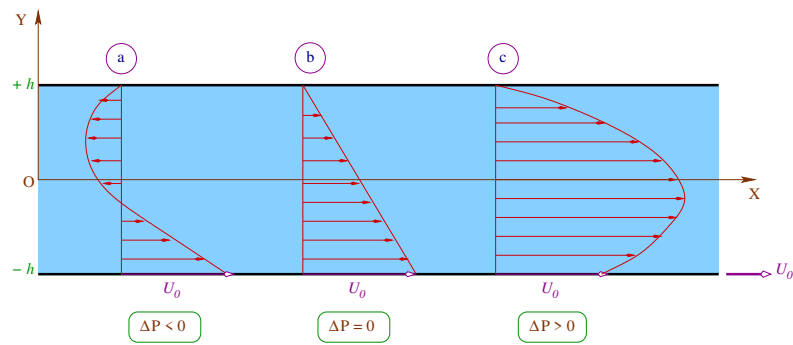


Dr. Laïd MESSAOUDI

MECANIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Résumé pour Masters



Maître de Conférences "A".
Département de Génie Mécanique.
Faculté de Technologies.
Université Batna 2.

Table des matières

1	Dynamique des écoulements visqueux	1
1.1	Propriétés du fluide réel	1
1.2	Description du frottement visqueux	1
1.3	Taux de déformation	3
1.4	Généralisation	5
1.5	Tenseur des contraintes	6
1.6	Liaison entre contraintes et déformations	7
1.7	Equations de Navier-Stokes	9
1.8	Cas limites de la viscosité	12
1.9	Caractéristiques de l'écoulement visqueux	12
1.9.1	Régimes d'écoulement	12
1.9.2	Propriétés des écoulements laminaires	13
1.10	Applications	13
1.10.1	Écoulement de Poiseuille	13
1.10.2	Écoulement de Couette généralisé	17
1.11	Écoulements à faible nombre de Reynolds	22
1.11.1	Lubrification Hydrodynamique	23
1.11.1.1	Formule de Reynolds	23
1.11.1.2	Répartition de pression	25
1.11.1.3	Calcul de la charge portante	26
1.11.1.4	Calcul de la force de frottement	26
1.11.1.5	Paramètres caractérisant le fonctionnement	27
1.11.2	Mouvement long d'une sphère	29
1.11.3	Mouvement long d'un cylindre circulaire	30
1.12	Exercices	31
2	Couches limites	43
2.1	Introduction	43

2.2	Couches limites laminaires (CLL)	44
2.2.1	Equations régissant la couche limite laminaire	44
2.2.2	Paramètres caractéristiques de la couche limite	47
2.2.2.1	Epaisseur de déplacement	47
2.2.2.2	Epaisseur de quantité de mouvement	48
2.2.2.3	Facteur de forme	49
2.2.3	Solution exacte des équations de la CLL	49
2.2.3.1	Cas de la plaque plane	49
2.2.3.2	Cas général	54
2.2.3.3	Evolution de la CLL à la surface d'une forme quelconque	56
2.2.4	Equation intégrale de Von-Karman	56
2.2.5	Analyse de la CLL par la méthode de Karman-Pohlhausen	58
2.2.6	Stabilité de la couche limite laminaire	61
2.3	Couche limite turbulente	63
2.4	Exercices	65
	Bibliographie	69

Dynamique des écoulements visqueux

1.1 Propriétés du fluide réel

Le fluide réel se caractérise, en opposition au fluide parfait, par deux propriétés importantes :

* La *viscosité* qui est une caractéristique physique du fluide se manifestant par une résistance de celui-ci aux déformations et plus particulièrement aux vitesses de déformation. Elle est due à la combinaison des efforts de cohésion et d'agitation moléculaire s'opposant au déplacement relatif des couches liquides les unes par rapport aux autres.

La viscosité dépend de la nature du fluide et varie considérablement d'un fluide à un autre. Pour un même fluide, elle dépend de la pression et de la température ; pour les liquides incompressibles, elle est pratiquement invariante avec la pression.

L'expérience de Couette (§??) est souvent utilisée pour mettre en évidence l'existence de la viscosité.

* L'adhérence du fluide aux parois solides : Contrairement au fluide parfait pour lequel la vitesse d'écoulement possède une valeur non nulle à la paroi (glissement), le fluide réel adhère parfaitement à celle-ci et sa vitesse est nulle à cet endroit. Dans cette zone de fort gradient désignée par *couche limite*, les effets de frottement interne sont importants. Nous verrons que l'épaisseur de cette couche limite dépend à la fois de la viscosité du fluide et du régime d'écoulement. A l'extérieur de la couche limite, la cinématique du fluide est pratiquement identique à celle décrite en fluide parfait.

Ainsi, dans certains modèles d'écoulements, les conditions de glissement ne s'écrivent pas à la paroi elle même, mais à la frontière de la couche limite.

1.2 Description du frottement visqueux

Examinons dans le plan (x, y) la déformation du parallépipède rectangle élémentaire représentant une particule fluide en mouvement (Fig.1.1). Les gradients de vitesse

seront supposés positifs.

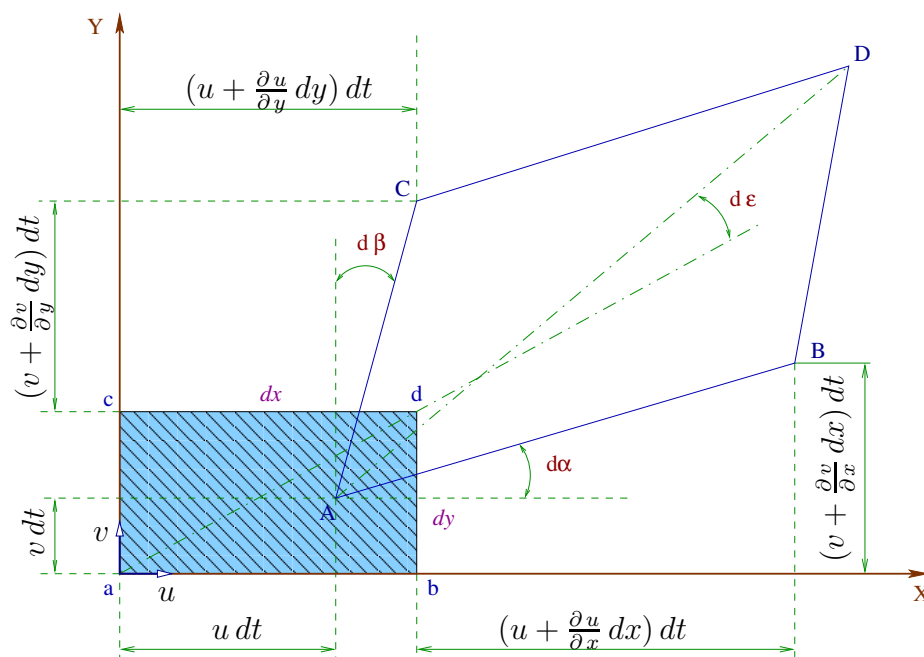


Fig. 1.1: *Déformation d'une particule de fluide en mouvement.*

A l'instant $t = t_0$, la face considérée est supposée rectangulaire de cotés dx et dy .

A l'instant $t = t_0 + dt$, le point a s'est déplacé jusqu'au point A de composantes :

$$A \begin{cases} u dt \\ v dt \end{cases} \quad u \text{ et } v \text{ étant les composantes du vecteur vitesse au point } a.$$

Pendant le même instant, le point b s'est déplacé en B . Le théorème des accroissements finis au premier ordre indique pour le point b une vitesse ayant pour composantes :

$$B \begin{cases} u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \end{cases} \quad \text{d'où les coordonnées du point } B : \begin{cases} dx + (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) dt \\ (v + \frac{\partial v}{\partial x} dx) dt \end{cases}$$

$$\text{De même, les coordonnées du point } C \text{ sont : } \begin{cases} (u + \frac{\partial u}{\partial y} dy) dt \\ dy + (v + \frac{\partial v}{\partial y} dy) dt \end{cases}$$

Les segments ab et ac ont subi à la fois une *translation*, un *allongement* et une *rotation* qui sont tous trois calculables.

Puisqu'il s'agit de faibles déformations, alors les angles $d\alpha$ et $d\beta$ sont assimilables à leurs tangentes :

$$d\alpha = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx) dt - v dt}{dx + (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) dt - u dt} \quad \text{et} \quad d\beta = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy) dt - u dt}{dy + (v + \frac{\partial v}{\partial y} dy) dt - v dt}$$

Après simplification on aura :

$$d\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} dt \quad ; \quad d\beta = \frac{\partial u}{\partial y} dt \quad (1.1)$$

La rotation de la diagonale AD notée $d\varepsilon$ sera déduite de la relation (1.1) :

$$d\varepsilon = \frac{d\alpha - d\beta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dt - \frac{\partial u}{\partial y} dt \right)$$

d'où l'on peut calculer la vitesse angulaire de la particule :

$$\Omega_z = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.2)$$

Le dernier membre de cette équation représente la composante suivant Z du vecteur tourbillon : $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{q}$.

Dans le cas d'un écoulement irrotationnel, la particule se déformera sans changement de direction de sa diagonale et subira donc une déformation sans rotation ($d\varepsilon = 0$).

1.3 Taux de déformation

Suivant la direction X , l'élongation du segment AB s'écrit :

$$dX = [dx + (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) dt - u dt] - dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx dt$$

La vitesse d'élongation sera quant à elle définie par :

$$q = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dX}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

et le taux de déformation par : $\frac{q}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$

Suivant la direction Y , le taux de déformation du même segment est égal à $\frac{\partial u}{\partial y}$. Concernant le segment AC , les taux de déformation suivant X et Y sont respectivement :

$$\frac{\partial v}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y}$$

On peut ainsi construire le *tenseur des taux de déformation* dans le plan (x, y) :

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Ce tenseur peut être décomposé en deux tenseurs : un *tenseur d'élongation symétrique* et un *tenseur de rotation antisymétrique* :

$$\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}$$

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Concernant le tenseur $\overline{\overline{D}}$, les termes diagonaux représentent les *taux d'élongation* des cotés de la particule dans les directions X et Y tandis que les autres termes non diagonaux représentent la *déformation par cisaillement*. Les deux parties de la particule aboutissant au point A subissent des rotations respectives $d\alpha$ et $d\beta$ de sens inverses. Le taux de cisaillement dans le plan (x, y) est donc égal à :

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{d\alpha + d\beta}{dt} \right)$$

soit d'après la relation (1.1) :

$$\tau_c = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.5)$$

Cette valeur est proportionnelle à l'allongement et au raccourcissement des deux diagonales du parallépipède.

1.4 Généralisation

Si l'on considère une particule parallélépipédique ayant pour dimensions respectives dx , dy , dz , le principe développé précédemment peut être aisément généralisé. Dans un champs de vitesse quelconque, le tenseur des taux de déformation s'écrira comme la superposition d'un tenseur d'élongation symétrique et d'un tenseur de rotation antisymétrique :

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}} \quad (1.6)$$

qui peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

- Remarque :

A l'instant $t = t_0 + dt$ les dimensions principales de la particule deviennent (Fig.1.1) :

$$dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) \quad dy \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt \right) \quad dz \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} dt \right)$$

Le volume de celle-ci devient au premier ordre :

$$dx dy dz \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt \right]$$

soit encore :

$$dx dy dz [1 + \text{div } \vec{q} dt]$$

Pour un fluide incompressible, le terme de divergence est nul, satisfaisant l'équation de continuité.

Au premier ordre, la particule tourne donc et se déforme *sans changer de volume*.

1.5 Tenseur des contraintes

Le tenseur $\overline{\overline{C}}$ des contraintes appliquées à la surface d'une particule de forme parallélépipédique de dimensions élémentaires dx , dy , dz est composé des contraintes normales et des contraintes tangentielles.

Examinons sur l'une des faces supposée contenue dans le plan YOZ les contraintes en présence (Fig.1.2) :

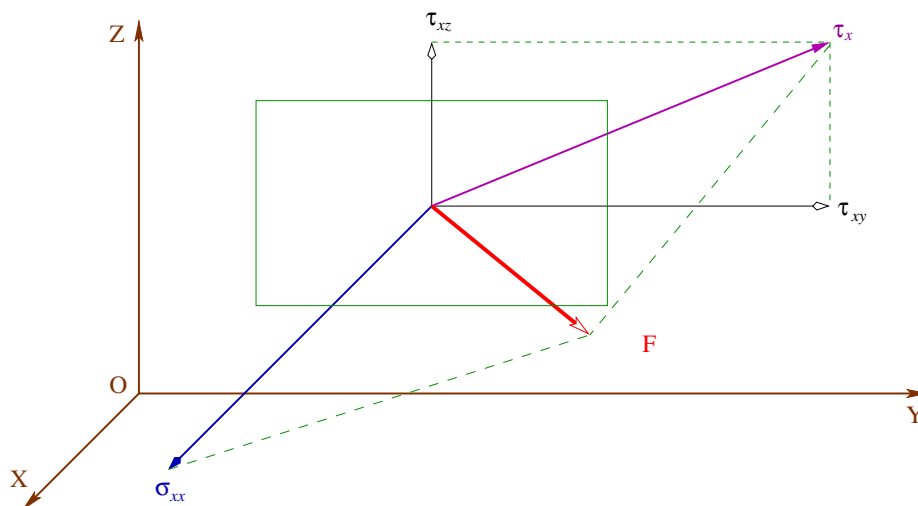


Fig. 1.2: *Contraintes normales et tangentielles.*

L'effort \vec{F} exercé par le fluide environnant donne lieu à deux contraintes :

σ_{xx} : contrainte normale

τ_{xy} , τ_{xz} : composantes de la contrainte de cisaillement τ_x .

Le double indice associé à ces contraintes doit être interprété de la manière suivante :

Le premier (x) correspond à la face orientée par l'axe correspondant, le second (x , y ou z) correspond à la direction de projection.

Pour une face orientée de manière quelconque dans l'espace, le tenseur des contraintes s'écrira :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

On démontre que les termes symétriques sont égaux entre eux :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Pour un fluide au repos ou un fluide de viscosité nulle, les contraintes tangentielles sont nulles, les contraintes normales sont alors égales et opposées à la pression hydrostatique p . On utilisera cette propriété pour écrire le tenseur sous la forme de la superposition de deux états :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

soit :

$$\overline{\overline{C}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (1.9)$$

avec : $\overline{\overline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ qui est le *tenseur unitaire* et

$$\overline{\overline{\tau}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

appelé *tenseur déviateur* représentant uniquement les effets de frottement.

1.6 Liaison entre contraintes et déformations

Afin d'établir la liaison entre les contraintes et les déformations, trois hypothèses fondamentales sont utilisées :

- La rotation sans déformation de la particule fluide n'engendre aucune contrainte de cisaillement.
- Les contraintes sont proportionnelles aux taux de déformation (généralisation de l'équation de Newton).
- Le fluide est isotrope.

On observera donc entre les tenseurs la relation générale suivante :

$$\overline{\overline{\tau}} = \varepsilon \operatorname{div} \overrightarrow{\overline{\overline{I}}} + 2\mu \overline{\overline{D}} \quad (1.11)$$

avec

ε : viscosité de dilatation,

μ : viscosité dynamique.

Cette relation permet d'accéder aux différentes composantes des contraintes :

- **Contraintes normales :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \\ \sigma_{yy} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p \\ \sigma_{zz} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - p \end{array} \right. \quad (1.12)$$

- **Contraintes tangentielles :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Pour un fluide compressible ou non, l'addition des trois contraintes normales conduit à :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = (3\varepsilon + 2\mu) \operatorname{div} \vec{q} - 3p$$

permettant d'exprimer la pression hydrostatique locale :

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \left(\varepsilon + \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div} \vec{q} \quad (1.14)$$

En fluide incompressible, l'équation de continuité montre que la pression est égale et opposée à la moyenne des contraintes normales.

En fluide compressible, on admet qu'il en va de même, ce qui implique que le second terme est nul :

$$\varepsilon + \frac{2}{3}\mu = 0$$

C'est une hypothèse que l'on adopte couramment sous forme de l'équation de Stokes :

$$\varepsilon = -\frac{2}{3}\mu \quad (1.15)$$

Dans l'écoulement plan pour lequel $v = w = 0$, les relations (1.13) se ramènent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (1.16)$$

correspondant au cas de l'expérience de Couette décrite au §??.

1.7 Equations de Navier-Stokes

Ce sont les équations (??) de la dynamique des fluides (Euler) établies en fluide réel pour lequel la viscosité engendre des contraintes de cisaillement.

Examinons les efforts exercés sur une particule de fluide suivant la direction OX seulement. On observe alors pour un fluide réel, en plus des contraintes normales, les contraintes tangentielles (Fig.1.3).

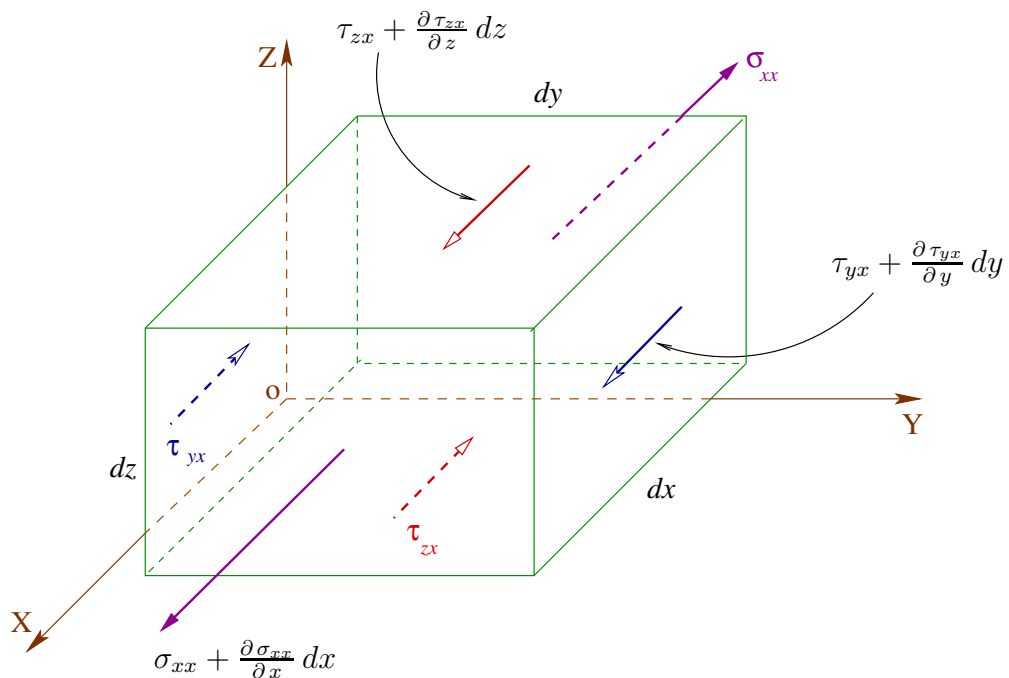


Fig. 1.3: *Etablissement des équations de Navier-Stokes.*

Appliquons maintenant la loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ex} = m \vec{\gamma}$

Suivant OX on a : $\sum F_x = m \gamma_x = \rho dx dy dz \frac{Du}{Dt}$

avec $\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$

$$\begin{aligned} \sum F_x = & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_{xx} dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \\ & - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \rho dx dy dz f_x \end{aligned}$$

f_x étant la composante de toutes les forces volumiques par unité de masse suivant l'axe X .

