

Equation de Laplace 2D

=====

Dr. Laïd MESSAOUDI

Département de Mécanique

Université Batna 2

=====

Master : Energétique

Matière : Méthodes Numériques Appliquées

=====

2019/2020

Détermination de la température $T(x, y)$ à travers la surface d'une plaque rectangulaire ($L \times H$) dont les extrémités sont soumises à des (C.L.) de Dirichlet.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T(x, y) = 0$$

Conditions aux limites (C.L.):

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= 0, \\ T(x, H) &= 100, \\ T(0, y) &= 60, \\ T(L, y) &= 20. \end{aligned}$$

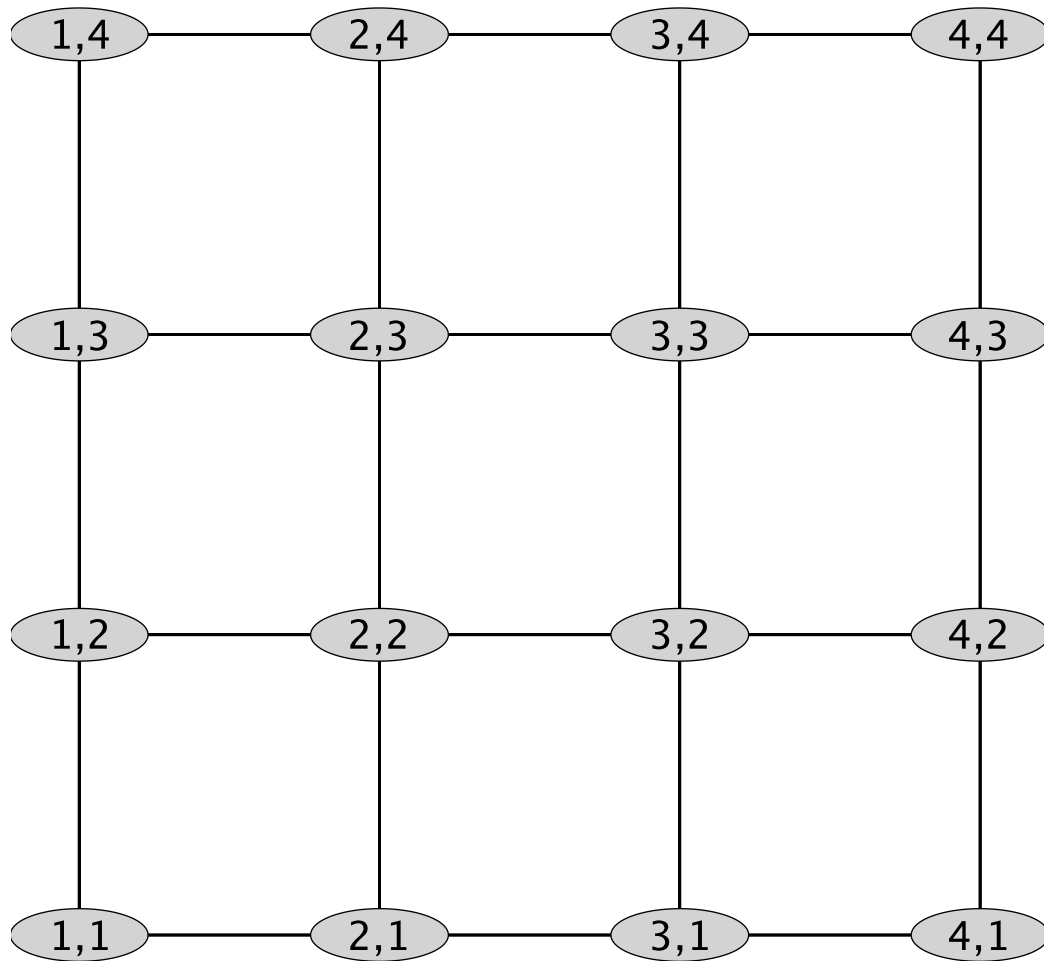
Données communes:

```
> restart;  
> L := 12; H := 12; ndx := 3; ndy := 3;  
      L := 12  
      H := 12  
      ndx := 3  
      ndy := 3  
> Δx :=  $\frac{L}{ndx}$ ; Δy :=  $\frac{H}{ndy}$ ; β :=  $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ ;
```

```

 $\Delta x := 4$ 
 $\Delta y := 4$ 
 $\beta := 1$ 
>  $Tb := 0.; Tg := 60.; Th := 100.; Td := 20.;$ 
 $Tb := 0.$ 
 $Tg := 60.$ 
 $Th := 100.$ 
 $Td := 20.$ 
>  $i_{\max} := ndx + 1; j_{\max} := ndy + 1;$ 
 $i_{\max} := 4$ 
 $j_{\max} := 4$ 
Nombre d'équations:
>  $N := (i_{\max} - 2) \cdot (j_{\max} - 2)$ 
>
 $N := 4$ 
Ecriture des données dans un fichier:
>  $Liste := [L, H, ndx, ndy, \Delta x, \Delta y, \beta, i_{\max}, j_{\max}, N, Tb, Tg, Th, Td]$ 
 $Liste := [12, 12, 3, 3, 4, 4, 1, 4, 4, 4, 0., 60., 100., 20.]$ 
>  $writedata(Donnees, Liste)$ 
Maillage:
>  $with(GraphTheory) : with(SpecialGraphs) :$ 
>  $G := GridGraph(i_{\max}, j_{\max})$ 
 $G := \text{Graph 1: an undirected unweighted graph with 16 vertices and 24 edge(s)}$ 
>  $DrawGraph(G)$ 

