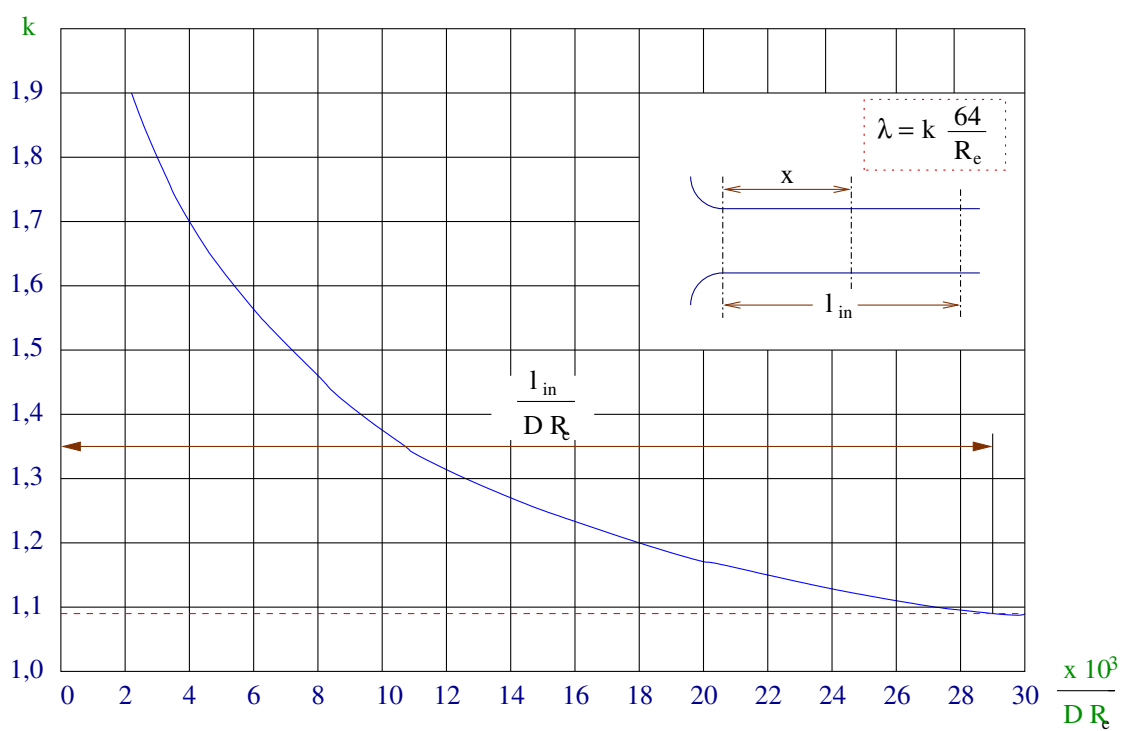


FIGURE B.2: *Perte de charge à l'entrée d'une conduite.*

Equation de Von-Karman

Ci-dessous, une autre méthode qui permet d'aboutir à l'équation de *Von-Karman* déjà établie en (5.32)

On reprend, bien sûr, les équations de Prandtl de la CLL :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad \text{avec (C.L)} \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \\ u(x, \delta(x)) = U_e(x) \end{cases}$$

En multipliant la première équation par u et en l'additionnant avec la seconde, on aura :

$$2u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

Intégrons maintenant cette équation à l'intérieur de la couche limite :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial (uv)}{\partial y} dy = \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy + \frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy + uv|_0^\delta = \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy + \frac{1}{\rho} \tau|_0^\delta$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy + \cancel{u(x, \delta)} \cdot \overset{U_e}{v(x, \delta)} - \cancel{u(x, 0)} \cdot \overset{0}{v(x, 0)} = \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy + \frac{1}{\rho} \left[\cancel{\tau(\delta)} - \overset{0}{\tau(0)} \right]^{\tau_p}$$

L'intégration de l'équation de continuité nous donne :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \left[v(x, \delta) - \cancel{v(x, 0)} \right]^0 = 0$$

$$\implies v(x, \delta) = - \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

En remplaçant ce terme dans l'équation principale :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy - U_e \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy &= \int_0^{\delta} U_e \frac{dU_e}{dx} dy - \frac{\tau_p}{\rho} \\ -\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy + \int_0^{\delta} U_e \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} U_e \frac{dU_e}{dx} dy &= \frac{\tau_p}{\rho} \\ -\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy + \int_0^{\delta} \frac{d(U_e u)}{dx} dy - \int_0^{\delta} u \frac{dU_e}{dx} dy + \int_0^{\delta} U_e \frac{dU_e}{dx} dy &= \frac{\tau_p}{\rho} \end{aligned}$$

et en regroupant les termes (la dérivée par rapport à x peut sortir de l'intégrale par rapport à y) :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u (U_e - u) dy + \frac{dU_e}{dx} \int_0^{\delta} (U_e - u) dy = \frac{\tau_p}{\rho}$$