En simplifiant par $dx dy dz$ on aura :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + f_x \quad (1.17)$$

En introduisant les relations (1.12) et (1.13) on aura alors :

$$\rho \gamma_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho f_x$$

et pour une viscosité dynamique μ constante :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [(\varepsilon + \mu) \operatorname{div} \vec{q}] + \mu \Delta u \quad (1.18)$$

où $\Delta u \equiv \nabla^2 u$

Pour le cas d'un fluide incompressible l'équation de Navier-Stokes suivant l'axe OX se réduit à :

$$\frac{Du}{Dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \quad (1.19)$$

avec : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

Les équations de Navier-Stokes (N-S) s'écrivent donc sous forme vectorielle compacte :

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p + \nu \Delta \vec{q} \quad (1.20)$$

En coordonnées cartésiennes, les projections sur les axes X , Y et Z donnent respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Ces équations expriment l'équilibre entre les forces d'inertie d'une part et, d'autre part, les forces de gravité (ou pesanteur) par unité de masse, celles de pression ainsi que celles de viscosité.

Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques :

- Suivant la direction radiale (r) :

$$\frac{D u_r}{D t} - \frac{v_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (1.22)$$

- Suivant la direction tangentielle (θ) :

$$\frac{D v_\theta}{D t} + \frac{u_r v_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) \quad (1.23)$$

- Suivant la direction verticale (z) :

$$\frac{D w_z}{D t} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_z \quad (1.24)$$

Avec :

- Composantes du vecteur vitesse : $\vec{q} = \vec{q}(u_r, v_\theta, w_z)$
- Dérivée particulaire d'une fonction h quelconque :

$$\frac{D h}{D t} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (1.25)$$

- Laplacien d'une fonction h quelconque :

$$\nabla^2 h \equiv \Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (1.26)$$

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0 \quad (1.27)$$

1.8 Cas limites de la viscosité

Les équations de N-S peuvent être simplifiées et on obtient des formes applicables pour certains types d'écoulements. Lorsque la viscosité du fluide est nulle, on retrouve les équations d'Euler (??). Ce type d'écoulement est appelé “écoulements à grand nombre de Reynolds”.

Lorsque la viscosité du fluide est très élevée, les forces d'inertie sont négligables devant les forces visqueuses et volumiques et on aura les équations relatives aux “écoulements à faible nombre de Reynolds”, appelés encore “écoulements de Stokes” ou “écoulements rampants” décrits par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = f_x + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = f_y + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = f_z + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Ces équations constituent la base de la théorie de la “lubrification hydrodynamique” (§1.11.1).

1.9 Caractéristiques de l'écoulement visqueux

L'observation de l'écoulement des fluides est aujourd'hui facilitée par des moyens de mesures de plus en plus performants. La connaissance de la structure fine des écoulements et en particulier, des phénomènes turbulents, des couches limites, des sillages a permis de mettre en place des modélisations de plus en plus performantes.

Sur la base des expériences de Reynolds, un pas important a été franchi à la fin du dernier siècle concernant la structuration des régimes d'écoulement. Prandtl et Von Karman ont présenté au début du vingtième siècle les premiers développements théoriques concernant la couche limite. Celle-ci fait encore l'objet de nombreuses études, tant théoriques qu'expérimentales, portant essentiellement sur la transition et le décollement en présence de gradients de pression positifs ou négatifs et du taux de turbulence.

1.9.1 Régimes d'écoulement

L'expérience de Reynolds consiste à observer l'écoulement de l'eau dans un tube transparent, écoulement au centre duquel est introduit un fin filet de liquide coloré.

On observe principalement deux régimes distincts :

- un **régime laminaire** montrant un filet coloré parfaitement rectiligne ne se mélangeant pas à l'écoulement principal. Ce régime est observé aux faibles vitesses, il est parfaitement stable et pratiquement imperturbable.
- un **régime turbulent** se manifestant à partir d'une certaine distance de l'entrée par une oscillation du filet coloré puis à un mélange intime avec le fluide principal.

En utilisant plusieurs diamètres de tube et différentes viscosités de fluide (en faisant varier par exemple la température), Reynolds a montré que le régime laminaire était toujours observé lorsque le produit $\frac{qD}{\nu}$ était inférieur à 2300. Ce produit adimensionnel, appelé *nombre de Reynolds*, quantifie l'ensemble des caractéristiques de l'écoulement : la vitesse moyenne du fluide, le diamètre de la conduite, la viscosité cinématique du fluide.

Au-delà de cette valeur, suivant la qualité de l'entrée du tube, la régularité de la surface intérieure, la présence de vibrations, etc., l'écoulement laminaire peut ou non se transformer en régime turbulent. Dans des conditions idéales, l'écoulement laminaire peut se maintenir jusqu'à un nombre de Reynolds de $4 \cdot 10^4$. Au-delà, l'écoulement organisé se dégrade systématiquement en écoulement turbulent.

1.9.2 Propriétés des écoulements laminaires

L'écoulement laminaire se rapproche de l'idée que l'on se fait de l'écoulement d'un fluide parfait pour lequel on imagine un glissement des diverses couches de fluide les unes sur les autres sans échange de particules entre les différentes couches. Dans ce régime d'écoulement, les effets visqueux sont pourtant prépondérants et on est loin de l'écoulement potentiel, en particulier au voisinage des parois. Cependant, par opposition à l'écoulement turbulent, c'est l'organisation et la stabilité qui dominent parmi les propriétés principales de l'écoulement laminaire.

Les applications industrielles les plus importantes correspondent aux paliers et patins hydrodynamiques et à tous les domaines de la lubrification. Ils correspondent également à l'écoulement en milieu poreux ; filtrations, applications pétrolières, etc.

L'écoulement laminaire unidimensionnel voire bidimensionnel fournit quelques unes des solutions exactes des équations de Navier-Stokes.

1.10 Applications

1.10.1 Écoulement de Poiseuille

Soit un écoulement d'un fluide incompressible entre deux plaques planes parallèles de largeur L très importante par rapport à leur longueur l (Fig.1.4). L'écoulement s'effectue sous l'action du gradient de pression.

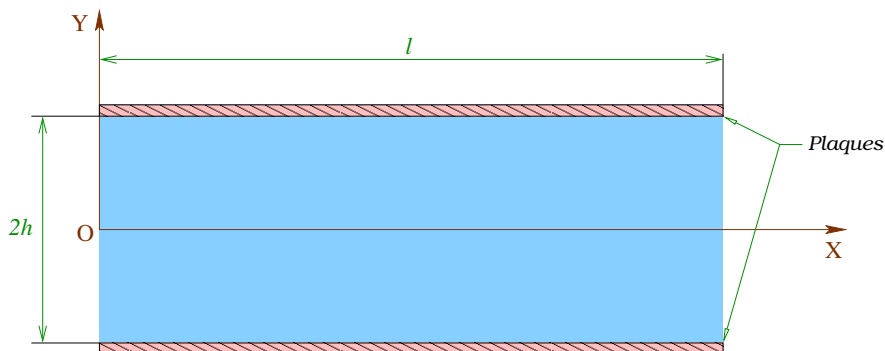


Fig. 1.4: *Écoulement de Poiseuille.*

Hypothèses simplificatrices :

- Les composantes v et w du vecteur vitesse dans l'écoulement suivant Y et Z sont nulles.
- L'écoulement est permanent.
- Les forces de pesanteur sont négligeables (écoulement horizontal).

Avec ces hypothèses simplificatrices nous aurons :

* Equation de continuité : $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y, z)$

or $L \gg l \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ (pas de variation de la vitesse selon l'axe Z , donc : $u = u(y)$)

* Equations de Navier-Stokes :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow p = p(x)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2} \Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

Le gradient de pression $\frac{dp}{dx}$ est le paramètre responsable du mouvement du fluide entre les plaques, on peut le remplacer par : $\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{l}$
avec : $\Delta p = p(x=0) - p(x=l)$

* Conditions aux limites : Le fluide étant visqueux, nous écrivons donc les deux conditions d'adhérence du fluide aux parois inférieure et supérieure :

$$\begin{cases} u(y = -h) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} h^2 - C_1 h + C_2 = 0 \\ u(y = +h) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} h^2 + C_1 h + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{h^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \end{cases}$$

Donc le profil des vitesses est :

$$u(y) = \frac{h^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (1.29)$$

Ce profil est ainsi de forme parabolique symétrique par rapport à l'axe X (Fig.1.5).

Par la suite et afin de faciliter les calculs, on pose : $A = \frac{h^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l}$

* *Position* de la vitesse maximale :

$$\left. \frac{du(y)}{dy} \right|_{y=d} = 0 \implies -\frac{2A}{h^2} d = 0 \implies d = 0$$

La position de la vitesse maximale est donc localisée au centre du canal.

* *Vitesse maximale* : elle est donnée par : $u_{max} = u(y = d)$ d'où :

$$u_{max} = \frac{h^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \quad (1.30)$$

* *Vitesse moyenne spatiale* : notée \bar{u} ou u_m et appelée aussi "*vitesse débitante*", elle est obtenue à partir du calcul du débit sur la largeur L :

$$Q_v = \int_S u(y) ds = \int_{-h}^{+h} u(y) L dy = 2AL \int_0^h \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) dy = 2AL \left(h - \frac{h}{3} \right) = \frac{4}{3} A h L$$

$$Q_v = \frac{2Lh^3}{3\mu} \frac{\Delta p}{l} \quad (1.31)$$

et d'après la définition du débit, nous avons : $Q_v = S\bar{u} = 2hL\bar{u}$ d'où :

$$\bar{u} = \frac{Q_v}{2hL} = \frac{4AhL}{3 \cdot 2hL} = \frac{2}{3} A \quad \text{et en remplaçant :}$$

$$u_m \equiv \bar{u} = \frac{h^2}{3\mu} \frac{\Delta p}{l} = \frac{2}{3} u_{max} \quad (1.32)$$

En combinant ces expressions, le profil des vitesses peut aussi s'écrire :

$$\frac{u(y)}{\bar{u}} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (1.33)$$

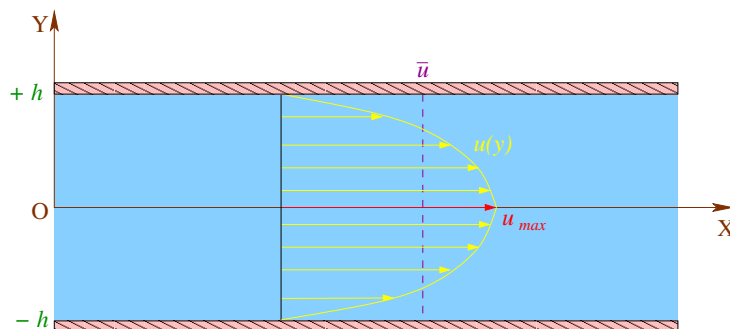


Fig. 1.5: **Écoulement de Poiseuille. Profil des vitesses.**

* Le nombre de *Reynolds* de l'écoulement est calculable à partir du *diamètre hydraulique* :

$$D_H = \frac{4S}{P} \quad (1.34)$$

où :

- S : section de passage (ou section d'écoulement) ;
- P : périmètre mouillé ;
- R_H : rayon hydraulique ($D_H = 4R_H$).

En appliquant cette relation à l'écoulement entre les deux plaques nous aurons :

$$D_H = \frac{4 \cdot 2hL}{4h+2L} = \frac{4hL}{2h+L} \quad \text{et si } h \ll L \text{ alors } D_H \simeq 4h \text{ d'où :}$$

$$\Re_e = \frac{\bar{u} D_H}{\nu} \simeq \frac{4h\bar{u}}{\nu} = \frac{4h^3}{3\rho\nu^2} \frac{\Delta p}{l} \quad (1.35)$$

L'écoulement reste laminaire et l'on observe une distribution de vitesse parabolique tant que $\Re_e < \Re_{ec} \simeq 2300$ à 40000 suivant les conditions d'établissement.

- **Contraintes au sein du fluide** : L'état de contrainte au sein du fluide est donné par l'équation de Newton qui exprime que les contraintes sont proportionnelles au taux de déformation (1.13).

$$\tau(y) = \mu \frac{du(y)}{dy} = -\frac{\Delta p}{l} y \quad (1.36)$$

Cette contrainte est nulle au centre de l'écoulement (u_{max}) et maximale à la paroi :

$$\tau_{p1} = \mu \left. \frac{du(y)}{dy} \right|_{y=+h} = -\frac{\Delta p}{l} h ; \quad \tau_{p2} = \mu \left. \frac{du(y)}{dy} \right|_{y=-h} = \frac{\Delta p}{l} h$$

La distribution des contraintes est indiquée sur la figure (Fig.1.6) :

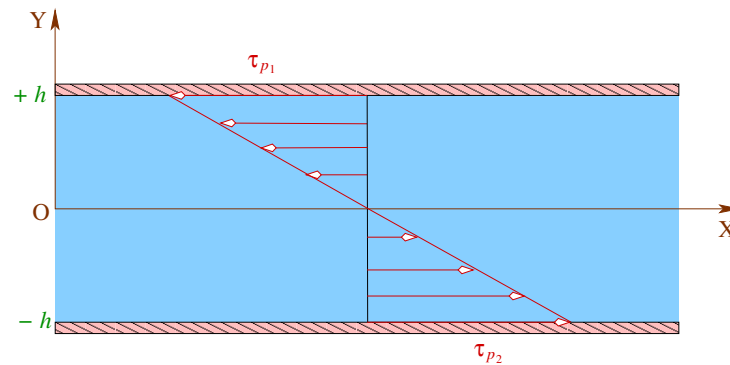


Fig. 1.6: *Écoulement de Poiseuille. Etat de contrainte au sein du fluide.*

- **Coefficient de pertes de charge** : On introduit le coefficient de pertes de charge λ défini par :

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} \simeq \frac{24}{\Re_e} \cdot \frac{l}{h} \quad (1.37)$$

La pression motrice est égale à la perte de charge par frottement sur les parois et se calcule par l'intermédiaire de la contrainte à la paroi τ_p .

- **Coefficient de frottement à la paroi** : Il est donné par la relation :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} \simeq \frac{24}{\Re_e} \simeq \lambda \cdot \frac{h}{l} \quad (1.38)$$

- **Force de traînée sur la plaque** : Cette force est due au frottement sur la plaque et se calcule par :

$$F_t = S \cdot \tau_p = L \cdot h \Delta p \quad (1.39)$$

1.10.2 Écoulement de Couette généralisé

C'est l'écoulement de Poiseuille dans lequel la paroi inférieure se déplace parallèlement à elle-même avec la vitesse constante U_0 . L'écoulement est décrit par le profil des vitesses suivant :

$$u(y) = \frac{U_0}{2} \left[1 - \frac{y}{h} \right] + \frac{h^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (1.40)$$

Suivant la valeur de Δp , on observe les allures suivantes pour la distribution de vitesse (Fig.1.7) :

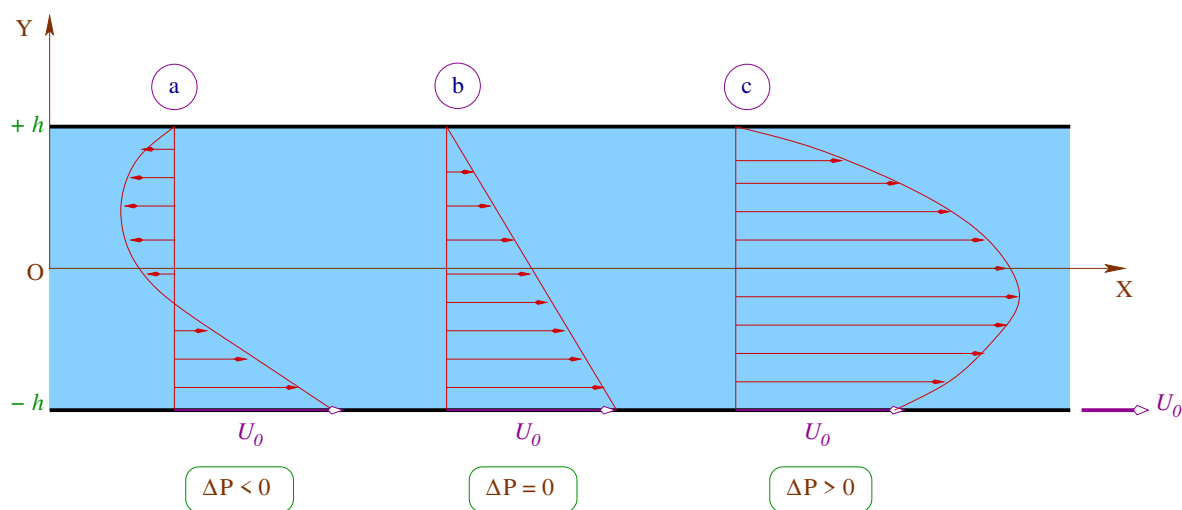
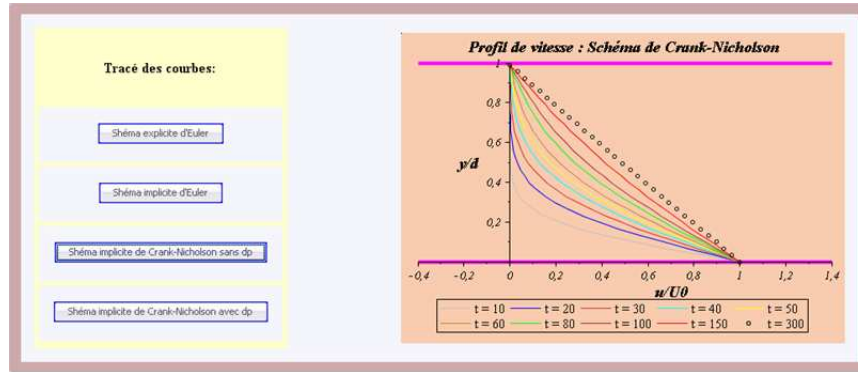


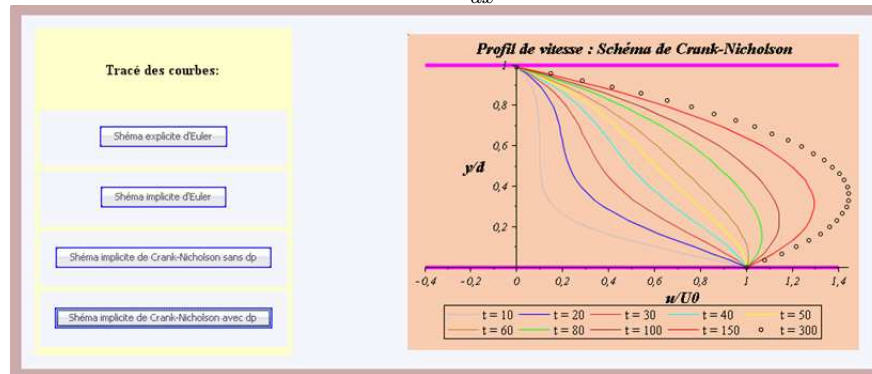
Fig. 1.7: *Écoulement de Couette généralisé. Profils des vitesses.*

- Si $\Delta p > 0$ ou $\frac{dp}{dx} < 0$, on dira que l'écoulement s'effectue avec un *gradient de pression favorable* (la pression s'effectue dans le sens de l'écoulement).
- Si $\Delta p < 0$ ou $\frac{dp}{dx} > 0$, on dira que l'écoulement s'effectue avec un *gradient de pression défavorable* (la pression s'effectue dans le sens contraire de l'écoulement).