```



▼ Solution avec formulation à 5 points:

```

> restart:
> Digits := 4:
Lecture du fichier de données:
> Liste := readdata(Donnees)
      Liste := [12., 12., 3., 3., 4., 4., 1., 4., 4., 4., 0., 60., 100., 20.]
> ndx := trunc(Liste[3]); ndy := trunc(Liste[4]); Δx := Liste[5]; Δy := Liste[6];
  β := Liste[7];

      ndx := 3
      ndy := 3
      Δx := 4.
      Δy := 4.
      β := 1.
> Tb := Liste[11]; Tg := Liste[12]; Th := Liste[13]; Td := Liste[14];

```

```

                                Tb := 0.
                                Tg := 60.
                                Th := 100.
                                Td := 20.
> i_max := trunc(Liste[8]); j_max := trunc(Liste[9]);
                                i_max := 4
                                j_max := 4
> N := trunc(Liste[10])
                                N := 4
Conditions aux Limites:
> for i from 2 to i_max - 1 do T[i, 1] := Tb end do;
                                T2,1 := 0.
                                T3,1 := 0.
> for i from 2 to i_max - 1 do T[i, j_max] := Th end do;
                                T2,4 := 100.
                                T3,4 := 100.
> for j from 2 to j_max - 1 do T[1, j] := Tg end do;
                                T1,2 := 60.
                                T1,3 := 60.
> for j from 2 to j_max - 1 do T[i_max, j] := Td end do;
                                T4,2 := 20.
                                T4,3 := 20.

```

```

> k := 1
                                k := 1
Résolution pour les noeuds internes:
> for j from 2 to j_max - 1 do
  for i from 2 to i_max - 1 do
    Eq[k] := T[i + 1, j] + T[i - 1, j] + β2 · (T[i, j + 1] + T[i, j - 1]) - 2 · (1
    + β2) · T[i, j] = 0;
    Temps[k] := T[i, j];
    k := k + 1
  end do;
end do;
Ecriture du système d'équations:
> for k from 1 to N do Eq[k] end do;
                                T3,2 + 60. + 1. T2,3 - 4. T2,2 = 0
                                20. + T2,2 + 1. T3,3 - 4. T3,2 = 0
                                T3,3 + 160. + 1. T2,2 - 4. T2,3 = 0
                                120. + T2,3 + 1. T3,2 - 4. T3,3 = 0

```

```

> Eqs := {seq(Eq[k], k = 1..N)} :
> Tmps := [seq(Temps[k], k = 1..N)];
           Tmps := [T2,2, T3,2, T2,3, T3,3]
> SolT := solve(Eqs, Tmps);
           SolT := [[T2,2 = 37.50, T3,2 = 27.50, T2,3 = 62.50, T3,3 = 52.50]]
Sauvegarde dans un fichier:
> Temp5p := [rhs(SolT[1, 1]), rhs(SolT[1, 2]), rhs(SolT[1, 3]), rhs(SolT[1,
           4])]
           Temp5p := [37.50, 27.50, 62.50, 52.50]
> writedata(Fich5p, Temp5p)
>