En introduisant les relations (5.8) et (5.9), nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (U_e^2 \delta_2) + \frac{dU_e}{dx} U_e \delta_1 &= \frac{\tau_p}{\rho} \\ \implies U_e^2 \frac{d\delta_2}{dx} + 2 U_e \frac{dU_e}{dx} \delta_2 + U_e \frac{dU_e}{dx} \delta_1 &= \frac{\tau_p}{\rho} \end{aligned}$$

soit, finalement, en divisant par U_e^2 :

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (\delta_1 + 2\delta_2) \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2}$$

Annexe **D**

Conversion d'unités

Les tableaux (Tab.D.1) et (Tab.D.2) ci-dessous nous donnent respectivement les conversions les plus utiles des unités dans les systèmes métrique et britannique.

Conversion d'unités : système métrique	
Accélération	
$1 N/kg \equiv 1 m/s^2$	
Force	
$1 kgf = 1 kgp = 9,8 N$	
$1 N = 0,102 kgf = 0,102 kgp$	
$1 dyne \equiv 1 g.cm/s^2 = 10^{-5} N$	
Couple	
$1 m.N = 0,102 m.kgf = 0,102 m.kgp$	
$1 m.kgf = 1 m.kgp = 9,8 m.N$	
Puissance	
$1 J/s = 1 W$	
$1 ch = 735,5 W$	
Energie	
$1 kg.m = 9,8 J$	
$1 Thermie = 1 kcal = 1000 cal$	
$1 Frigorie = -1 kcal = -1000 cal$	
Pression	
$1 atm = 101325 Pa = 760 mm Hg$	
$1 bar = 10^5 Pa \simeq 760 mm Hg$	
$1 mm Hg (0^\circ C) = 133,322 Pa = 1 torr$	
$1 mm CE (4^\circ C) = 9,80638 Pa$	
$1 dyne/cm^2 = 0,1 Pa$	
$1 N/m^2 = 1 Pa$	
$1 kgf/cm^2 = 98066,5 Pa$	
$1 mbar = 100 Pa$	
Viscosité	
$1 PL (Poiseuille) = 1 kg/m.s$	
$1 Po (Poise) = 1 g/cm.s$	
$1 St (Stokes) = 10^{-4} m^2/s = 1 cm^2/s$	
Température	
$1^\circ K = 1^\circ C + 273,1$	
Longueur	
$1 \mu m (micron) = 10^{-6} m$	
$1 \text{ \AA} (Angstrom) = 10^{-10} m$	

TABLE D.1: *Conversion d'unités : Système métrique.*

Conversion d'unités : système britannique	
Longueur	
$1 \text{ Ft (Foot)} = 0,3048 \text{ m}$	
$1 \text{ in (Inch)} = 0,0254 \text{ m}$	
$1 \text{ yd (yard)} = 0,9144 \text{ m}$	
$1 \text{ m (mile)} = 1,609.10^3 \text{ m}$	
Masse	
$1 \text{ Lbm (Pound mass)} = 0,4535923 \text{ kg}$	
$1 \text{ Slug} \equiv \text{Lbf} \cdot \text{s}^2 / \text{ft} = 14,5938976 \text{ kg}$	
Masse volumique	
$1 \text{ Slug/ft}^3 = 515,38 \text{ kg/m}^3$	
$1 \text{ Lbm/ft}^3 = 16,02 \text{ kg/m}^3$	
Force	
$1 \text{ Lbf (Pound force)} = 4,44822 \text{ N}$	
$1 \text{ Poundal} \equiv \text{Lbm} \cdot \text{ft/s}^2$	
Pression	
$1 \text{ Psia} \equiv \text{Lbf/in}^2 = 6894,75 \text{ N/m}^2$	
$1 \text{ Psfa} = 144 \text{ Psia} = 47,88 \text{ N/m}^2$	
$1 \text{ Lbf/ft}^2 = 992844 \text{ N/m}^2$	
Température	
$1^\circ \text{F} = \frac{9}{5}^\circ \text{C} + 32$	
$1^\circ \text{R} = \frac{9}{5}^\circ \text{K}$	
$1^\circ \text{R} = 1^\circ \text{F} + 459,67$	
Energie	
$1 \text{ Btu (British thermal unit)} = 1054,35 \text{ J}$	
$1 \text{ Ft} \cdot \text{Lbf} = 1,356 \text{ J}$	
$1 \text{ hp (horse power)} = 746 \text{ W}$	
<p><i>Lbm, Lbf</i> \equiv Livre britannique de masse, de force. <i>Psia, Psfa</i> \equiv Pound Square inch (Foot) area. <i>Btu</i> \equiv British thermal unit.</p>	