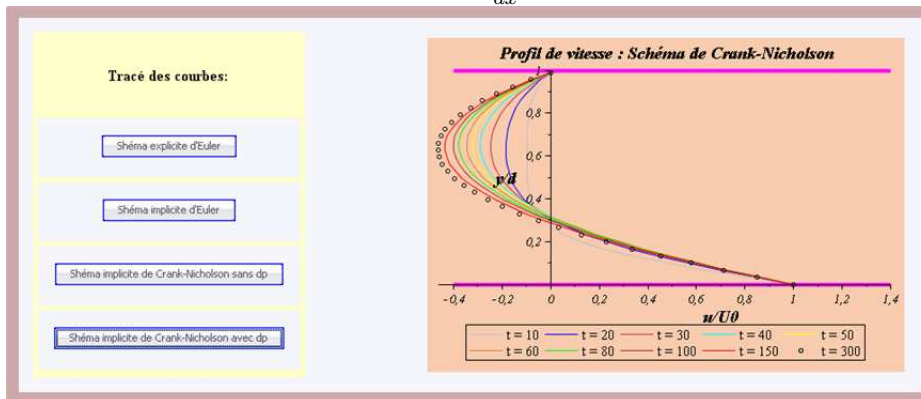
Les figures (Fig.1.8) ci-dessous nous montrent la distribution de vitesse dans un écoulement de Couette instationnaire pour différents gradients de pression.



$$\Delta p = 0, \frac{dp}{dx} = 0$$



$$\Delta p > 0, \frac{dp}{dx} < 0$$



$$\Delta p < 0, \frac{dp}{dx} > 0$$

Fig. 1.8: *Ecoulement de Couette instationnaire pour différents gradients de pression [31].*

- Exercice d'application :

Un dispositif convoyeur-courroie monté sur un bateau est utilisé pour récupérer de l'huile de pétrole de viscosité cinématique ν qui contamine la surface de la mer (Fig.1.9). On suppose que l'écoulement est permanent, incompressible, visqueux et que le dispositif fonctionne en continu c-à-d que le film d'huile d'épaisseur a n'est pas discontinu. En suppose, de plus, que la courroie, fonctionnant à une vitesse U_0 constante, a une largeur L (perpendiculaire au papier) très grande.

1. Déterminer l'expression du débit volumique d'huile qui peut être porté vers le haut (sur le bateau).
2. En maintenant l'angle d'inclinaison θ constant, quel est le débit maximal qu'on peut récupérer sur le bateau ?.

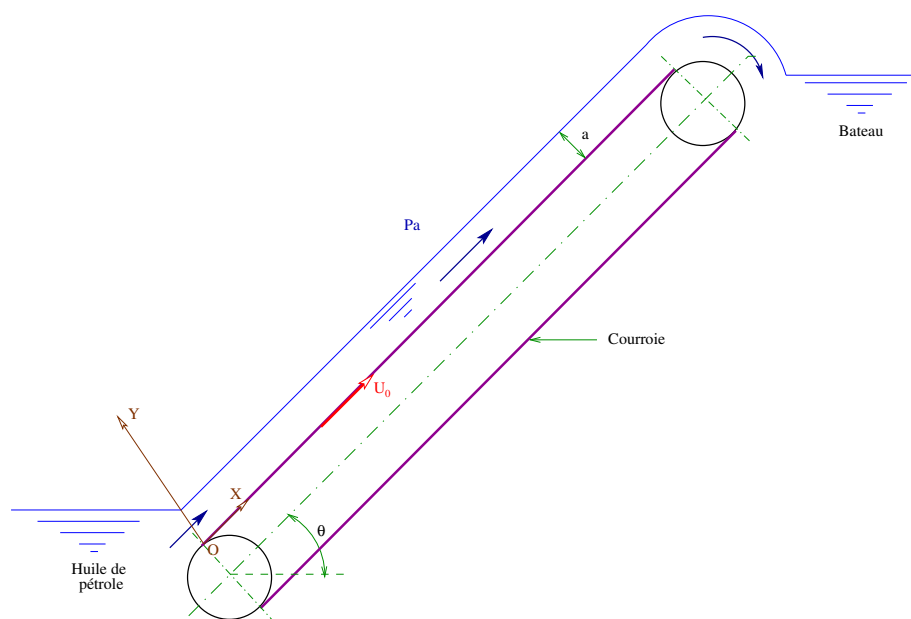


FIGURE 1.9: *Exercice d'application. Convoyeur-courroie.*

Solution :

1- Le problème étant en coordonnées cartésiennes, nous utilisons alors les équations de N-S (1.28). Utilisons les hypothèses simplificatrices afin de pouvoir résoudre le problème plus facilement (sans programmation) :

— Ecoulement stationnaire $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$.

- Fluide incompressible $\Rightarrow \rho = C^{te}$.
- Fluide visqueux \Rightarrow adhérence du fluide à la courroie (cette hypothèse sera utilisée dans les C.L.).
- Ecoulement plan $(o, x, z) \Rightarrow v = 0$.
- Courroie de largeur très grande selon l'axe $z \Rightarrow w = 0$ et $\frac{\partial q}{\partial z} = 0$.
- Forces volumiques non négligeables à cause de la position inclinée de la courroie : l'huile résiste au mouvement ascendant donc nous avons les composantes suivantes :

$$f_x = -g \sin \theta \quad ; \quad f_y = -g \cos \theta \quad ; \quad f_z = 0$$

On associe l'équation de continuité à celles de N-S :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

en la simplifiant, on aura : $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y, z)$.

Or $\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow u = u(y)$, le profil de vitesse est donc uniquement fonction de la variable y .

La dernière équation de N-S nous montre que le profil de pression ne dépend que de x et y :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \Rightarrow P = P(x, y).$$

Après toutes ces simplification, les équations principales se réduisent à :

$$\begin{cases} 0 = -g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Pour pouvoir intégrer et déterminer le profil des vitesses, il faut d'abord trouver le champ de pression. La deuxième équation de ce système nous donne :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos \theta \Rightarrow P(x, y) = -\rho g \cos \theta y + f(x)$$

Or, nous avons toujours comme condition à la surface du fluide :

$$P(x, a) = P_a \Rightarrow f(x) = P_a + \rho g a \cos \theta = C^{te}$$

d'où le champ de pression au sein du fluide :

$$P(x, y) = P(y) = P_a + \rho g \cos \theta \cdot (a - y)$$

Ceci nous facilite donc l'intégration de la première équation du système car : $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$.

Une double intégration par rapport à y nous donne tout de suite :

$$u(y) = \frac{g \sin \theta}{2\nu} y^2 + C_1 y + C_2$$

* Conditions aux limites (C.L.) :

— Adhérence du fluide à la courroie $\Rightarrow u(y=0) = U_0 \Rightarrow C_2 = U_0$.

— Contrainte nulle à la surface (vitesse minimale) $\Rightarrow \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=a} = 0$

$\Rightarrow C_1 = -\frac{g a \sin \theta}{\nu}$ d'où le profil des vitesses :

$$u(y) = U_0 - \frac{g \sin \theta}{2\nu} (2a - y) y$$

C'est maintenant que nous pouvons répondre à la question et déterminer le débit qui peut être porté sur le bateau. Nous avons, par définition du débit :

$$Q_v = \int_S u(y) dS = \int_0^a u(y) L dy = U_0 L a - \frac{L g \sin \theta}{3\nu} a^3$$

2- Déterminons le débit maximal qu'on peut récupérer si $\theta = C^{te}$:

$\theta = C^{te} \Rightarrow Q_v = Q_v(a)$ et alors le débit max est donné par la valeur de a qui annule sa dérivée par rapport à a :

$$\frac{dQ_v}{da} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{\nu U_0}{g \sin \theta}}$$

et le débit maximal est : $Q_{vmax} = Q_v \left(\sqrt{\frac{\nu U_0}{g \sin \theta}} \right)$

soit finalement :

$$Q_{vmax} = \frac{2}{3} L U_0 \sqrt{\frac{\nu U_0}{g \sin \theta}}$$

1.11 Écoulements à faible nombre de Reynolds

Les équations de N-S (1.21) qui découlent de la 2^{ème} loi de Newton stipulent que le taux de variation de la quantité de mouvement d'une particule de fluide doit être équilibré par les forces volumiques (gravité) appliquées sur la particule ainsi que les forces surfaciques (pression et frottement) exercées sur les facettes de cette particule.

La résolution de ces EDP non linéaires étant difficile en l'absence de solution exacte, on cherche généralement à obtenir des solutions approximatives en faisant recours aux méthodes numériques. Sous certaines conditions, le taux de variation de la quantité de mouvement est faible comparé aux forces volumiques et surfaciques et peut donc être négligé sans trop d'erreurs dans la solution. L'écoulement est alors gouverné par l'équilibre entre les forces volumiques et surfaciques. Physiquement, ceci arrive quand la viscosité du fluide est élevée, quand la masse volumique est faible, quand la vitesse change rapidement à travers une faible distance produisant un brusque gradient spatial ou bien quand la vitesse convective est suffisamment faible. Ceci revient globalement à ce que le nombre de Reynolds soit suffisamment faible en fonction du problème considéré (écoulements de sirops, de miels et de diverses huiles en lubrification).

Dans ce paragraphe, nous allons considérer les écoulements “à faible nombre de Reynolds” ($\mathfrak{R}_e \ll 1$), appelés aussi “écoulements de Stokes” qui sont régis par les EDP linéaires (1.28). Ces équations peuvent avoir une solution exacte pour certains problèmes simples sinon, pour les problèmes plus compliqués, le passage aux solutions approximatives est nécessaire.

1.11.1 Lubrification Hydrodynamique

Un écoulement laminaire d'une grande importance pratique est celui de la lubrification hydrodynamique. Nous allons développer cette théorie dite “*théorie du coin d'huile*” à travers un exemple très simple utilisé en industrie qui est celui du “*patin hydrodynamique*”. Nous allons déterminer l'équation de la charge portante maximale que peut supporter le système ainsi que la force de traînée requise pour mettre en mouvement la plaque supérieure à la vitesse U_0 .

1.11.1.1 Formule de Reynolds

Soit un patin incliné, fixe, de longueur L , de largeur unité et un plan mobile animé d'une vitesse U_0 entraînant par son mouvement une mince couche d'huile entre les deux surfaces (Fig.1.10).

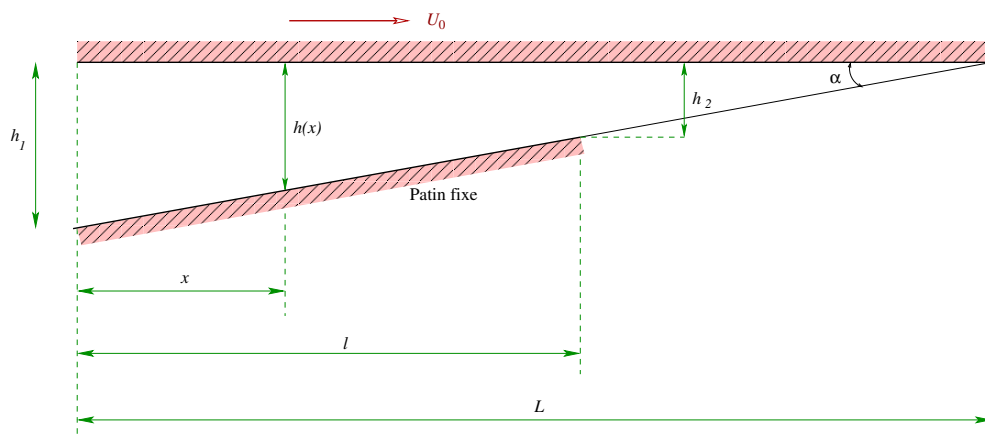


FIGURE 1.10: *Patin hydrodynamique.*

Nous supposons que la pente est très faible de telle sorte que les calculs effectués en (§1.10.1) restent valables. Nous avons alors après simplification des équations de N-S :

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

Puisque la pression ne varie pas en fonction de y à cause de la très faible épaisseur du film d'huile, l'intégration de cette équation nous donne :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

Les constantes sont déterminées par les deux conditions d'adhérence du fluide aux parois :

$$u(y=0) = 0 \quad \text{et} \quad u(y=h) = U_0.$$

Le profil des vitesses est donc :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h) + \frac{U_0}{h} y \quad (1.41)$$

Le débit volumique passant entre les plans est :

$$Q_v = \int_0^h u(y) dy = \frac{U_0 h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.42)$$

D'où la formule dite de *Reynolds* liant le gradient de pression directement au débit :

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu U_0 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{2Q_v}{h^3 U_0} \right) \quad (1.43)$$

1.11.1.2 Répartition de pression

La formule de Reynolds nous permet de déterminer la répartition de la pression connaissant la loi $h(x)$ du plan supérieur :

$$h(x) = (L - x) \tan \alpha \simeq \alpha (L - x) \quad (1.44)$$

d'où :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6 \mu U_0}{\alpha^2} \left[\frac{1}{(L - x)^2} - \frac{2 Q_v}{\alpha (L - x)^3 U_0} \right]$$

et en intégrant :

$$p(x) = p(x = 0) + \int_0^x \frac{dp}{dx} dx = P_a + \frac{6 \mu U_0}{\alpha^2} \left[\frac{x}{L(L-x)} - \frac{Q_v}{\alpha U_0} \frac{x(2L-x)}{L^2(L-x)^2} \right]$$

la deuxième condition aux limites $p(x = l) = P_a$ nous donne le débit :

$$Q_v = \frac{\alpha U_0 L (L - l)}{2L - l} = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} U_0 \quad (1.45)$$

d'où finalement :

$$p(x) = P_a + \frac{6 \mu U_0 x (l - x)}{\alpha^2 (2L - l) (L - x)^2} \quad (1.46)$$

La position de la pression maximale est obtenue pour $\left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=x_m} = 0$, ce qui nous donne :

$$x_m = \frac{Ll}{2L - l} \quad (1.47)$$

et en remplaçant α issu de la relation : $h_2 = \alpha (L - l)$, on aura l'expression de la pression maximale : $p_{max} = p(x = x_m)$, d'où :

$$p_{max} = P_a + \frac{3 \mu U_0 l^2 (L - l)}{2 h_2^2 L (2L - l)} \quad (1.48)$$

La variation de la pression le long du film d'huile est représentée plus loins (Fig.1.12).

Ce dispositif constitue le principe de la buté *Michell* qui est utilisée dans la construction des *pivoteries des groupes turbo alternateurs* à axe vertical. L'arbre du groupe porte une couronne dont la face inférieure repose sur une couronne de patins inclinés supportée par les fondations du groupe. L'ensemble est contenu dans un bain d'huile dont le refroidissement est assuré par une circulation continue à travers un réfrigérant. On peut ainsi supporter les charges de plusieurs centaines de tonnes que représente le poids des masses tournantes auquel s'ajoute la poussée hydraulique.

1.11.1.3 Calcul de la charge portante

La charge portante est obtenue par intégration des forces de pression effectives sur le plan supérieur :

$$F = \int_0^l (p - P_a) dx = \frac{\mu U_0 l^2}{h_2^2} C_p \quad (1.49)$$

où C_p est un coefficient sans dimensions qui s'exprime par :

$$C_p = \frac{6 h_2^2}{(h_1 - h_2)^2} \left[\ln \frac{h_1}{h_2} - 2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right] \quad (1.50)$$

Le point d'application x_c de la charge portante sur le patin est nécessaire pour la construction de ce dernier. Il est obtenu par une équation de moments par rapport à l'origine :

$$F \cdot x_c = \int_0^l (p - P_a) x dx \quad (1.51)$$

Dans cette formule, nous avons négligé l'inclinaison α (très faible), ce qui revient à admettre que l'abscisse x_c du point d'application est le même pour le patin et le plan supérieur.

1.11.1.4 Calcul de la force de frottement

La contrainte au sein du film d'huile due au frottement est donnée par l'équation de Newton :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \left[\frac{U_0}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h - 2y) \right] \quad (1.52)$$

et les contraintes sur le patin et sur le plan supérieur sont :

$$\tau_0 = \frac{\mu U_0}{h} - \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \quad (1.53)$$

$$\tau_h = \frac{\mu U_0}{h} + \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \quad (1.54)$$

La force de frottement sur le plan mobile est donnée par :

$$F_f = \int_0^l \tau_h dx = \frac{\mu U_0 l}{h_2} C_f \quad (1.55)$$

où C_f est un coefficient sans dimensions qui s'exprime par :

$$C_f = \frac{2 h_2}{h_1 - h_2} \left[2 \ln \frac{h_1}{h_2} - 3 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right] \quad (1.56)$$

On définit le *coefficient de frottement équivalent* par :

$$f = \frac{F_f}{F} = \frac{h_2}{l} \cdot \frac{C_f}{C_p} \quad (1.57)$$

1.11.1.5 Paramètres caractérisant le fonctionnement

Pour caractériser le fonctionnement du système hydrodynamique on définit les paramètres suivants :

$$K_p = \sqrt{C_p} = \sqrt{\frac{F}{\mu U_0}} \cdot \frac{h_2}{l} \quad (1.58)$$

$$K_f = \frac{C_f}{C_p} \sqrt{\frac{F}{\mu U_0}} \cdot \frac{h_2}{l} \quad (1.59)$$

Traçons ensuite les variations de ces coefficients en fonction de $\frac{h_1}{h_2}$ (Fig.1.11).

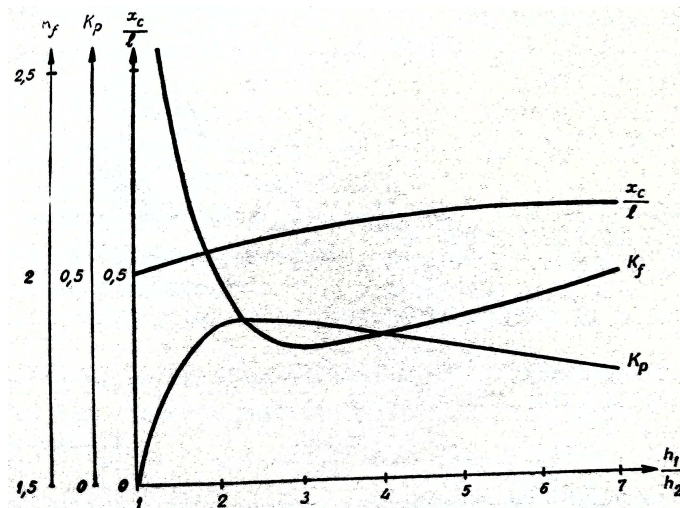


FIGURE 1.11: *Paramètres caractérisant le fonctionnement du "coin d'huile" [1].*

Le fonctionnement optimal peut être envisagé de deux points de vue :

1. Pour une épaisseur donnée h_2 du film d'huile à la sortie, on veut obtenir une charge portante maximale. Dans ce cas, on choisira K_p maximal, ce qui correspond à :

$$\frac{h_1}{h_2} = 2,25 \quad ; \quad \frac{x_c}{l} = 0,58$$

2. On veut obtenir un coefficient de frottement minimal (puissance perdue minimale), ce qui correspond à :

$$\frac{h_1}{h_2} = 3,00 \quad ; \quad \frac{x_c}{l} = 0,61$$

Pratiquement, on choisit une valeur moyenne entre les deux valeurs optimales précédentes :

$$\frac{x_c}{l} = 0,60 \quad ; \quad \frac{h_1}{h_2} = 2,75 \quad ; \quad K_f = 1,82 \quad ; \quad K_p = 0,39$$

La solution technologique usuelle permettant d'assurer automatiquement ce fonctionnement optimal, consiste à articuler les patins (Fig.1.12). Pour que le patin soit en équilibre, il faut que la résultante des forces de pression $F.b$ (b étant la largeur du patin) passe par l'axe d'articulation. Si on place cet axe à une distance $x_c = 0,6l$, on est certain d'obtenir automatiquement le fonctionnement hydrodynamique optimal. L'équilibre obtenu est stable ; les courbes (Fig.1.11) montrent en effet que $\frac{x_c}{l}$ et $\frac{h_1}{h_2}$ varient dans le même sens. Si par exemple $\frac{h_1}{h_2}$ diminue, la résultante se déplace donc vers la gauche et tend à faire basculer le patin dans le sens qui augmente $\frac{h_2}{h_1}$. Si $\frac{h_2}{h_1}$ augmente, la résultante se déplace donc vers la droite et tend à faire basculer le patin dans le sens qui augmente $\frac{h_1}{h_2}$. L'équilibre est donc bien stable.