```

▼ Solution avec formulation à 9 points:

```

> Restart:
> Digits := 4:
Lecture du fichier de données:
> Liste := readdata(Donnees)
           Liste := [12., 12., 3., 3., 4., 4., 1., 4., 4., 4., 0., 60., 100., 20.]
> ndx := trunc(Liste[3]); ndy := trunc(Liste[4]); Δx := Liste[5]; Δy := Liste[6];
   β := Liste[7];
           ndx := 3
           ndy := 3
           Δx := 4.
           Δy := 4.
           β := 1.
> Tb := Liste[11]; Tg := Liste[12]; Th := Liste[13]; Td := Liste[14];
           Tb := 0.
           Tg := 60.
           Th := 100.
           Td := 20.
> imax := trunc(Liste[8]); jmax := trunc(Liste[9]);
           imax := 4
           jmax := 4
> N := trunc(Liste[10])
           N := 4
Conditions aux Limites:
> for i from 2 to imax - 1 do T[i, 1] := Tb end do; T[1, 1] := 0.5 · (Tb + Tg);
           T[imax, 1] := 0.5 · (Tb + Td);
           T2,1 := 0.
           T3,1 := 0.
           T1,1 := 30.0
           T4,1 := 10.0

```

```

> for i from 2 to  $i_{\max} - 1$  do  $T[i, j_{\max}] := Th$  end do;  $T[1, j_{\max}] := 0.5 \cdot (Tg + Th)$ ;
   $T[i_{\max}, j_{\max}] := 0.5 \cdot (Td + Th)$ ;
                                 $T_{2,4} := 100.$ 
                                 $T_{3,4} := 100.$ 
                                 $T_{1,4} := 80.0$ 
                                 $T_{4,4} := 60.0$ 
> for j from 2 to  $j_{\max} - 1$  do  $T[1, j] := Tg$  end do;
                                 $T_{1,2} := 60.$ 
                                 $T_{1,3} := 60.$ 
> for j from 2 to  $j_{\max} - 1$  do  $T[i_{\max}, j] := Td$  end do;
                                 $T_{4,2} := 20.$ 
                                 $T_{4,3} := 20.$ 

```

```

> k := 1
                                k := 1
R solution pour les noeuds internes:
> for j from 2 to  $j_{\max} - 1$  do
  for i from 2 to  $i_{\max} - 1$  do
     $Eq[k] := T[i + 1, j + 1] + T[i + 1, j - 1] + T[i - 1, j + 1] + T[i - 1, j - 1]$ 
     $+ 2 \cdot \frac{5 - \beta^2}{1 + \beta^2} \cdot (T[i + 1, j] + T[i - 1, j]) + 2 \cdot \frac{5 \cdot \beta^2 - 1}{1 + \beta^2} \cdot (T[i, j + 1] + T[i, j$ 
     $- 1]) - 20 \cdot T[i, j] = 0;$ 
     $Temps[k] := T[i, j];$ 
    k := k + 1
  end do;
end do;

```

Ecriture du système d'équations:

```

> for k from 1 to N do  $Eq[k]$  end do;
                                 $T_{3,3} + 330.0 + 4.000 T_{3,2} + 4.000 T_{2,3} - 20 T_{2,2} = 0$ 
                                 $110.0 + T_{2,3} + 4.000 T_{2,2} + 4.000 T_{3,3} - 20 T_{3,2} = 0$ 
                                 $880.0 + T_{3,2} + 4.000 T_{3,3} + 4.000 T_{2,2} - 20 T_{2,3} = 0$ 
                                 $660.0 + T_{2,2} + 4.000 T_{2,3} + 4.000 T_{3,2} - 20 T_{3,3} = 0$ 
>  $Eqs := \{seq(Eq[k], k = 1..N)\} :$ 
>  $Tmps := [seq(Temps[k], k = 1..N)] ;$ 
                                 $Tmps := [T_{2,2}, T_{3,2}, T_{2,3}, T_{3,3}]$ 
>  $SolT := solve(Eqs, Tmps);$ 
                                 $SolT := [[T_{2,2} = 37.14, T_{3,2} = 26.67, T_{2,3} = 63.33, T_{3,3} = 52.86]]$ 

```

Enregistrement dans un fichier:

```

>  $Temp9p := [rhs(SolT[1, 1]), rhs(SolT[1, 2]), rhs(SolT[1, 3]), rhs(SolT[1,$ 
  4])]

```

```

Temp9p := [37.14, 26.67, 63.33, 52.86]
> writedata(Fich9p, Temp9p)
>

```

Solution analytique:

```

> restart:
> Digits := 4

```

Digits := 4

Lecture du fichier de données:

```

> Liste := readdata(Donnees)
Liste := [12., 12., 3., 3., 4., 4., 1., 4., 4., 4., 0., 60., 100., 20.]
> L := Liste[1]; H := Liste[2]; Δx := Liste[5]; Δy := Liste[6]

```

L := 12.