TABLE D.2: *Conversion d'unités : Système britannique.*

Bibliographie

- [1] R. OUZIAUX, “*Mécanique des fluides appliquée*” , Ed. Dunod Université, Paris 1978.
- [2] V. L. STREETER, E. B. WYLIE, “*Fluid Mechanics*”, Ed. McGraw-Hill, Sixth Ed., 1975.
- [3] RONALD V. GILES, “*Mécanique des fluides et hydraulique : Cours et problèmes*”, Ed. McGraw-Hill, Série Schaum, Paris 1975.
- [4] A. LENCASTRE, “*Hydraulique générale*”, Ed. Eyrolles, Paris 1996.
- [5] M. CARLIER, “*Hydraulique générale et appliquée*”, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d 'E.D.F. - Ed. Eyrolles, Paris 1972.
- [6] P.L. VIOLLET, J.P. CHABARD, P. ESPOSITO, D. LAURENCE, “*Mécanique des fluides appliquée : Ecoulements incompressibles dans les circuits, canaux et rivières, autour de structures et dans l'environnement*”, Ed. Presses de l' E.N.P.C. 1998.
- [7] P. CHASSING, “*Mécanique des fluides : Eléments d'un premier parcours*”, CEPADUES-EDITIONS, 2nd Ed. 2000.
- [8] M. BENTERCIA, “*Mécanique des fluides*”, Cours donné à l'Institut de Mécanique, Univ. Batna 1987.
- [9] R. REY, “*Propriétés cinématiques des écoulements*”, SERAM-ENSAM-Paris 1993.
- [10] R. REY, “*Dimensionnement des turbomachines*”, SERAM-ENSAM-Paris 1994.
- [11] J. GRIMSON, “*Advanced fluid dynamics and heat transfer*”, Ed. McGraw-Hill 1971.
- [12] I.L. RYHMING, “*Dynamique des fluides : Un cours de base du deuxième cycle universitaire*”, Ed. Presses Polytechniques Normandes 1985.
- [13] B. NEKRASSOV, “*Cours d'hydraulique*”, Ed. MIR, 1967.
- [14] Frank M. WHITE, “*Fluid Mecanics*”, 4th Ed. McGraw-Hill, International Edition 2003.

- [15] Régis JOULIE, " *Mécanique des fluides appliquée*", Ed. ellipses, Paris 1998.
- [16] Y. OURAGH, " *Ecoulements forcés en hydraulique*", 1^{ère} Partie, OPU, Alger 1990.
- [17] Y. OURAGH, " *Ecoulements forcés en hydraulique*", 2^{ème} Partie, OPU, Alger 1990.
- [18] J. VINCENT-GENOD, " *Le transport des hydrocarbures liquides et gazeux par canalisation*", Ed. Technip, Publications de l' I.F.P., 1980.
- [19] R. CABET et Y. LIZORET, " *L'économie du transport par conduite*", Ed. Technip, Publications de l' I.F.P., 1974.
- [20] J. RIOUT, " *Capteurs industriels : technologie et méthodes de choix*", Ed. Lavoisier TEC&DOC, 1985.
- [21] S. CANDEL, " *Mécanique des fluides : Cours*", Ed. DUNOD, 2^{ème} Ed., Paris, 1995.
- [22] Mohinder L. NAYYAR, " *Piping Handbook*", 7th Ed. McGraw-Hill, 2000.
- [23] DOE Fundamentals Handbook, " *Thermodynamics, Heat Transfer and Fluid Flow*", Vol 3, U.S. Department of Energy, Washington, 1992.
- [24] R. COMOLET, " *Mécanique expérimentale des fluides*" , 2^{ème} Ed. Masson, T2, Paris 1976.
- [25] G. LEMASSON, " *Mécanique des fluides. Thermodynamique*" , Ed. Delagrave, Paris 1968.
- [26] E. A. BRUN et al., " *Mécanique des fluides*" , Ed. Dunod, T2, Paris 1968.
- [27] E. A. BRUN et al., " *Mécanique des fluides*" , Ed. Dunod, T3, Paris 1970.
- [28] R. COMOLET, " *Mécanique expérimentale des fluides*" , Ed. Masson, Paris 1982.
- [29] I.G. CURRIE, " *Fundamentals Mechanics of Fluids*" , Ed. CRC Press, 4th Ed., Boca Raton 2013.
- [30] H. SCHLICHTING, K. GERSTEN " *Boundary Layer Theory*" , 8th Ed. Springer-Verlag, Germany 2000.
- [31] GUENDOUZ Hichem, " *Etude de l'écoulement de Couette instationnaire avec Maple*", PFE, Département de Mécanique, Université de Batna 2010.