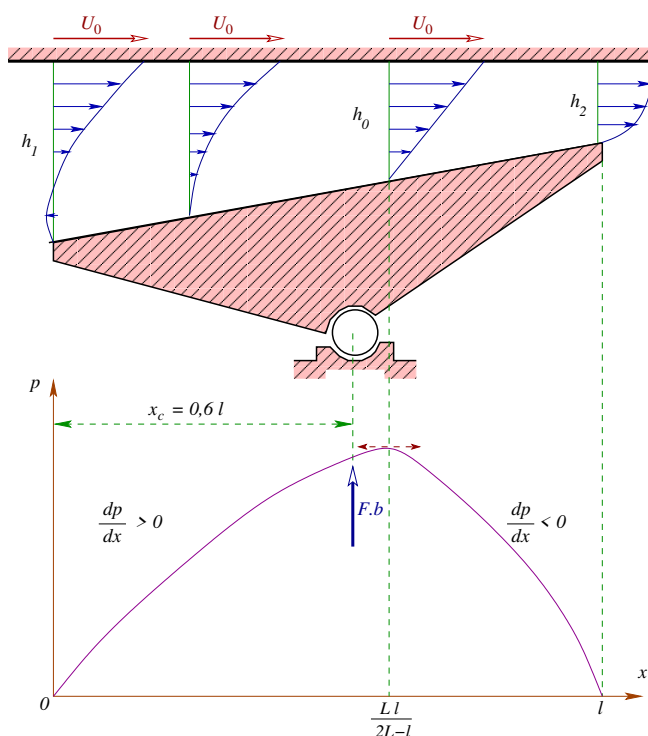


FIGURE 1.12: *Patin de butée Michell.*

Remarque :

Si l'on tient compte des fuites latérales, la pression devient à la fois fonction de x et de z . L'équation de Reynolds s'écrira alors :

$$\frac{\partial}{\partial x}(h^3 \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(h^3 \frac{\partial p}{\partial z}) = 6\mu U_0 \frac{dh}{dt} \quad (1.60)$$

Cette équation n'admet pas de solution exacte. Le recours aux méthodes numériques est obligatoire pour la résoudre.

- Exemple d'application :

Un patin carré de 200 mm de côté, incliné de telle sorte que $h_1 = 0,06$ mm et $h_2 = 0,02$ mm, est translaté à une vitesse de 10 m/s sur un plan. L'ensemble baigne dans de l'huile de viscosité dynamique 80 cPo. Calculer la pression maximale et sa position, la charge supportée par le patin, la position de la résultante, la force de frottement sur le patin ainsi que le coefficient de frottement équivalent. Tracer la répartition de la pression le long du film d'huile.

Données : $l = 0,2$ m ; $h_1 = 6.10^{-5}$ m ; $h_2 = 2.10^{-5}$ m ; $U_0 = 10$ m/s ; $p_a = 101325$ N/m² ; $\mu = 0,08$ Kg/m.s

1.11.2 Mouvement long d'une sphère

Le mouvement d'une petite sphère qui tombe dans un liquide visqueux a été résolu par *Stokes*. La force de traînée de la sphère est :

$$F_x = 3\pi\mu U D \quad (1.61)$$

où U représente la vitesse et D le diamètre de la sphère.

Le coefficient de traînée est donné par :

$$C_x = \frac{|F_x|/S}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{24}{\Re_e} \quad (1.62)$$

où $S = \frac{\pi D^2}{4}$ est la surface frontale de la sphère.

La concordance avec les résultats expérimentaux est excellente pour $\Re_e < 1$. Ceci a fortement contribué dans une application célèbre dans la viscosimétrie. En effet, on peut calculer la force de traînée agissant sur une sphère descendant sous l'effet de la pesanteur dans un récipient cylindrique rempli d'un fluide de viscosité μ . Il faut

souligner que pour $\Re_e \ll 1$, la perturbation provoquée par la sphère sur le champ de vitesse homogène et parallèle est sensible à grande distance. Ainsi, en utilisant (1.61) pour déterminer μ , le diamètre du récipient cylindrique contenant le fluide doit excéder de plus de 100 fois celui de la sphère, afin de réduire l'erreur de calcul à moins de 2 %.

1.11.3 Mouvement long d'un cylindre circulaire

Il s'agit de trouver une solution à ce problème bidimensionnel gouverné par l'équation *biharmonique* (1.63) obtenue à partir des équations (1.28).

$$\nabla^4 \psi = 0 \tag{1.63}$$

Les conditions aux limites à la surface du cylindre $u_r = v_\theta = 0$ fournissent un écoulement plan et parallèle à l'infini. Il s'avère, toutefois, impossible de trouver une solution qui vérifie à la fois les conditions à la surface du cylindre et à l'infini (paradoxe de Stokes). Dans le cadre de cet écoulement lent, cette difficulté provient de l'influence du cylindre sur le champ de vitesse à grande distance. Il existe ainsi une région où les termes non linéaires représentant les effets d'inertie sont aussi importants que ceux représentant les effets visqueux. Plus la valeur du \Re_e est petite, plus cette région d'influence du cylindre est éloignée.

1.12 Exercices

D1 : Un bloc de poids P et de surface S glisse sur un plan incliné avec une vitesse constante q . Entre le bloc et le plan se trouve une couche mince d'huile d'épaisseur e . L'inclinaison du plan par rapport à l'horizontale est α . Trouver la viscosité du film lubrifiant.

A.N : $P = 45359 \text{ N}$; $S = 21,53 \text{ m}^2$;
 $q = 19,68 \text{ m/s}$; $e = 0,254 \text{ mm}$; $\alpha = 30^\circ$.

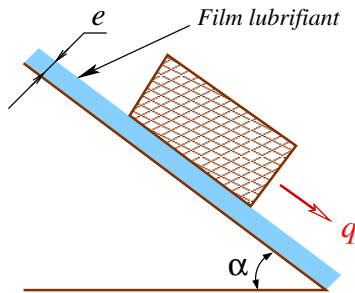


FIGURE 1.13: D1.

Rép : $0,0136 \text{ N.s/m}^2$.

D2 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide sur une plaque plane inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Si cet écoulement est parallèle à cette plaque de grande largeur dans le plan (xoz) , trouver le profil de vitesse u en fonction de ν , α , g et d (épaisseur du fluide au dessus de la plaque) en utilisant :

- 1- Directement les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes.
- 2- En appliquant la 2^{ème} loi de Newton sur un $(v.c)$ convenablement choisi.

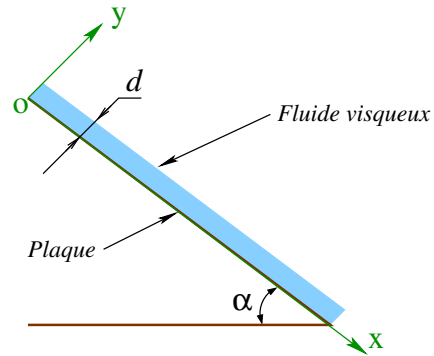


FIGURE 1.14: D2.

Rép : $u(y) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} \cdot y (2d - y)$.

D3 : Un viscosimètre est constitué d'un cylindre de rayon R_1 tournant à l'intérieur d'un autre cylindre de rayon R_2 avec une vitesse de rotation ω . On suppose que :

- 1- L'écoulement est stationnaire, incompressible et visqueux.
- 2- L'écoulement entre les cylindres est laminaire tant que le cylindre intérieur tourne.
- 3- Les composantes radiale et verticale de la vitesse sont nulles.
- 4- L'écoulement ne varie pas dans la direction axiale z .

Trouver le profil de vitesse correspondant à cet écoulement en fonction de R_1 , R_2 , ω et r . Négliger l'influence de la base du viscosimètre et considérer uniquement les parois verticales des cylindres.

Rép : $v_\theta(r) = \frac{R_1^2 \omega}{r} \left[\frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1} \right]$.

D4 : Un dispositif convoyeur-courroie monté sur un bateau est utilisé pour récupérer de l'huile de pétrole de viscosité cinématique ν qui contamine la surface de la mer. On suppose que l'écoulement est permanent, incompressible, visqueux et que le dispositif fonctionne en continu c-à-d que le film d'huile d'épaisseur a n'est pas discontinu. On sup-

pose, de plus, que la courroie, fonctionnant à une vitesse U_0 constante, a une largeur L (perpendiculaire au papier) très grande à l'air libre.

- 1- Ecrire les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible et visqueux en coordonnées cartésiennes et définir chacun des termes présents dans ces équations.
- 2- Simplifier ces équations pour l'écoulement étudié ci-dessus. Justifier toutes vos simplifications.
- 3- Trouver le profil des vitesses de l'écoulement.
- 4- Déterminer l'expression du débit volumique d'huile qui peut être porté vers le haut (sur le bateau).
- 5- En maintenant l'angle d'inclinaison θ constant, quel est le débit maximal qu'on peut récupérer sur le bateau ?

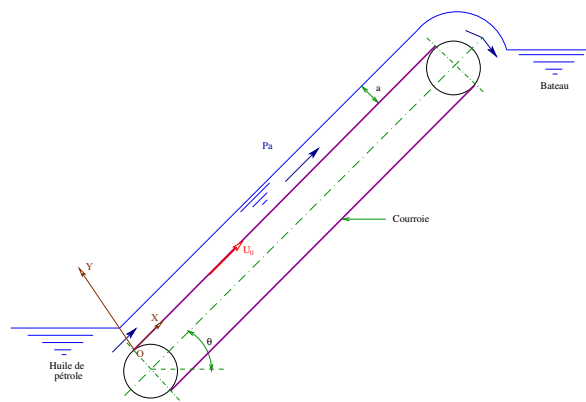


FIGURE 1.15: D4.

- Rép** : 3) $u(y) = U_0 - \frac{g \sin \theta}{2\nu} (2a - y)y$.
 4) $Q_v = U_0 L a - \frac{L g \sin \theta}{3\nu} a^3$.
 5) $Q_{v \max} = \frac{2}{3} L U_0 \sqrt{\frac{\nu U_0}{g \sin \theta}}$.

D5 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide newtonien entre deux plaques horizontales de longueurs l . La plaque inférieure est animée d'une vitesse constante U_0 . L'écoulement

étant parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xoz) et en négligeant les forces de pesanteurs :

- 1- Ecrire les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible et visqueux en coordonnées cartésiennes et définir chacun des termes présents dans ces équations.
- 2- Simplifier ces équations pour l'écoulement étudié ci-dessus. Justifier toutes vos simplifications.
- 3- Trouver le profil des vitesses de l'écoulement entre les plaques en fonction de μ , U_0 , l , d et ΔP (perte de charge).
- 4- Tracer l'allure de distribution de vitesse suivant les valeurs de ΔP .

Pour la suite du problème on considère que ΔP est positive.

- 5- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement.
- 6- Déterminer les contraintes tangentielles aux parois inférieure et supérieure et tracer l'état de contrainte au sein du fluide.
- 7- Déterminer le débit volumique passant entre les plaques (la largeur des plaques suivant la direction z est égale à l'unité).
- 8- Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement entre les plaques et en déduire le nombre de Reynolds. Que représente physiquement ce nombre ?

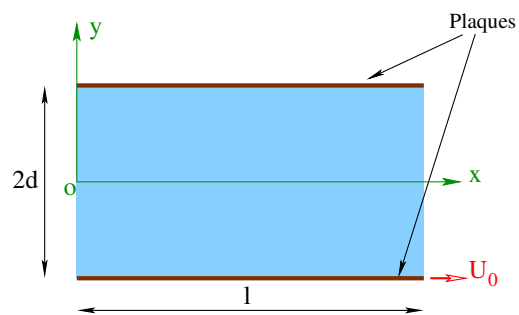


FIGURE 1.16: D5.

- Rép** : 3) $u(y) = \frac{d^2 \Delta p}{2\mu l} \left[1 - \left(\frac{y}{d}\right)^2 \right] + \frac{U_0}{2} \left(1 - \frac{y}{d} \right)$.

$$5) u_{max} = \frac{U_0}{2} \left(1 + \frac{\mu l U_0}{2 d^2 \Delta p} \right) + \frac{d^2}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \left[1 - \left(\frac{\mu l U_0}{2 d^2 \Delta p} \right)^2 \right].$$

$$6) \tau_{p1} = \frac{\Delta p}{l} d - \frac{\mu U_0}{2d}; \quad \tau_{p2} = -\frac{\Delta p}{l} d - \frac{\mu U_0}{2d}.$$

$$7) Q_v = U_0 d + \frac{2d^3}{3\mu} \frac{\Delta p}{l}.$$

$$8) \bar{u} = \frac{U_0}{2} + \frac{d^2}{3\mu} \frac{\Delta p}{l}.$$

$$\mathcal{R}_e = \frac{4d\bar{u}}{\nu} = \frac{2d}{\nu} \left(U_0 + \frac{2d^2}{3\mu} \frac{\Delta p}{l} \right).$$

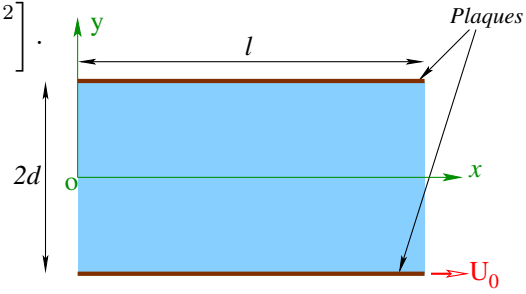


FIGURE 1.17: D6.

D6 : 1- Écrire les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible et visqueux en coordonnées cartésiennes.

2- Définir chacun des termes présents dans ces équations.

On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide newtonien entre deux plaques horizontales de longueur l . La plaque inférieure est animée d'une vitesse constante U_0 . L'écoulement dû au gradient de pression selon l'axe x étant parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xoz) (plan perpendiculaire à la feuille); en négligeant les forces de pesanteurs :

3- Simplifier ces équations en justifiant toutes vos simplifications.

4- Trouver le profil des vitesses entre les plaques en fonction de ρ , U_0 , l , d et ΔP .

Pour la suite du problème on suppose que le fluide était initialement au repos.

5- Donner la nouvelle expression du profil des vitesses et tracer son allure.

6- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement.

7- Déterminer l'état de contrainte au sein du fluide.

8- Déterminer le débit volumique passant entre les plaques (la largeur des plaques suivant la direction z est égale à l'unité).

9- Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement entre les plaques et en déduire le nombre de Reynolds.

Rép : 4) $u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} (d^2 - y^2) + \frac{U_0}{2} \left(1 - \frac{y}{d} \right)$.
 5) $u(y) = \frac{U_0}{2} \left(1 - \frac{y}{d} \right)$.
 6) $u_{max} = U_0$. 7) $\tau = -\frac{\mu U_0}{2d}$. 8) $Q_v = dU_0$.
 9) $\bar{u} = \frac{U_0}{2}$; $\mathcal{R}_e = \frac{2dU_0}{\nu(2d+1)}$.

D7 : Dans une conduite de rayon R en écoulement turbulent lisse, le profil de vitesse u est donnée par la loi de puissance suivante:

$$\frac{u}{U} = \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}}$$

où n est un entier naturel et U une constante. Calculer le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse sur l'axe de la conduite.

Rép : $\frac{\bar{u}}{U} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$

D8 : On considère l'écoulement permanent d'un fluide incompressible homogène et visqueux dans une couronne comprise entre deux cylindres de révolution immobiles, infinis et coaxiaux de rayons respectifs R_1 pour le cylindre intérieur et R_2 pour le cylindre extérieur. On supposant que l'écoulement est stationnaire et axis-symétrique :

1- Simplifier les équations de Navier-Stokes dans ce cas d'écoulement en justifiant toutes vos réponses et écrire les conditions aux limites correspondantes.

2- La composante axiale du gradient de pression est maintenue constante et est notée P_z , trouver l'expression du profil des vitesses ainsi

que le champ de pression (on prendra P_0 comme pression de référence).

3- Déterminer la vitesse maximale de l'écoulement et tracer le profil des vitesses.

4- Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement.

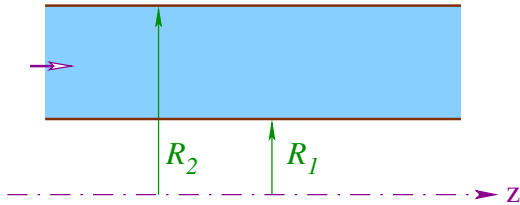


FIGURE 1.18: D8.

Rép :

$$2) w_z(r) = \frac{P_z}{4\mu} \left[r^2 - R_1^2 - (R_2^2 - R_1^2) \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right]$$

$$P(z) = P_z z + P_0.$$

$$3) w_{z_{max}} = \frac{P_z}{4\mu}.$$

$$\left[\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}} - R_1^2 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \left\{ \frac{\sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}}}{R_1} \right\} \right]$$

$$4) \bar{w}_z = \frac{P_z}{8\mu} \left[R_1^2 + R_2^2 + \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right].$$

D9 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide newtonien sur une plaque plane inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Une plaque de masse volumique ρ_p glisse sur le fluide avec une vitesse constante U_0 . L'écoulement étant parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xoz) :

1- Trouver le profil des vitesses de l'écoulement entre les plaques en fonction de ρ , μ , α , g , ρ_p , U_0 et a (épaisseur du fluide entre les plaques).

2- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement.

3- Déterminer les contraintes tangentielles aux parois inférieure et supérieure et tracer l'état de contrainte au sein du fluide.

4- Déterminer le débit volumique passant entre les plaques (la largeur des plaques suivant la direction z est égale à l'unité).

5- Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement entre les plaques et en déduire le nombre de Reynolds.

Rép : 1) $u(y) = \frac{U_0}{a} y + \frac{\rho + \rho_p}{2\mu} g \sin \alpha \cdot y (a - y).$

$$2) u_{max} = \frac{U_0}{2} \left(1 + \frac{\mu U_0}{a^2 (\rho + \rho_p) g \sin \alpha} \right) + \frac{a^2 (\rho + \rho_p)}{8\mu} g \sin \alpha.$$

$$3) \tau_{p1} = \mu \frac{U_0}{a} + \frac{a(\rho + \rho_p)}{2} g \sin \alpha;$$

$$\tau_{p2} = \mu \frac{U_0}{a} - \frac{a(\rho + \rho_p)}{2} g \sin \alpha.$$

$$4) Q_v = \frac{U_0 a}{2} + \frac{a^3 (\rho + \rho_p)}{12\mu} g \sin \alpha.$$

$$5) \bar{u} = \frac{U_0}{2} + \frac{a^2 (\rho + \rho_p)}{12\mu} g \sin \alpha.$$

$$\Re_e = \frac{a\rho}{\mu(a+1)} \left(U_0 + \frac{a^2 (\rho + \rho_p)}{6\mu} g \sin \alpha \right).$$

D10 : Considérons une conduite cylindrique horizontale de rayon R et de longueur l siège d'un écoulement permanent, incompressible, visqueux et symétrique par rapport à l'axe x de la conduite. L'écoulement s'effectue par couches cylindriques coaxiales grâce à une différence de pression ΔP . Les quantités d'accélération sont nulles.

1- En utilisant la 2^{ème} loi de Newton sur un volume de contrôle convenablement choisi, montrer que la solution se ramène à la résolution d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

2- Résoudre cette équation en utilisant les conditions aux limites adéquates et déterminer l'expression du profil des vitesses.

3- Déterminer le débit volumique véhiculé dans la conduite et interpréter le résultat.

4- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement ainsi que la vitesse débitante et tracer les profils des vitesses (locale et moyenne).

5- Déterminer l'état de contrainte au sein du fluide et interpréter le résultat.

- Rép :** 2) $u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2)$.
 3) $Q_v = \frac{\pi}{128\mu} \frac{\Delta p}{l} D^4$.
 4) $u_{max} = \frac{1}{16\mu} \frac{\Delta p}{l} D^2$; $\bar{u} = \frac{1}{2} u_{max}$.
 5) $\tau = -\frac{1}{2} \frac{\Delta p}{l} r$.