H := 12.

Δx := 4.

Δy := 4.

```

> Tb := Liste[11]; Tg := Liste[12]; Th := Liste[13]; Td := Liste[14];

```

Tb := 0.

Tg := 60.

Th := 100.

Td := 20.

```

> h(x, y) := (4 * Th / π) * sum_{k=1}^{50} (sin((2*k-1) * π * x / L) * sinh((2*k-1) * π * y / L)) / ((2*k-1) * sinh((2*k-1) * π * H / L));

```

$$h := (x, y) \mapsto \frac{4 Th}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{50} \frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi y}{L}\right)}{(2k-1) \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi H}{L}\right)} \right)$$

```

> b(x, y) := (4 * Tb / π) * sum_{k=1}^{50} (sin((2*k-1) * π * x / L) * sinh((2*k-1) * π * y / L)) / ((2*k-1) * sinh((2*k-1) * π * H / L));

```

$$b := (x, y) \mapsto \frac{4 Tb}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{50} \frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi y}{L}\right)}{(2k-1) \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi H}{L}\right)} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &> d(x, y) := \frac{4 \cdot Td}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{50} \frac{\sin\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot y}{H}\right) \cdot \sinh\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot x}{H}\right)}{(2 \cdot k - 1) \cdot \sinh\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot L}{H}\right)}; \\
 &d := (x, y) \mapsto \frac{4 \cdot Td \left(\sum_{k=1}^{50} \frac{\sin\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot y}{H}\right) \sinh\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot x}{H}\right)}{(2 \cdot k - 1) \sinh\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot L}{H}\right)} \right)}{\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> g(x, y) := \frac{4 \cdot Tg}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{50} \frac{\sin\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot y}{H}\right) \cdot \sinh\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot x}{H}\right)}{(2 \cdot k - 1) \cdot \sinh\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot L}{H}\right)}; \\
 &g := (x, y) \mapsto \frac{4 \cdot Tg \left(\sum_{k=1}^{50} \frac{\sin\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot y}{H}\right) \sinh\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot x}{H}\right)}{(2 \cdot k - 1) \sinh\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot L}{H}\right)} \right)}{\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> T22 := evalf(h(\Delta x, \Delta y) + b(2 \cdot \Delta x, 2 \cdot \Delta y) + g(2 \cdot \Delta x, \Delta y) + d(\Delta x, 2 \cdot \Delta y)) \\
 &T22 := 37.15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> T32 := evalf(h(2 \cdot \Delta x, \Delta y) + b(\Delta x, 2 \cdot \Delta y) + g(\Delta x, \Delta y) + d(2 \cdot \Delta x, 2 \cdot \Delta y)) \\
 &T32 := 26.67
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> T23 := evalf(h(\Delta x, 2 \cdot \Delta y) + b(2 \cdot \Delta x, \Delta y) + g(2 \cdot \Delta x, 2 \cdot \Delta y) + d(\Delta x, \Delta y)) \\
 &T23 := 63.30
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> T33 := evalf(h(2 \cdot \Delta x, 2 \cdot \Delta y) + b(\Delta x, \Delta y) + g(\Delta x, 2 \cdot \Delta y) + d(2 \cdot \Delta x, \Delta y)) \\
 &T33 := 52.82
 \end{aligned}$$

Comparaison:

Lecture des fichiers Fich5p et Fich9p:

```

> Temp5p := readdata(Fich5p)
Temp5p := [37.5, 27.5, 62.5, 52.5]
> Temp9p := readdata(Fich9p)
Temp9p := [37.14, 26.67, 63.33, 52.86]
>
  
```

Noeuds	Schéma 5p	Schéma 9p	Solution Analytique	ErrRel 5p (%)	ErrRel 9p (%)
22	37.5	37.14	37.15	0.9421	0.02692
32	27.5	26.67	26.67	3.112	0.

23	62.5	63.33	63.30	1.264	0.04739
33	52.5	52.86	52.82	0.6058	0.07573

Tableau comparatif

[>