D11 : Soit un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux entre deux plaques planes de largeur (perpendiculaire au papier) égale à l'unité. Pour le profil de vitesse ci-dessous on demande de :

- 1- Trouver l'expression mathématique de la vitesse de l'écoulement en tenant compte de la condition d'adhérence du fluide aux parois.
- 2- Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement.

N.B : Prendre toutes les constantes d'intégration égales à zéro.

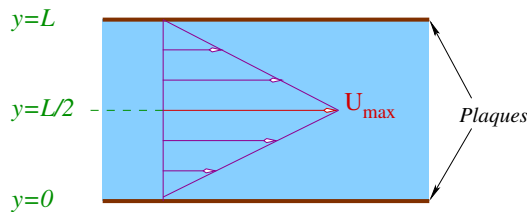


FIGURE 1.19: D11.

- Rép :**
- 1) $u(y) = \begin{cases} \frac{2u_{max}}{L} y & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{L}{2} \\ 2u_{max} \left(1 - \frac{y}{L}\right) & \text{si } \frac{L}{2} \leq y \leq L \end{cases}$
 - 2) $\bar{u} = \frac{1}{2} u_{max}$.

D12 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux d'un fluide newtonien qui s'écoule librement sur une plaque plane verticale. Cette plaque, de grande étendue selon l'axe z , se déplace avec une vitesse U_0 constante, l'écoulement étant parallèle la plaque. En utilisant les équations de Navier-Stokes :

- 1- Trouver le profil des vitesses de l'écoulement en fonction de ν , g , U_0 et h (épaisseur du fluide supposée constante).
- 2- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement.
- 3- Déterminer la contrainte pariétale.
- 4- Déterminer le débit volumique (plaque de largeur b suivant z).
- 5- Déterminer la vitesse débitante de l'écoulement.

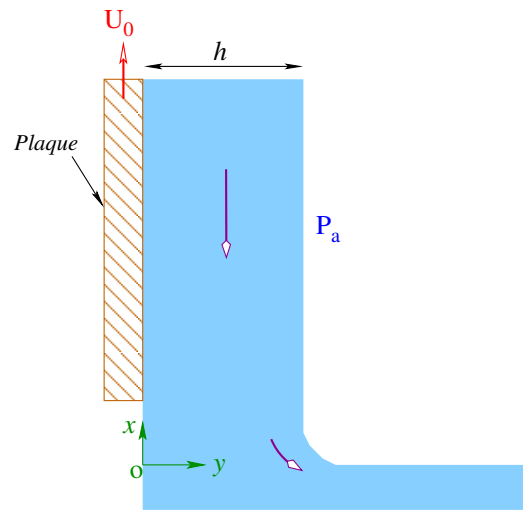


FIGURE 1.20: D12.

- Rép :** 1) $u(y) = \frac{g}{2\nu} y (y - 2h) + U_0$.
 2) $u_{max} = U_0 - \frac{gh^2}{2\nu}$. 3) $\tau_p = -\rho gh$.
 4) $Q_v = U_0 b h - \frac{bgh^3}{3\nu}$. 5) $\bar{u} = U_0 - \frac{gh^2}{3\nu}$.

D13 : Soit un écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide visqueux entre deux plaques planes parallèles distantes de h (l'axe X étant au milieu). Le profil des vitesses étant de la forme :

$$u(y) = u_{max} (Ay^2 + By + C)$$

On demande de trouver :

- 1- Les constantes A, B et C.

2- Le débit volumique par unité de profondeur qui passe entre ces plaques.

3- Le rapport entre la vitesse débitante et la vitesse maximale.

Que deviennent ces valeurs si l'axe est pris sur la plaque inférieure ?

Rép : 1) $A = -\left(\frac{2}{h}\right)^2$; $B = 0$; $C = 1$.
 2) $Q_v = \frac{2}{3} u_{max} h$. 3) $\frac{\bar{u}}{u_{max}} = \frac{2}{3}$.

D14 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux (μ) d'un fluide newtonien entre deux plaques horizontales espacées d'une distance d et de longueur l . L'écoulement dû au gradient de pression selon l'axe X étant parallèle aux plaques de grande étendue selon Z .

1- Choisir un volume de contrôle adéquat et schématiser toutes les forces appliquées sur ce volume de contrôle.

2- Ecrire clairement les hypothèses nécessaires pour résoudre ce problème.

3- En appliquant la seconde loi de Newton et en utilisant les hypothèses simplificatrices, trouver le profil des vitesses entre les deux plaques en fonction de μ , l , d et Δp .

4- Déterminer le débit volumique passant entre les plaques de largeur b selon Z .

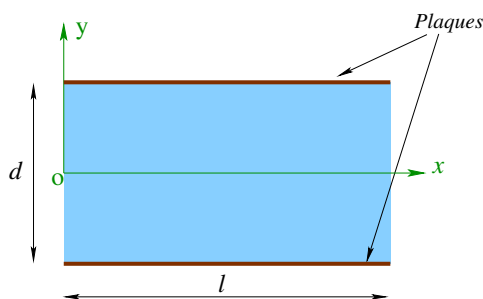


FIGURE 1.21: D14.

Rép : 3) $u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2 \right]$.

4) $Q_v = \frac{b d^3}{12\mu} \frac{\Delta p}{l}$.

D15 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux (ν) d'un fluide newtonien sur une plaque plane inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. L'écoulement étant parallèle à la plaque de grande étendue dans le plan (xoz) , trouver la relation entre le débit volumique et l'épaisseur h du fluide supposée constante.

La largeur de la plaque suivant la direction z est égale à L .

Rép : $Q_v = \frac{L g \sin \alpha}{3\nu} h^3$.

D16 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide newtonien, incompressible et visqueux ($\mu = C^{te}$) entre deux plaques planes horizontales de grande largeur L dans le plan (xoz) et animées d'une vitesse constante U_0 . Une plaque très fine est placée au milieu de ce canal et l'écoulement est parallèle aux plaques. Les deux parties du fluide séparés par la plaque fine se rejoignent à l'extrémité de cette dernière à la section (1). L'écoulement est dû à un gradient de pression que l'on déterminera à posteriori.

On demande de déterminer complètement le profil de vitesse supposé établi à partir de la section (2).

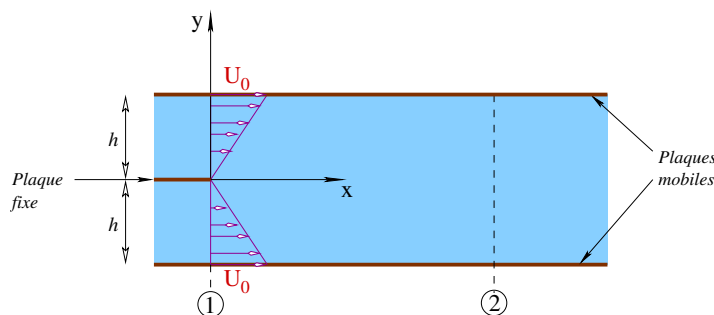


FIGURE 1.22: D16.

Rép : $\frac{dP}{dx} = \frac{3}{2} \mu \frac{U_0}{h^2}$, $u_2(y) = \frac{3U_0}{4} \left[\left(\frac{y}{h}\right)^2 + \frac{1}{3} \right]$.

D17 : Dans une conduite de rayon R en écoulement turbulent, le profil de vitesse u est donnée par la loi de puissance suivante:

$$\frac{u}{U} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

où U est une constante.

1- Calculer le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse sur l'axe de la conduite.

2- Déterminer le rayon pour lequel la vitesse actuelle sera égale à la vitesse moyenne.

Rép : 1) $\frac{\bar{u}}{U} = \frac{49}{60}$; 2) $r = 0.758 R$

D18 : Le champ de vitesses d'un écoulement stationnaire et incompressible est donné par :

$$u = a(x^2 - y^2); v = -2axy; w = 0$$

où a est une constante.

1- En utilisant les équations de Navier-Stokes, déterminer la distribution de pression résultante si l'axe Z est orienté vers le haut ($g_x = 0; g_y = 0; g_z = -g$).

2- Montrer qu'on peut obtenir le même résultat en montrant que l'écoulement est irrotationnel.

Rép : $P(x, y, z) = -\frac{1}{2}\rho a^2(x^2 + y^2)^2 - \rho g z + C$.

D19 : Le champ de vitesses d'un écoulement réel, stationnaire et incompressible est donné par :

$$u = x + y^2 + 1; v = -2x - y; w = 0$$

En négligeant les forces de gravité, déterminer la distribution de pression au sein de l'écoulement.

Rép : $P(x, y) = -\frac{2}{3}\rho y^3 - \frac{1}{2}\rho(x^2 + y^2) - \rho(x + 2y) + 2\mu x + C$.

D20 : Le champ de vitesses d'un écoulement réel, stationnaire et incompressible est donné par :

$$u = -y^2 + 2y + 1; v = 0; w = 0$$

En négligeant les forces de gravité, déterminer la distribution de pression au sein de l'écoulement.

Rép : $P(x) = -2\mu x + C$.

D21 : On considère un écoulement stationnaire, incompressible et visqueux de deux fluides newtoniens et immiscibles entre deux plaques horizontales. La plaque supérieure est animée d'une vitesse constante U_0 . L'écoulement s'effectuant sans gradient de pression étant parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xoz) . En négligeant les forces de pesanteur et en considérant la continuité des vitesses et des contraintes à l'interface, déterminer la vitesse U_i à l'interface des deux fluides en fonction de μ_1, μ_2 et U_0 .

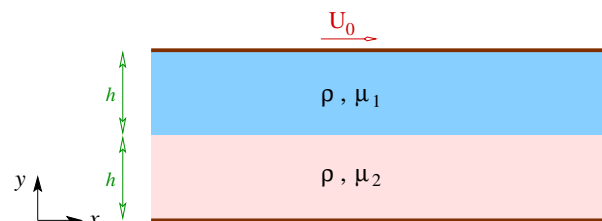


FIGURE 1.23: D21.

Rép : $U_i = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} U_0$.

D22 : Le champ de vitesses d'un écoulement réel bidimensionnel, stationnaire, incompressible et newtonien est donné par :

$$\vec{q} = (12xy^2 - 6x^3) \vec{i} + (18x^2y - 4y^3) \vec{j}$$

Calculer les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et τ_{xy} au point A de coordonnées $(0, 5; 1, 0)$ si la pression en ce point est de 6 KPa . Le fluide étant de la glycérine à 20°C ($\mu = 1,49 \text{ Pa}\cdot\text{s}$).

Rép : $\sigma_{xx} = -5,977 \text{ KPa}$;
 $\sigma_{yy} = -6,022 \text{ KPa}$; $\tau_{xy} = 44,7 \text{ Pa}$.

D23 : La composante axiale de la vitesse d'une particule de fluide qui se déplace sur une ligne de courant horizontale qui coïncide avec l'axe X est donnée par $u = x^2$. L'écoulement est stationnaire, bidimensionnel, le fluide est newtonien, incompressible et visqueux. Le long de cette ligne de courant déterminer les expressions :

- a)- du taux de variation de la composante transversale de la vitesse ;
- b)- de l'accélération de la particule ;
- c)- du gradient longitudinal de pression.

Rép : a) $-2x$; b) $2x^3$; c) $2\mu - 2\rho x^3$.

D24 : Même problème que **D21** en considérant que l'écoulement s'effectue avec un gradient de pression. Déterminer la vitesse U_i à l'interface des deux fluides en fonction de μ_1, μ_2, h, U_0 et du gradient de pression.

Rép : $U_i = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} U_0 - \frac{h^2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{dP}{dx}$.

D25 : Même problème que **D24** en considérant que les deux plaques sont fixes.

Rép : $U_i = -\frac{h^2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{dP}{dx}$.

D26 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible, visqueux et newtonien entre deux plaques planes fixes inclinées d'un angle α par rapport à l'horizontale et espacées d'une distance h (selon Y). L'écoulement dû au poids du fluide est parallèle aux plaques de grande largeur L selon Z . L'axe X est pris sur la plaque inférieure dans le sens de l'écoulement. En utilisant les équations de Naviers-Stokes :

- 1- Trouver le profil des vitesses entre les plaques.
- 2- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement.
- 3- Déterminer le rapport de la vitesse débitante à la vitesse maximale.
- 4- Déterminer les contraintes pariétales.

On donne : $h = 3 \text{ mm}$; $L = 1 \text{ m}$;
 $\alpha = 30^\circ$; $\mu = 0.9 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$; $\rho = 800 \text{ Kg}/\text{m}^3$.

- 5- Calculer le débit volumique passant entre les plaques.
- 6- Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement.

Rép : 1) $u(y) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} \cdot y (h - y)$.

2) $u_{max} = \frac{gh^2 \sin \alpha}{8\nu}$.

3) $\frac{\bar{u}}{u_{max}} = \frac{2}{3}$.

4) $\tau_{p1} = \frac{1}{2} \rho g h \sin \alpha$; $\tau_{p2} = -\frac{1}{2} \rho g h \sin \alpha$.

4) $Q_v = \frac{gLh^3 \sin \alpha}{12\nu} = 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$.

5) $\Re_e = \frac{\bar{u}D_h}{\nu} = 17,7 \cdot 10^{-3}$.

D27 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales se dé-

plaçant dans des directions opposées à des vitesses constantes U_1 et U_2 . L'écoulement, initialement au repos, est parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan $(x0z)$. En utilisant les équations de Navier-Stokes, déterminer l'expression de la distribution de vitesse entre les plaques.

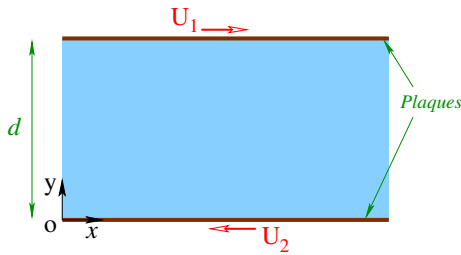


FIGURE 1.24: D27.

Rép : $u(y) = \frac{U_1+U_2}{d} y - U_2$.

D28 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales. La plaque inférieure se déplace avec une vitesse constante U_0 . L'écoulement, dû à un gradient de pression, est parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan $(x0z)$. A quelle position la vitesse atteint-elle sa valeur maximale si $K = 3$. K étant la constante de pression définie par :

$$K = -\frac{d^2}{2\mu U_0} \frac{dP}{dx}$$

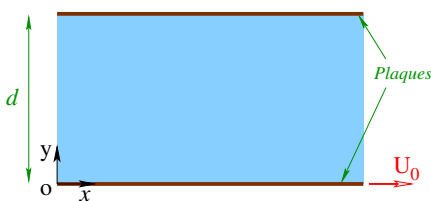


FIGURE 1.25: D28.

Rép : $y = \frac{d}{3}$.

D29 : Considérons l'écoulement de Couette d'un fluide incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales. Le profil des vitesses est donné par :

$$u(y) = U_0 \left[-3 \left(\frac{y}{h} \right) \left(\frac{y}{h} - 1 \right) - \frac{y}{h} + 1 \right]$$

A quelle position la vitesse atteint-elle sa valeur maximale ? Tracer ce profil en considérant les valeurs adimensionnelles $\frac{u}{U_0}$ et $\frac{y}{h}$.

Rép : $y = \frac{h}{3}$.

D30 : Un fluide incompressible s'écoule à travers une conduite de section rectangulaire de dimensions $2m$ selon Y et $1m$ selon Z . La vitesse selon X est donnée par l'équation :

$$u = 3y^2 + 5z$$

Déterminer la vitesse moyenne de cet écoulement.

Rép : $\bar{u} = 6,5 m/s$.

D31 : Considérons l'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales. Déterminer le rapport de la vitesse débitante à la vitesse maximale dans chacun des cas ci-dessous où le profil des vitesses est donné par :

- 1) $u(y) = k_1 y$.
- 2) $u(y) = k_2 y^2$.
- 3) $u(y) = k_3 (hy - y^2)$.

k_1, k_2, k_3 étant des constantes et h la distance entre les deux plaques.

Rép : 1) $\frac{1}{2}$. 2) $\frac{1}{3}$. 3) $\frac{2}{3}$.

D32 : On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux entre deux plaques planes horizontales fixes. L'écoulement, dû à un gradient de pression $\frac{dP}{dx}$, est parallèle aux plaques de grandes étendues dans le plan (xOz) . Le même fluide est injecté à travers la plaque inférieure avec une vitesse uniforme v_0 perpendiculairement à la plaque. Le fluide est soutiré le long de la plaque supérieure avec la même vitesse uniforme v_0 perpendiculairement à cette dernière. On suppose que la composante transversale v_0 de la vitesse est uniforme dans tout l'écoulement. Le profil des vitesses de cet écoulement est donné par la relation :

$$u(y) = A \left[B y - \frac{1 - \exp(my)}{1 - \exp(mh)} \right]$$

On demande de déterminer les constantes A , B et m .

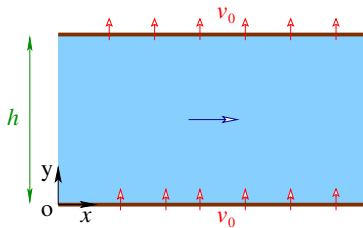


FIGURE 1.26: D32.

Rép : $A = -\frac{h\nu}{v_0} \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx}$. $B = \frac{1}{h}$. $m = \frac{v_0}{\nu}$.

D33 : Considérons un écoulement stationnaire à travers un tube horizontal de section elliptique donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Les lignes de courant sont parallèles à l'axe du tube. La composante axiale de la vitesse

est de la forme :

$$w_z = A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

Donner la relation entre le gradient de pression le long du tube et le débit volumique passant à travers la section de ce tube.

Rép : $\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{4\mu}{\pi ab} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) Q_v$.

D34 : Le champ de vitesses d'un écoulement stationnaire et incompressible est donné par :

$$u = -4xy ; v = 2(y^2 - x^2) ; w = 0$$

- 1- En utilisant les équations de Navier-Stokes, déterminer la distribution de pression résultante si l'axe Z est orienté vers le haut ($g_x = 0 ; g_y = 0 ; g_z = -g$).
- 2- Montrer qu'on peut obtenir le même résultat en montrant que l'écoulement est irrotationnel.

Rép : $P(x, y, z) = -2\rho(x^2 + y^2)^2 - \rho gz + C$.

D35 : On considère l'écoulement permanent d'un liquide incompressible homogène et visqueux dans une couronne comprise entre deux cylindres de révolution immobiles, infinis et coaxiaux de rayons respectifs R_1 pour le cylindre intérieur et R_2 pour le cylindre extérieur. Les deux cylindres étant disposés horizontalement et en supposant que l'écoulement est stationnaire et axis-symétrique :

- 1- Simplifier les équations ci-dessus dans ce cas d'écoulement en justifiant toutes vos réponses et écrire les conditions aux limites correspondantes.

- 2- La composante axiale du gradient de pression est maintenue constante et est notée P_z , trouver l'expression du profil des vitesses ainsi que le champ de pression (on prendra P_0 comme pression de référence).
- 3- Déterminer la vitesse maximale dans l'écoulement et tracer le profil des vitesses.
- 4- Déterminer la vitesse débitante dans l'écoulement.
- 5- Déterminer la contrainte pariétale.
- 6- Déterminer la perte de charge linéaire sur une longueur L de la conduite.
- 7- Calculer le nombre de Reynolds et donner son interprétation physique.
- Rép : 1).**

Couches limites

2.1 Introduction

Avant 1860, l'intérêt technique de la mécanique des fluides était pratiquement limité à l'écoulement de l'eau. Le développement de l'industrie chimique pendant la dernière partie du XIXe siècle a porté l'attention sur d'autres liquides et sur les gaz. L'intérêt pour l'aérodynamique débuta avec les études de l'ingénieur en aéronautique allemand Otto Lilienthal à la fin du XIXe siècle ; on assista alors à des avancées majeures après le succès du premier vol motorisé, effectué par les inventeurs américains Orville et Wilbur Wright en 1903.

La complexité des écoulements visqueux, en particulier des écoulements turbulents, a longtemps limité les progrès en dynamique des fluides. En 1904, l'ingénieur allemand Ludwig Prandtl indiqua que l'écoulement des fluides visqueux présente deux zones principales. Une, proche de la surface, est constituée d'une fine couche et concentre les effets de la viscosité. Son traitement par un modèle mathématique peut être simplifié compte tenu de sa faible épaisseur. En dehors de cette couche frontière, les effets de la viscosité peuvent être négligés et des équations mathématiques plus simples, adaptées à l'absence de frottement, peuvent alors s'appliquer. La théorie des couches limites a permis de développer les ailes d'avions modernes, la conception des turbines à gaz et des compresseurs,...etc. Ce modèle des couches limites a non seulement permis de formuler plus simplement les équations de Navier-Stokes dans une zone proche de la surface du fluide, mais a également permis de développer la théorie de l'écoulement des fluides sans frottements. Les progrès récents de la mécanique des fluides doivent beaucoup à ce concept de couche limite.

2.2 Couches limites laminaires (CLL)

Les équations de la couche limite se déduisent des équations générales en écoulement laminaire (Navier-Stokes) écrites au chapitre précédent en négligeant certains termes devant d'autres par considération de leur ordre de grandeur.

L'une des propriétés des fluides visqueux Newtoniens ou non est d'imposer une condition d'adhérence à la surface d'une paroi solide. Ce ralentissement important n'occupe en réalité qu'une épaisseur réduite par rapport aux dimensions du corps en contact avec le fluide et, très rapidement, en s'éloignant de la paroi, on atteint des valeurs des vitesses égales ou comparables à celles obtenues en fluide parfait. Cette zone de fort gradient de vitesse est qualifiée de couche limite. Son épaisseur δ varie continûment depuis le point d'arrêt A (Fig.2.1) et son régime d'écoulement passe du laminaire au turbulent par un régime dit de *transition*. La couche limite se sépare ensuite du corps solide vers le bord de fuite en formant, en aval de celui-ci, un sillage généralement très turbulent qui se dissipe dans l'écoulement principal.

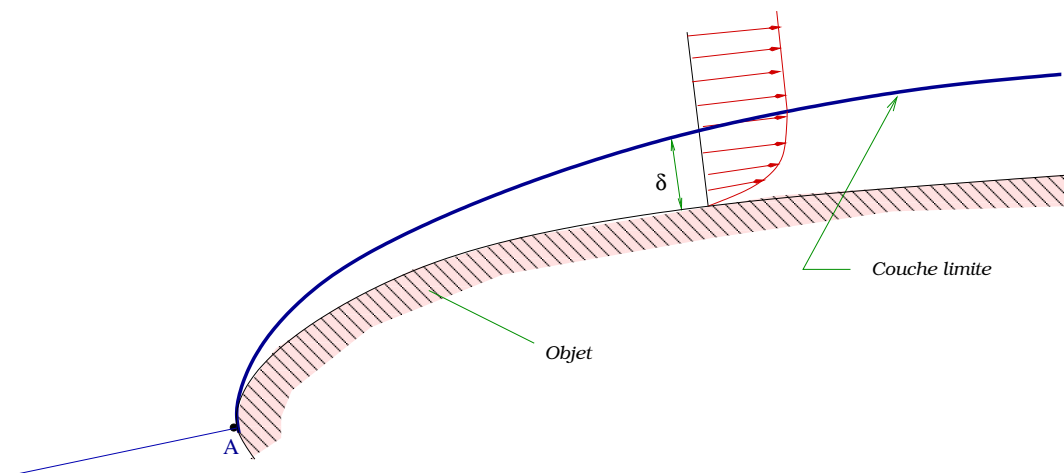


FIGURE 2.1: *Définition de la couche limite.*

En dehors de la couche limite, l'écoulement est pratiquement non visqueux puisque les gradients de vitesse sont relativement faibles.

2.2.1 Equations régissant la couche limite laminaire

En s'imposant un repère local dont l'axe OX est tangent à la paroi et l'axe OY est normal et dirigé vers l'extérieur, les équations bidimensionnelles d'un écoulement incompressible et stationnaire s'écrivent en négligeant les forces de volume et en supposant un grand rayon de courbure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Nous allons définir un certain nombre de références permettant d'adimensionnaliser les variables.

- U_e : vitesse de référence (par exemple la vitesse à l'extérieur de la couche limite suivant X);
- L : longueur caractéristique dans la direction X ;
- δ : longueur caractéristique dans la direction Y ($\delta/L \ll 1$)
- $U_e \delta/L$: vitesse de référence dans la direction Y ;
- ρU_e^2 : pression de référence.

Il est alors possible de déterminer l'ordre de grandeur de chacun des termes des équations (2.1).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U_e}{L} \quad \frac{U_e \delta}{L \delta} = \frac{U_e}{L}$$

donc les deux termes subsisteront puisqu'ils ont le même ordre de grandeur.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \cancel{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$U_e \frac{U_e}{L} = \frac{U_e^2}{L} \quad \frac{U_e \delta}{L} \frac{U_e}{\delta} = \frac{U_e^2}{L} \quad \frac{U_e^2}{L} \quad \nu \frac{U_e}{L^2} \ll \nu \frac{U_e}{\delta^2}$$

$$\cancel{u \frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v \frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \cancel{\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$U_e \frac{U_e \delta}{L^2} = \frac{U_e^2 \delta}{L^2} \ll \frac{U_e^2}{\delta} \quad \frac{U_e \delta}{L} \frac{U_e \delta}{L \delta} = \frac{U_e^2 \delta}{L^2} \ll \frac{U_e^2}{\delta} \quad \frac{U_e^2}{\delta} \quad \nu \frac{U_e \delta}{L^3} \ll \nu \frac{U_e}{L \delta}$$

Cette première simplification nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{array} \right.$$

Effectuons maintenant le rapport entre les termes de pression et les termes visqueux successivement pour les deux dernières équations :

$$\frac{U_e^2}{L} \frac{\delta^2}{\nu U_e} = \frac{U_e L}{\nu} \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 = R_e \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \rightarrow 1 \Rightarrow \text{même ordre de grandeur.}$$

$\frac{U_e^2}{\delta} \frac{L\delta}{\nu U_e} = \frac{U_e L}{\nu} = R_e \gg 1 \Rightarrow$ le terme visqueux est négligeable devant le terme de pression.

Compte tenu de ces simplifications, on obtient les équations de Prandtl de la CLL bidimensionnelle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

La dernière équation de (2.2) indique que la couche limite transmet intégralement à la paroi la pression existant à la périphérie de la couche à la même abscisse.

$$p(y=0) = p(y=\delta)$$

- Remarque :

En présence d'une forte courbure de rayon R_c , on utilisera pour cette dernière équation la relation :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{U_e^2}{R_c} \quad (2.3)$$

- Autre expression :

À la périphérie de la couche limite l'écoulement est pratiquement non visqueux et peut se calculer selon la théorie potentielle. Selon le théorème de Bernoulli, la vitesse à la limite $U_e(x)$ est liée à la pression $p_e(x)$ par la relation :

$$p_e(x) + \frac{1}{2} \rho U_e^2(x) = C^{te} \quad (2.4)$$

Sachant que p_e ne dépend pas de y , on peut écrire :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp_e(x)}{dx} = U_e \frac{dU_e(x)}{dx} \quad (2.5)$$

d'où l'expression finale :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (2.6)$$

où U_e est une fonction de x décrite par la théorie potentielle (Ch.??).

- Conditions aux limites :

- A la paroi : $y = 0, \quad u = v = 0.$
- A la surface de la couche limite : $y = \delta(x), \quad u = U_e(x).$

2.2.2 Paramètres caractéristiques de la couche limite

Pour étudier et modéliser la couche limite on utilise, en plus de l'épaisseur δ de la couche limite, les épaisseurs δ_1 de déplacement et δ_2 de quantité de mouvement.

2.2.2.1 Epaisseur de déplacement

Elle correspond au déficit de débit lié à la présence de la couche limite (Fig.2.2).

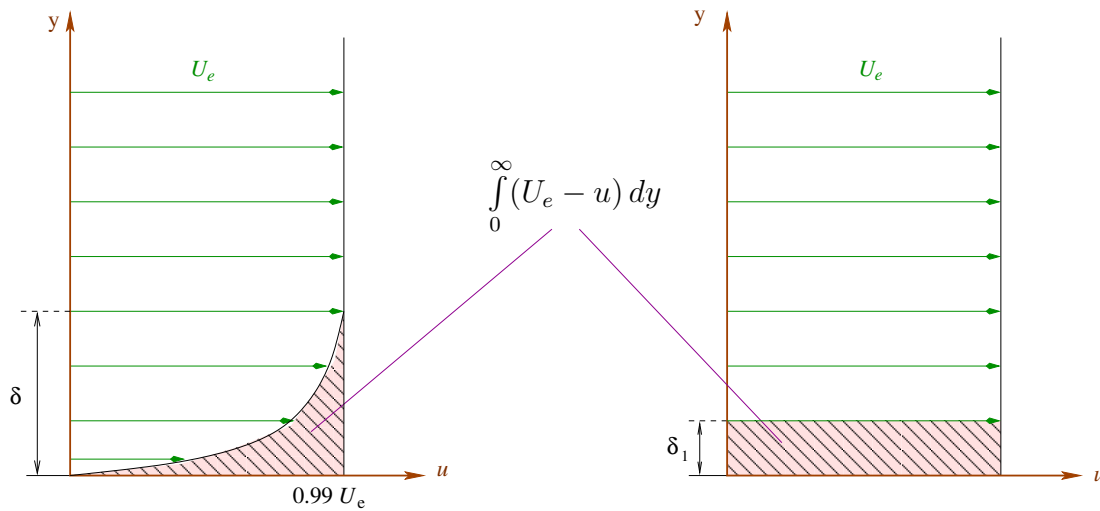


FIGURE 2.2: *Perte de débit liée à la présence de la couche limite.*

On écrit, par définition :

$$\delta_1 U_e = \int_0^{\infty} (U_e - u) dy \quad (2.7)$$

Comme u ne varie pratiquement plus à partir de δ , l'équation (2.7) permet de calculer δ_1 :

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (2.8)$$

δ_1 est aussi appelée : *épaisseur de perte de débit*.

Une autre interprétation plus réelle stipule que l'épaisseur de déplacement est la distance avec laquelle s'est déplacée une ligne de courant de l'écoulement extérieur à cause de la présence de la couche limite qui fait obstruction partielle à l'écoulement libre (Fig.2.3).

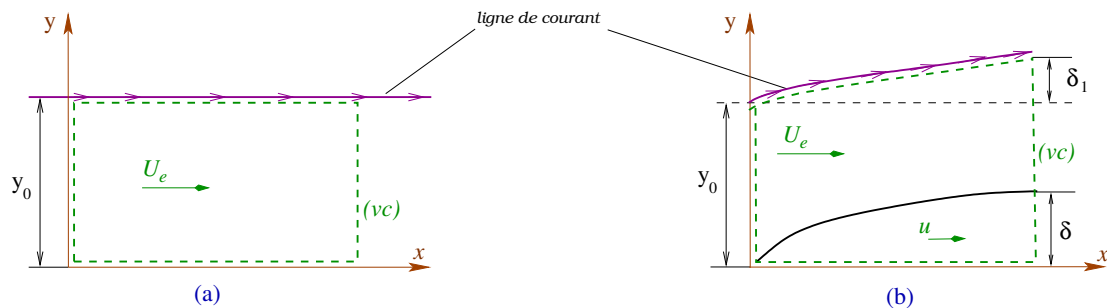


FIGURE 2.3: *Déviation de la ligne de courant liée à la présence de la couche limite.*

En fluide parfait (Fig.2.3(a)), la conservation du débit volumique par unité de profondeur nous donne :

$$Q_v = \int_0^{y_0} U_e dy = U_e y_0$$

En fluide réel (Fig.2.3(b)), cette conservation nous donne :

$$Q_v = \int_0^{\delta} u dy + \int_{\delta}^{y_0 + \delta_1} U_e dy = \int_0^{\delta} u dy + U_e (y_0 + \delta_1 - \delta)$$

$$\Leftrightarrow U_e y_0 = \int_0^{\delta} u dy + U_e y_0 + U_e \delta_1 - U_e \delta = \int_0^{\delta} (u - U_e) dy + U_e y_0 + U_e \delta_1$$

et en éliminant $U_e y_0$ puis en divisant par U_e nous aurons l'épaisseur de déplacement δ_1 exactement comme établie en (2.8).

2.2.2.2 Épaisseur de quantité de mouvement

On définit de la même façon l'épaisseur δ_2 correspondant au déficit de quantité de mouvement (Fig.2.4).

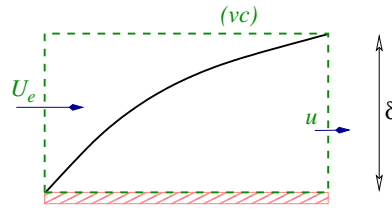


FIGURE 2.4: *Quantité de mouvement liée à la présence de la couche limite.*

La différence de quantité de mouvement entre l'entrée et la sortie est :

$$\Delta I_v = \int_0^{\delta} \rho U_e u \, dy - \int_0^{\delta} \rho u^2 \, dy = \int_0^{\delta} \rho u (U_e - u) \, dy = \rho U_e^2 \delta_2$$

d'où la valeur de l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 :

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy \quad (2.9)$$

On observe toujours l'inégalité :

$$\delta > \delta_1 > \delta_2 \quad (2.10)$$

2.2.2.3 Facteur de forme

On définit aussi le paramètre ou *facteur de forme* H par :

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (2.11)$$

Ce paramètre caractérise la forme du profil de vitesse dans la couche limite. Il prend des valeurs différentes selon la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement dans la couche limite. Pour une CLL sur une plaque plane, il passe pratiquement du double au simple : d'environ 2,6 pour la CLL à 1,3 pour la CLT. Le facteur de forme est également influencé par le gradient longitudinal de pression. En présence d'un gradient adverse ($\frac{dp}{dx} > 0$), il permet de caractériser l'apparition du décollement qui correspond à une valeur de H d'environ 3,5 à 4 (critère de décollement fondé sur H).

2.2.3 Solution exacte des équations de la CLL

2.2.3.1 Cas de la plaque plane

Soit un écoulement horizontal de vitesse constante U_e sur une plaque plane très mince (Fig.2.5) avec un gradient de pression nul :

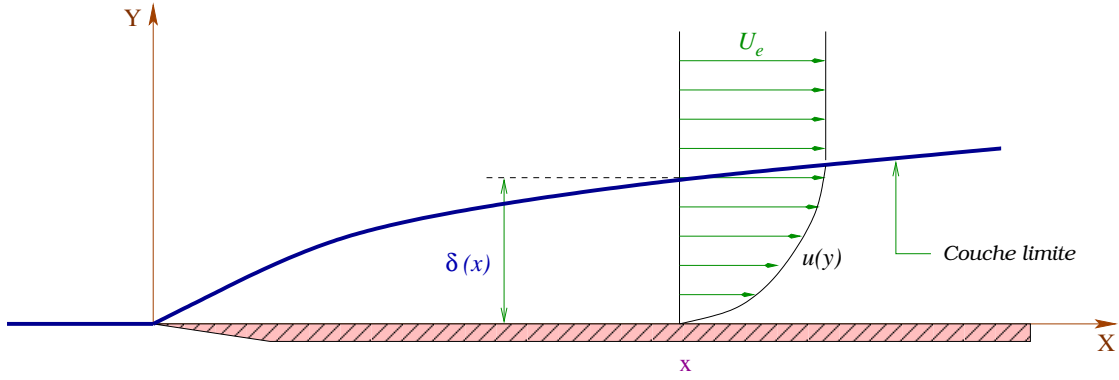


FIGURE 2.5: *Couche limite sur une plaque plane.*

Ce problème est régi par les équations et les (C.L) suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad \text{avec (C.L)} \begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \\ u(x, \infty) = U_e \end{cases} \quad (2.12)$$

Il est commode d'introduire la fonction de courant ψ telle que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

L'équation de continuité est automatiquement satisfaite et le système (2.12) se transforme en (2.13) :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad \text{avec (C.L)} \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0) = 0 \Leftrightarrow \psi(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \infty) = U_e \end{cases} \quad (2.13)$$

la 2^{ème} (C.L) s'écrit : $\int_0^x \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0) dx = \psi(x, 0) - \psi(0, 0)$ et on choisit $\psi(0, 0) = 0$ car ψ est définie à une constante près.

Recherche de solutions auto-semblables pour les profils de vitesse : c-à-d, on se demande si les profils de vitesse ne deviennent pas identiques lorsqu'on rapporte l'ordonnée à l'épaisseur de la couche limite. On cherche donc s'il est possible d'écrire :

$$\frac{u}{U_e} = \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right) = \Phi(\eta) \quad (2.14)$$

où Φ sera la même fonction universelle pour tout x (c-à-d indépendante de x).

L'analyse dimensionnelle nous donne : $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$ et on peut donc utiliser comme variable de similitude :

$$\eta = \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \cdot y \quad (2.15)$$

$$u = U_e \Phi(\eta) \implies \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_e \Phi(\eta) \implies \psi = U_e \int \Phi(\eta) dy = U_e \delta f(\eta) \text{ où } (f'(\eta) = \Phi(\eta)).$$

En définitive, la recherche de profils de similitude revient donc à chercher ψ sous la forme :

$$\psi(x, y) = \sqrt{U_e \nu x} \cdot f(\eta) \text{ avec } \eta = \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \cdot y \quad (2.16)$$

En remplaçant (2.16) dans (2.13) et en effectuant toutes les dérivées partielles, on aura une équation différentielle ordinaire non-linéaire du 3^{ème} degré (2.17) appelée : *équation de Blasius*.

$$2f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) = 0 \text{ avec } (C.L) \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(\infty) = 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

La variable x a totalement disparue de cette équation confirmant ainsi l'existence de solutions auto-semblables de type (2.16). La similitude des profils de vitesse est une propriété remarquable puisqu'une fonction unique détermine la forme de tous les profils.

Le champ de vitesse est donné par :

$$\begin{cases} u(x, y) = U_e f'(\eta) \\ v(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_e}{x}} \cdot (\eta f'(\eta) - f(\eta)) \end{cases} \quad (2.18)$$

La résolution de l'équation de *Blasius* peut être obtenue par la "méthode de tir" ou "shooting method" utilisant la méthode de *Runge-Kutta*. La distribution de vitesse dans la CLL est ainsi représentée (Fig.2.6).

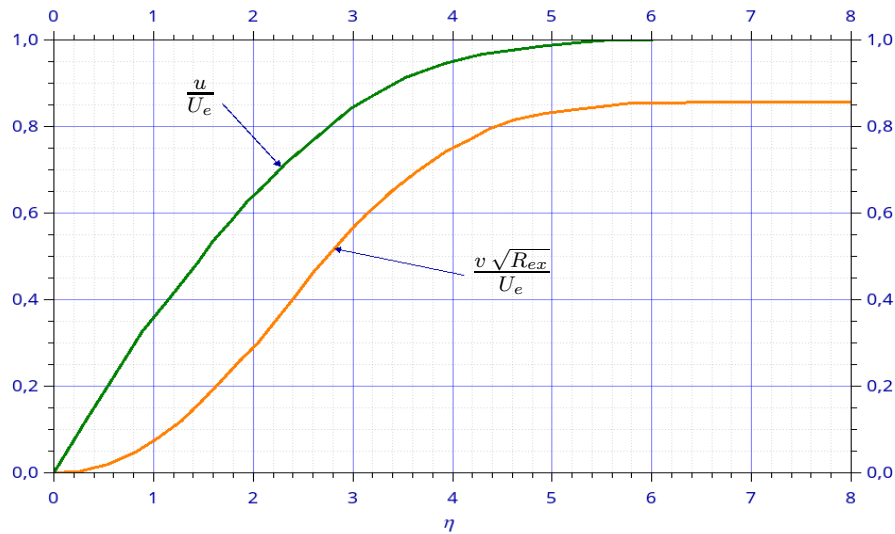


FIGURE 2.6: *Distribution de vitesse dans la CLL sur une plaque plane [11].*

D'après cette figure, on remarque que la composante v de la vitesse n'atteint pas la valeur nulle à l'extérieur de la couche limite mais une valeur donnée par :

$$\frac{v}{U_e} = 0,865 \sqrt{\frac{\nu}{U_e x}} = \frac{0,865}{\sqrt{\mathfrak{R}_{ex}}} \quad (2.19)$$

où :

$$\mathfrak{R}_{ex} = \frac{U_e x}{\nu} \quad (2.20)$$

est le *nombre de Reynolds local* basé sur la distance à la paroi à partir du bord d'attaque de la plaque.

Ceci est dû à l'effet du déplacement de la couche limite, l'écoulement extérieur dévie de la surface autant que cette dernière devient plus épaisse. Les mesures de la distribution de vitesse à l'intérieur de la couche limite sans gradient de pression montrent un excellent accord avec les prédictions de l'équation de *Blasius*.

- Epaisseur de la couche limite : Cette dernière ne peut être définie uniquement à cause de l'influence de la viscosité qui décroît asymptotiquement avec la distance à la surface de la plaque. Elle est définie par la valeur de y pour laquelle $\frac{u}{U_e} = 0,99$. Ceci correspond donc d'après (Fig.2.6) à $\eta \simeq 5$, d'où :

$$\delta(x) = \frac{5x}{\sqrt{\mathfrak{R}_{ex}}} \quad (2.21)$$

Les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement sont données successi-

vement par les relations (2.22) et (2.23) ci-dessous :

$$\delta_1(x) = \frac{1,721 x}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (2.22)$$

$$\delta_2(x) = \frac{0,664 x}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (2.23)$$

- **Coefficient de frottement à la paroi** : La contrainte de cisaillement locale à la surface de la plaque dépend seulement de x , elle est donnée par :

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} f''(0) = 0,332 \mu U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \quad (2.24)$$

Le coefficient de frottement à la paroi est donnée par :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} = \frac{0,664}{\sqrt{\Re_{ex}}} = \frac{1,328}{\sqrt{\Re_{eL}}} \quad (2.25)$$

où \Re_{eL} est le nombre de *Reynolds* basé sur la longueur de la plaque.

- **Remarque** :

Si la distance x augmente alors l'épaisseur δ de la couche limite augmente aussi mais à partir d'un certain \Re_{ex} , l'écoulement dans la couche limite devient transitoire puis turbulent et les relations proposées ci-dessus ne seront plus applicables.

Le tableau (Tab.2.1) ci-dessous nous donne une idée sur les épaisseurs de la couche limite dans les cas de l'eau et de l'air :

δ (mm)	$U_e = 1 \text{ m/s}$	$U_e = 3 \text{ m/s}$	$U_e = 10 \text{ m/s}$
Air	19	/	6
Eau	5	2,9	/

TABLE 2.1: *Épaisseurs de la couche limite laminaire sur une plaque plane.*

- Exemple d'application :

Calculer les épaisseurs de la couche limite, de déplacement et de quantité de mouvement en bout d'une plaque de longueur 2 m placée dans un écoulement de vitesse uniforme de 20 m/s d'un fluide de viscosité cinématique $1,4 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$.

Calculons d'abord le nombre de Reynolds local en bout de plaque :

$$\Re_{eL} = \frac{U_e L}{\nu} = 2857143.$$

Passons maintenant au calcul des épaisseurs :

Épaisseur de la couche limite : $\delta(L) = \frac{5L}{\sqrt{\Re_{eL}}} = 0,0059$ soit $5,9\text{ mm}$.

Épaisseur de déplacement : $\delta_1(L) = \frac{1,721L}{\sqrt{\Re_{eL}}} = 0,00203$ soit environ $2,0\text{ mm}$.

Épaisseur de quantité de mouvement : $\delta_2(L) = \frac{0,664L}{\sqrt{\Re_{eL}}} = 0,00078$ soit environ $0,8\text{ mm}$.

2.2.3.2 Cas général

La méthode décrite précédemment nécessite la connaissance de l'écoulement potentiel $U_e(x)$ au voisinage d'une paroi pour donner un ordre de grandeur au terme $U_e \frac{dU_e}{dx}$ qui figure dans les équations de *Prandtl*.

Falkner et *Skan* ont étendu la méthode précédente au cas général :

$$U_e(x) = q_0 x^m \quad (2.26)$$

La relation (2.26) correspond à l'écoulement potentiel sur un dièdre pour lequel l'axe ox est confondu avec la face étudiée (Fig.2.7).

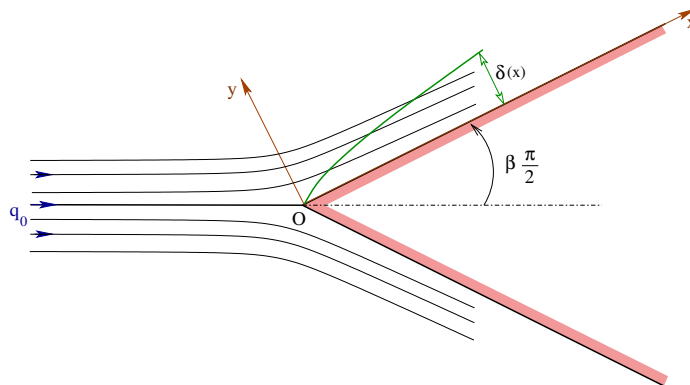


FIGURE 2.7: *Écoulement autour d'un dièdre.*

La fonction potentielle complexe correspondant à cet écoulement est donnée par :

$$F(z) = q_0 \frac{z^{m+1}}{m+1} \quad (2.27)$$

Comme $F(z) = \phi + i\psi$ alors on en déduit la fonction ψ :

$$\psi = \frac{q_0}{m+1} r^{m+1} \sin(m+1)\theta \quad (2.28)$$

La forme du solide correspondant à $\psi = 0$ est donnée pour $\theta_0 = \frac{m\pi}{m+1}$. En remarquant que θ_0 est identique à $\beta \frac{\pi}{2}$, on en déduit :

$$\beta = \frac{2m}{m+1} \quad (2.29)$$

1. $m = 0$ et $\beta = 0$: ceci correspond à la plaque dans la direction de l'écoulement (Fig.(a)).
2. $m = 1$ et $\beta = 1$: ceci correspond à la plaque dans la direction perpendiculaire à l'écoulement (Fig.(b)).
3. $m > 0$ et $\beta > 0$: ceci correspond à une accélération de l'écoulement en fonction de x et à un gradient de pression négatif.
4. $m < 0$ et $\beta < 0$: ceci correspond à une décélération de l'écoulement en fonction de x et à un gradient de pression positif. Lorsque ce dernier atteint une valeur suffisante, la couche limite décolle de la paroi.

L'équation de *Falkner* et *Skan* s'écrit de la manière suivante :

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f' + m(1-f') = 0 \quad \text{avec} \quad (C.L) \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(\infty) = 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

Si $m = 0$ dans l'équation (2.30), on obtient alors l'équation de Blasius (2.17).

- Remarque :

Il existe d'autres méthodes donnant la solution approximative des équations de la CLL telles que la méthode des équations intégrales de *Karman-Pohlhausen* ainsi que celle des *développement asymptotiques*.

2.2.3.3 Evolution de la CLL à la surface d'une forme quelconque

Si l'écoulement potentiel n'est pas de la forme (2.26), on qualifie la CLL de non-autosimilaire. C'est le cas par exemple des profils aérodynamiques. La méthode la plus sommaire consiste à remplacer les résultats obtenus aux différents abscisses curvilignes par ceux obtenus pour la plaque plane aux mêmes abscisses linéaires pour la même valeur de m .

2.2.4 Equation intégrale de Von-Karman

Dans le cas où l'on désire appliquer les équations de la CLL pour le calcul de l'écoulement, les difficultés rencontrées en essayant de trouver la solution exacte sont plus grandes que la solution complète est souvent non évaluée. Les solutions exactes ont été obtenues pour un certain nombre de cas pour lesquels la distribution de pression peut être exprimée par une forme algébrique simple, tel que pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire. La solution exacte des équations de CLL pour le cas où $\frac{dp}{dx} \neq 0$ est discuté dans la référence [30]. D'une façon générale, un calcul approximatif peut être entrepris en utilisant les formes intégrales des équations de la CLL.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad avec (C.L) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \\ u(x, \delta(x)) = U_e(x) \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Commençons par intégrer la première équation :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + [v(x, \delta) - v(x, 0)] = \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + [v_e - 0] = 0$$

$$\Rightarrow v_e = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Intégrons maintenant la deuxième équation :

$$\int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy + \nu \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy$$

$$\Rightarrow \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy + u v \Big|_0^\delta - \int_0^\delta u \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^\delta$$

en multipliant la 1^{ère} équation par u on aura : $\int_0^\delta u \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy$ et en remplaçant :

$$\Rightarrow \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy - U_e \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$\Rightarrow U_e \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy - 2 \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy = \frac{\tau_p}{\rho}$$

$$\Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial(uU_e)}{\partial x} dy - \int_0^\delta u \frac{dU_e}{dx} dy - \int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy + \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy = \frac{\tau_p}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\delta} \frac{d}{dx} [u (U_e - u)] dy + \int_0^{\delta} (U_e - u) \frac{dU_e}{dx} dy &= \frac{\tau_p}{\rho} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u (U_e - u) dy + \frac{dU_e}{dx} \int_0^{\delta} (U_e - u) dy &= \frac{\tau_p}{\rho} \end{aligned}$$

En introduisant les relations (2.8) et (2.9), nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (U_e^2 \delta_2) + U_e \frac{dU_e}{dx} \delta_1 &= \frac{\tau_p}{\rho} \\ \Rightarrow U_e^2 \frac{d\delta_2}{dx} + 2 U_e \frac{dU_e}{dx} \delta_2 + U_e \frac{dU_e}{dx} \delta_1 &= \frac{\tau_p}{\rho} \end{aligned}$$

soit finalement en divisant par U_e^2 :

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (\delta_1 + 2 \delta_2) \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} \quad (2.32)$$

et en introduisant le coefficient de frottement à la paroi C_f ainsi que le facteur de forme H , l'équation (2.32) devient :

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (H + 2) \frac{\delta_2}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{C_f}{2} \quad (2.33)$$

L'équation de *Von-Karman* (2.33) relie les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement à la vitesse extérieure et au coefficient de frottement local. Elle est applicable à des couches limites incompressibles soumises ou non à un gradient de pression. L'écoulement dans la couche limite peut être laminaire ou turbulent. L'augmentation de δ_2 résulte d'une part de la contrainte de cisaillement à la paroi. D'autre part, si l'écoulement à l'extérieur de la couche limite est accéléré, c-à-d $\frac{dU_e}{dx} > 0$, l'augmentation de δ_2 est défavorisée ; par contre, si $\frac{dU_e}{dx} < 0$, l'augmentation de δ_2 est favorisée. Si la décélération est suffisamment forte, la couche limite se détache de la paroi ($\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$). Une autre méthode qui permet d'aboutir à l'équation de *Von-Karman* est donnée en Annexe (??).

- Cas d'un gradient de pression nul :

L'équation de *Von-Karman* (2.32) se réduit dans le cas où $\frac{dp}{dx} = 0$ à l'expression :

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} \quad (2.34)$$

- Remarque :

La vitesse de l'écoulement extérieur doit être déterminée au préalable avant de pouvoir appliquer la relation (2.33). Et puisqu'elle est reliée au gradient de pression par la relation (2.5), sa détermination revient donc à connaître le gradient de pression.

2.2.5 Analyse de la CLL par la méthode de Karman-Pohlhausen

Une approche alternative à la résolution des équations de la CLL est l'utilisation de solutions approchées. La méthode approximative de *Karman-Pohlhausen* donne d'une manière plus simple des résultats très proches des solutions exactes. De cette manière, la plupart des propriétés importantes de l'écoulement dans la couche limite seront définies. Nous allons donc appliquer cette méthode dans le cas d'une CLL sur une plaque plane en l'absence de gradient de pression et nous utiliserons alors l'équation (2.34). Considérons par exemple une distribution polynomiale du profil de vitesse telle que :

$$\frac{u}{U_e} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad (2.35)$$

Les quatre coefficients $a_0 \dots a_3$ doivent satisfaire les conditions aux limites suivantes :

- vitesse nulle à la paroi ;
- vitesse à la périphérie de la couche limite égale à celle de l'écoulement potentiel ;
- contrainte nulle à la périphérie de la couche limite.

La condition sur la vitesse transversale $v(x, 0) = 0$ ne peut être exploitée directement et il faudra une quatrième condition pour déterminer ces coefficients. Cette condition est obtenue par application de l'équation de quantité de mouvement au niveau de la parois ($y = 0$) :

$$\cancel{u(x, 0)} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} + \cancel{v(x, 0)} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial y^2} \implies \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial y^2} = 0$$

d'où les quatre conditions :

$$(C.L) \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = 0 \\ u(x, \delta(x)) = U_e(x) \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.36)$$

La résolution de ce système d'équations nous donne : $a_0 = 0$; $a_1 = \frac{3}{2}$; $a_2 = 0$; $a_3 = -\frac{1}{2}$.

Le profil approximatif de la vitesse est donc :

$$\frac{u}{U_e} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad (2.37)$$

Calculons maintenant les propriétés de la couche limite :

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = \int_0^\delta \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy = \frac{3}{8} \delta.$$

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = \int_0^\delta \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy = \frac{39}{280} \delta.$$

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_e}{\delta} = \frac{3}{2} \rho \frac{\nu U_e}{\delta} \Rightarrow \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} = \frac{3}{2} \frac{\nu}{U_e \delta}$$

En remplaçant dans l'équation de Von-Karman sans gradient de pression (2.34), on aura :

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} \iff \frac{d}{dx} \left(\frac{39}{280} \delta \right) = \frac{3}{2} \frac{\nu}{U_e \delta} \Rightarrow \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{U_e \delta}$$

En séparant les variables et en intégrant, on aura : $\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\nu x}{U_e} + C$.

Comme l'épaisseur de la couche limite est nulle au bord d'attaque ($\delta(x=0) = 0$) alors la solution devient :

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\nu x}{U_e} \implies \delta = 4,641 \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$$

et en introduisant le nombre de Reynolds local (2.20) :

$$\delta = \frac{4,641 x}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (2.38)$$

En remplaçant dans les équations obtenues ci-dessus, on aura finalement :

$$\delta_1 = \frac{1,740 x}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (2.39)$$

$$\delta_2 = \frac{0,646 x}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (2.40)$$

$$C_f = \frac{0,646}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (2.41)$$

$$\frac{\tau_p}{\rho U_e^2} = \frac{0,323}{\sqrt{\Re_{ex}}} \quad (2.42)$$

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} = 2,692 \quad (2.43)$$

Ces résultats, bien que approchés, sont comparables à ceux de la solution exacte de l'équation de Blasius (2.21 à 2.25).

A l'aide de cette méthode, nous pouvons donc obtenir une bonne approximation des caractéristiques de l'écoulement dans la couche limite sans avoir à déterminer d'une façon exacte la forme du profil de vitesse.

- Exercice :

Retrouver les valeurs du tableau (2.3) qui donne les solutions approchées de quelques profils de vitesse. Le tableau (2.2) ci-dessous vous permettra de vérifier les solutions intermédiaires.

Profil de vitesse	$\frac{\delta_1}{\delta}$	$\frac{\delta_2}{\delta}$	$\frac{\tau_p}{\rho U_e^2}$
$\frac{y}{\delta}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{\nu}{\delta U_e}$
$2 \left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2\nu}{\delta U_e}$
$2 \left(\frac{y}{\delta}\right) - 2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$	$\frac{3}{10}$	$\frac{37}{315}$	$\frac{2\nu}{\delta U_e}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta}\right)$	$1 - \frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2} \frac{\nu}{\delta U_e}$

TABLE 2.2: *Valeurs intermédiaires pour le tableau (2.3).*

Le tableau (2.3) ci-dessous donne les solutions approchées de quelques profils de vitesse, choisis arbitrairement, en les comparant avec la solution exacte de Blasius.

Profil de vitesse	$\frac{\delta}{x} \sqrt{\mathcal{R}_{ex}}$	$\frac{\delta_1}{x} \sqrt{\mathcal{R}_{ex}}$	$\frac{\delta_2}{x} \sqrt{\mathcal{R}_{ex}}$	$\frac{\tau_p}{\rho U_e^2} \sqrt{\mathcal{R}_{ex}}$	H
Blasius (exacte)	5	1,721	0,664	0,332	2,592
$\frac{y}{\delta}$	3,464	1,732	0,577	0,288	3,000
$2 \left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	5,477	1,826	0,730	0,365	2,500
$\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$	4,641	1,740	0,646	0,323	2,692
$2 \left(\frac{y}{\delta}\right) - 2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$	5,835	1,751	0,685	0,343	2,554
$\sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta}\right)$	4,795	1,742	0,655	0,327	2,660

TABLE 2.3: *Solutions approchées de quelques profils de vitesse.*

On constate, en premier lieu, que malgré sa simplicité, le profil linéaire donne des résultats qui ne sont pas loins de ceux de Blasius. Aussi, on remarque que le profil polynomial du 3^{ème} ordre ainsi que le profil sinusoidal donnent les meilleurs résultat par rapport aux autres profils.

2.2.6 Stabilité de la couche limite laminaire

La dégénérescence éventuelle de l'écoulement laminaire initial dans la couche limite pour former la couche turbulente qui est observée à des nombres de Reynolds élevés est associée aux stabilités qui apparaissent dans la couche laminaire originale. La stabilité de la CLL avec $\frac{dp}{dx} = 0$ a été étudiée par *Tollmien* en utilisant la méthode des petites perturbations et ce travail a été étendu et amélioré par *Schlichting*. La stabilité de la CLL a été évaluée en faisant référence à de petites perturbations cycliques telles que celle représentées sur la figure (Fig.2.8).

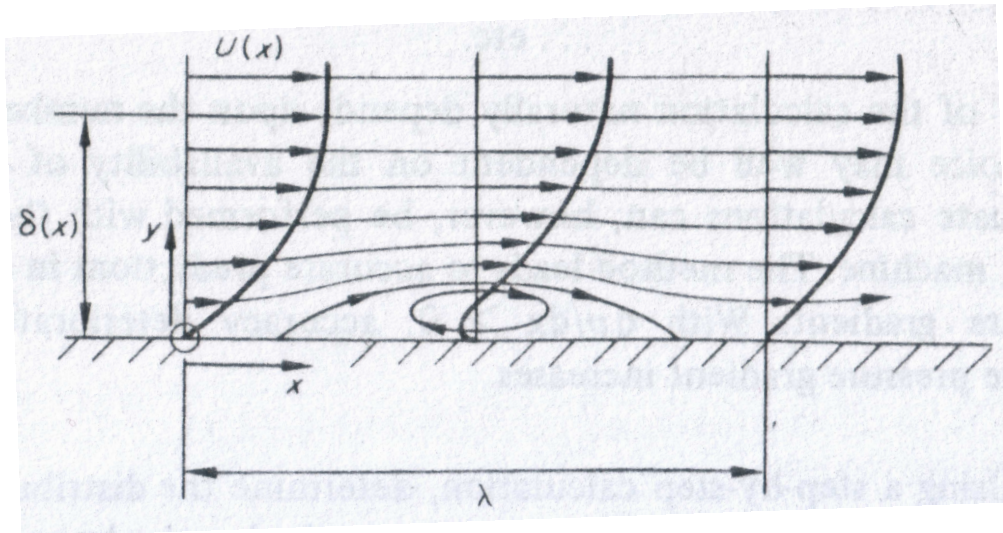


FIGURE 2.8: *Perturbations cycliques dans une couche limite laminaire.*

La frontière de la ligne neutre de stabilité en fonction de la longueur d'onde λ de la perturbation et du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement est tracée sur la figure (Fig.2.9).

Pour les écoulements sans gradient de pression, il a été trouvé que la CLL est complètement stable en ce qui concerne les petites perturbations aux valeurs $\frac{U_e \delta_1}{\nu} < 575$. A partir de $\delta_1 = 1,73 \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$, il s'ensuit que l'écoulement laminaire est stable pour les valeurs de Reynolds $\frac{U_e x}{\nu} < 1,1 \cdot 10^5$. Par conséquent, aux nombres de Reynolds inférieurs à $1,1 \cdot 10^5$, les perturbations sont atténuées et l'écoulement garde sa forme laminaire. Cependant, aux nombres de Reynolds élevés, les perturbations peuvent être amplifiées et le processus de transition s'amorce. On peut aussi voir, d'après la figure, que pour un Reynolds donnée, la stabilité de la CLL est seulement mise en cause par les perturbations dans une bande de longueur d'onde relativement étroite. Du fait que le processus de transition est seulement déclenché par l'amplification des perturbations, il s'ensuit que la transition doit se produire en aval du point où $\frac{U_e x}{\nu} = 1,1 \cdot 10^5$.

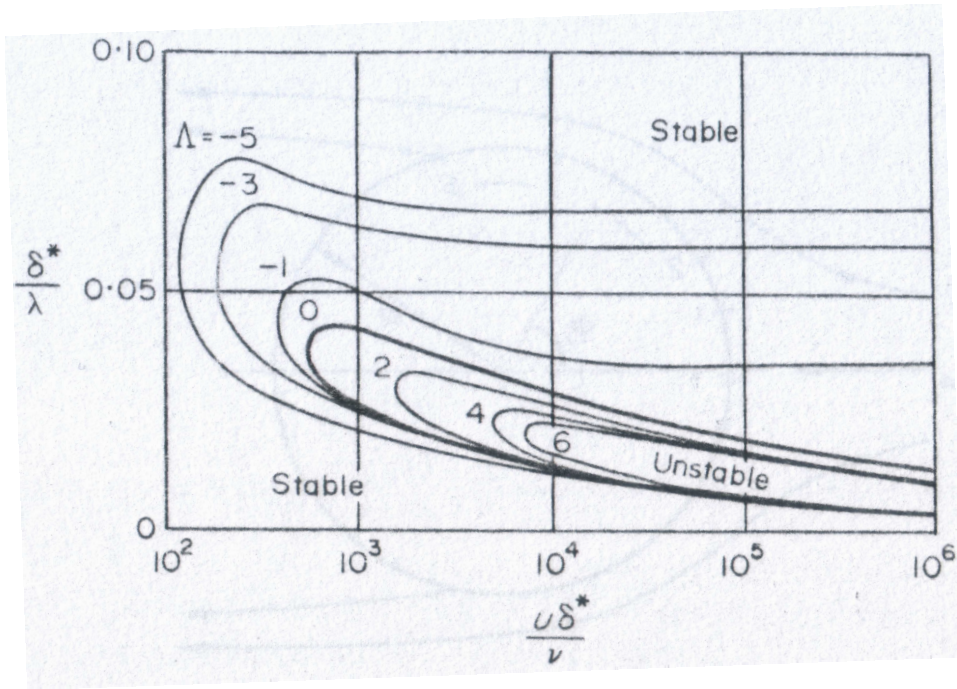


FIGURE 2.9: *Limites de stabilité pour la couche limite laminaire.*

Dans cette figure, Λ est appelé “facteur de forme de Pohlhausen”, il est défini par la relation (2.44) et il varie dans la plage $-12 \leq \Lambda \leq 12$. Pour $\Lambda = -12$, la séparation de la CLL est atteinte et pour $\Lambda > 12$, les résultats n’ont aucun sens physique en écoulement stationnaire.

$$\Lambda = -\frac{\delta^2}{\mu U_e} \frac{dp}{dx} \tag{2.44}$$

La stabilité de la CLL est grandement affectée par la présence du gradient de pression. S’il est favorable ($\frac{dp}{dx} < 0$), il cause une augmentation notable de la stabilité mais, s’il est défavorable ($\frac{dp}{dx} > 0$), la transition vers l’écoulement turbulent est provoquée beaucoup plus facilement.

2.3 Couche limite turbulente

La couche limite laminaire est caractérisée par un écoulement sans fluctuations de vitesse locale. Lorsque le nombre de Reynolds \Re_{ex} prend une valeur suffisante, on observe l’apparition de bouffées turbulentes de faible durée et de faible amplitude longitudinale.

En introduisant un facteur d’intermittence γ qui est la fraction du temps correspondant au régime turbulent, on peut définir la zone de transition par le critère suivant : elle débute lorsque $\gamma = 2\%$ et se termine lorsque γ vaut 90 %. La couche limite est alors

considérée comme turbulente. Le début et la fin de cette zone de transition dépendent beaucoup de la rugosité de la paroi (Fig.2.10). Dans de nombreux cas, on néglige la longueur de la zone de transition en supposant que la couche limite change brutalement de régime en passant du laminaire au turbulent.

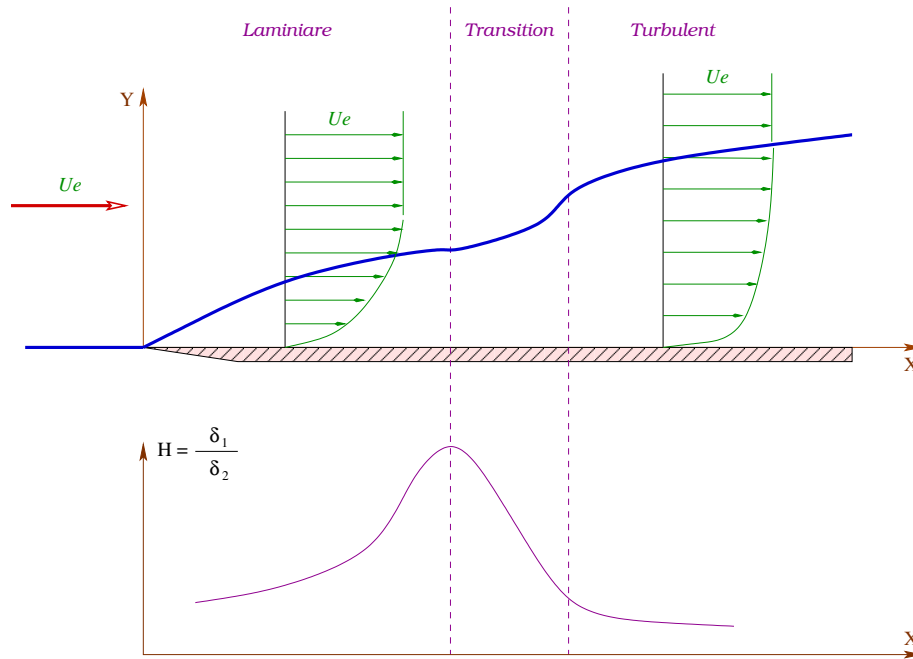


FIGURE 2.10: *Couche limite turbulente.*

Les équations de la couche limite turbulente bidimensionnelle incompressible se réduisent à des expressions comparables à (2.2) dans lesquelles apparaissent les tensions turbulentes jusqu'ici absentes. Elles s'écrivent à partir des moyennes temporelles des composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y} \end{cases} \quad (2.45)$$

Les tensions turbulentes difficilement modélisables sont maintenant prépondérantes sauf au voisinage immédiat de la paroi.

2.4 Exercices

L1 : 1- Ecrire les équations de Navier-Stokes régissant un écoulement, incompressible et visqueux en coordonnées cartésiennes.

2- Définir chacun des termes présents dans ces équations.

3- Simplifier ces équations pour un écoulement plan (xoz), stationnaire, et pour lequel les forces de volume sont négligeables.

4- En déduire les équations de la couche limite laminaire bidimensionnelle pour un écoulement sur une plaque plane. Justifier toutes vos réponses et simplifications.

5- En remplaçant le gradient de pression par une expression issue de la théorie potentielle que l'on précisera, donner une autre expression de ces équations de la couche limite ainsi que les conditions aux limites appropriées.

On utilisera pour les simplifications les variables de référence suivantes :

U_e : vitesse de référence = vitesse de l'écoulement à l'extérieur de la C.L. suivant x .

L : longueur caractéristique dans la direction x .

δ : longueur caractéristique dans la direction y . ($\delta \ll L$)

$U_e \cdot \delta/L$: vitesse de référence suivant y .

ρU_e^2 : pression de référence.

L2 : Considérons l'écoulement horizontal et stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux sur une plaque plane très mince. La vitesse de l'écoulement extérieur U_e est uniforme.

En suppose que l'expression du profil adimensionnel de vitesse à l'intérieure de la couche limite laminaire qui se développe sur la plaque ($\delta(x=0) = 0$) est de la forme :

$$\frac{u}{U_e} = \eta$$

$$\text{où } \eta = \frac{y}{\delta(x)}.$$

Donner les expressions de $\frac{\delta(x)}{x}$ et du coefficient de frottement à la paroi C_f en fonction du seul nombre de Reynolds local \Re_{ex} .

L3 : Considérons l'écoulement horizontal et stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux sur une plaque plane très mince. La vitesse de l'écoulement extérieur U_e est uniforme.

En suppose que l'expression du profil adimensionnel de vitesse à l'intérieure de la couche limite laminaire qui se développe sur la plaque ($\delta(x=0) = 0$) est de la forme :

$$\frac{u}{U_e} = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3$$

$$\text{où } \eta = \frac{y}{\delta}.$$

et a , b , c et d sont des constantes.

A la séparation de la couche limite :

1- Ecrire les quatre conditions aux limites de l'écoulement.

2- Calculer les valeurs des constantes a , b , c et d .

3- Calculer le facteur de forme H .

L4 : **A**- Considérons l'écoulement horizontal et stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux sur une plaque plane très mince. La vitesse de l'écoulement extérieur U_e est uniforme.

En appliquant la méthode de résolution intégrale à la couche limite qui se développe sur la plaque, on obtient l'expression du profil adimensionnel de vitesse conforme à la représentation polynomiale de Pohlhausen :

$$\frac{u}{U_e} = \Phi(\eta) = 2\eta - 3\eta^3 + \eta^4$$

où $\eta = \frac{y}{\delta}$.

1- Montrer que dans ce cas, les quantités $\frac{\delta_1}{\delta}$, $\frac{\delta_2}{\delta}$ et $\tau_p \cdot \delta$ sont des constantes dont on donnera les valeurs.

2- Dédurre de l'intégration de l'équation de Von-Karman la loi de variation de l'épaisseur de la couche limite $\delta(x)$.

3- Donner les expressions de $\frac{\delta}{x}$, $\frac{\delta_1}{x}$, $\frac{\delta_2}{x}$ ainsi que le coefficient de frottement $\frac{\tau_p}{\rho U_e^2}$ en fonction du seul nombre de Reynolds local \mathfrak{R}_{ex} .

B- On reprend le même problème en choisissant cette fois comme forme générale du profil adimensionnel de vitesse la relation sinusoïdale suivante :

$$\frac{u}{U_e} = \Phi(\eta) = a \cos(\alpha \eta) + b \sin(\beta \eta)$$

où a , b , α et β sont des constantes à priori fonctions de la seule variable x .

1- Déterminer les valeurs de ces constantes compatibles avec les conditions aux limites de l'écoulement.

2- Exprimer les valeurs de $\frac{\delta_1}{\delta}$, $\frac{\delta_2}{\delta}$ et $\tau_p \cdot \delta$. Vérifier qu'il s'agit bien toujours de constantes pour cet écoulement.

3- Déterminer la loi d'épaisseur de la couche limite $\delta(x)$.

4- Comparer les valeurs adimensionnelles $\frac{\delta}{x}$, $\frac{\delta_1}{x}$, $\frac{\delta_2}{x}$ avec celles obtenues à la partie **A** puis remplir le tableau ci-dessous :

TP	$\frac{\delta}{x} \mathfrak{R}_{ex}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\delta_1}{x} \mathfrak{R}_{ex}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\delta_2}{x} \mathfrak{R}_{ex}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\tau_p}{\rho U_e^2} \mathfrak{R}_{ex}^{\frac{1}{2}}$	H
P					
S					
B	4,92	1,72	0,66	0,33	2,59

TP : Type de profil. P : Polynomial.

S : Sinusoidal. B : Blasius.

5- Application numérique : Calculer les épaisseurs de la couche limite, de déplacement et de quantité de mouvement en bout d'une plaque de longueur $2m$ placée dans un écoulement de vitesse uniforme de $20 m/s$ d'un fluide de viscosité cinématique $1,4 \cdot 10^{-5} m^2/s$.

L5 : Considérons l'écoulement autour d'une plaque plane très mince.

1- Ecrire les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes pour un écoulement incompressible et instationnaire. Identifier les différents termes présents.

2- Simplifier ces équations pour obtenir celles de la couche limite laminaire bidimensionnelle d'un écoulement stationnaire en négligeant les forces de pesanteur et en prenant comme variables de référence :

U_e : vitesse de référence = vitesse de l'écoulement à l'extérieur de la C.L. suivant x .

L : longueur caractéristique dans la direction x .

δ : longueur caractéristique dans la direction y . ($\delta \ll L$)

$U_e \cdot \delta/L$: vitesse de référence suivant y .

ρU_e^2 : pression de référence.

3- Montrer en expliquant que ces équations peuvent aussi se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

Ecrire dans ce cas les conditions aux limites correspondantes.

4- On suppose maintenant que $U_e = C^{te}$ et que le gradient de pression axial est nul.

- Ecrire les nouvelles équations qui régissent cet écoulement avec les conditions aux limites associées.

- Montrer que la résolution de ce système re-

vient à la résolution d'une seule équation aux dérivées partielles en ψ dont on écrira l'expression avec les conditions aux limites associées sur la fonction de courant ψ .

5- Recherche des solutions auto-semblables pour les profils de vitesse de la forme :

$$\frac{u}{U_e} = \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

On pose :

$$\eta = \frac{y}{\delta} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$$

- Trouver la relation de type :

$$\psi(x, y) = K f(\eta)$$

où K est une variable à déterminer et

$$f'(\eta) = \Phi(\eta)$$

- Montrer que le problème revient à la résolution d'une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$a f'''' + b f f'' = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$f(0) = 0; f'(0) = 0; f'(\infty) = 1$$

où a et b sont des constantes à déterminer.

- Donner l'expression du champ de vitesse $u(x, y)$ et $v(x, y)$ en fonction de $f(\eta)$.

6- En supposant que la plaque est percée de trous fins afin d'aspirer la couche limite. Quelles seront les nouvelles conditions aux limites sur f ?

7- On reprend maintenant les équations de la couche limite définies à la 3^{ème} question et on suppose un gradient de pression axial non nul.

- En intégrant directement ces équations (Von-Karman), montrer qu'on peut écrire l'expression :

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (\delta_1 + 2\delta_2) \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2}$$

où δ_1 est l'épaisseur de déplacement, δ_2 l'épaisseur de quantité de mouvement et τ_p la contrainte à la paroi.

- Quel est l'intérêt de cette solution directe par rapport à la résolution numérique du problème ? Discuter.

Bibliographie

- [1] R. OUZIAUX, “*Mécanique des fluides appliquée*” , Ed. Dunod Université, Paris 1978.
- [2] V. L. STREETER, E. B. WYLIE, “*Fluid Mechanics*”, Ed. McGraw-Hill, Sixth Ed., 1975.
- [3] RONALD V. GILES, “*Mécanique des fluides et hydraulique : Cours et problèmes*”, Ed. McGraw-Hill, Série Schaum, Paris 1975.
- [4] A. LENCASTRE, “*Hydraulique générale*”, Ed. Eyrolles, Paris 1996.
- [5] M. CARLIER, “*Hydraulique générale et appliquée*”, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d 'E.D.F. - Ed. Eyrolles, Paris 1972.
- [6] P.L. VIOLLET, J.P. CHABARD, P. ESPOSITO, D. LAURENCE, “*Mécanique des fluides appliquée : Ecoulements incompressibles dans les circuits, canaux et rivières, autour de structures et dans l'environnement*”, Ed. Presses de l' E.N.P.C. 1998.
- [7] P. CHASSING, “*Mécanique des fluides : Eléments d'un premier parcours*”, CEPADUES-EDITIONS, 2nd Ed. 2000.
- [8] M. BENTERCIA, “*Mécanique des fluides*”, Cours donné à l'Institut de Mécanique, Univ. Batna 1987.
- [9] R. REY, “*Propriétés cinématiques des écoulements*”, SERAM-ENSAM-Paris 1993.
- [10] R. REY, “*Dimensionnement des turbomachines*”, SERAM-ENSAM-Paris 1994.
- [11] J. GRIMSON, “*Advanced fluid dynamics and heat transfer*”, Ed. McGraw-Hill 1971.
- [12] I.L. RYHMING, “*Dynamique des fluides : Un cours de base du deuxième cycle universitaire*”, Ed. Presses Polytechniques Normandes 1985.
- [13] B. NEKRASSOV, “*Cours d'hydraulique*”, Ed. MIR, 1967.
- [14] Frank M. WHITE, “*Fluid Mecanics*”, 4th Ed. McGraw-Hill, International Edition 2003.

- [15] Régis JOULIE, " *Mécanique des fluides appliquée*", Ed. ellipses, Paris 1998.
- [16] Y. OURAGH, " *Ecoulements forcés en hydraulique*", 1^{ère} Partie, OPU, Alger 1990.
- [17] Y. OURAGH, " *Ecoulements forcés en hydraulique*", 2^{ème} Partie, OPU, Alger 1990.
- [18] J. VINCENT-GENOD, " *Le transport des hydrocarbures liquides et gazeux par canalisation*", Ed. Technip, Publications de l' I.F.P., 1980.
- [19] R. CABET et Y. LIZORET, " *L'économie du transport par conduite*", Ed. Technip, Publications de l' I.F.P., 1974.
- [20] J. RIOUT, " *Capteurs industriels : technologie et méthodes de choix*", Ed. Lavoisier TEC&DOC, 1985.
- [21] S. CANDEL, " *Mécanique des fluides : Cours*", Ed. DUNOD, 2^{ème} Ed., Paris, 1995.
- [22] Mohinder L. NAYYAR, " *Piping Handbook*", 7th Ed. McGraw-Hill, 2000.
- [23] DOE Fundamentals Handbook, " *Thermodynamics, Heat Transfer and Fluid Flow*", Vol 3, U.S. Department of Energy, Washington, 1992.
- [24] R. COMOLET, " *Mécanique expérimentale des fluides*" , 2^{ème} Ed. Masson, T2, Paris 1976.
- [25] G. LEMASSON, " *Mécanique des fluides. Thermodynamique*" , Ed. Delagrave, Paris 1968.
- [26] E. A. BRUN et al., " *Mécanique des fluides*" , Ed. Dunod, T2, Paris 1968.
- [27] E. A. BRUN et al., " *Mécanique des fluides*" , Ed. Dunod, T3, Paris 1970.
- [28] R. COMOLET, " *Mécanique expérimentale des fluides*" , Ed. Masson, Paris 1982.
- [29] I.G. CURRIE, " *Fundamentals Mechanics of Fluids*" , Ed. CRC Press, 4th Ed., Boca Raton 2013.
- [30] H. SCHLICHTING, K. GERSTEN " *Boundary Layer Theory*" , 8th Ed. Springer-Verlag, Germany 2000.
- [31] GUENDOUZ Hichem, " *Etude de l'écoulement de Couette instationnaire avec Maple*", PFE, Département de Mécanique, Université de Batna 2010.