

▼ **UNIVERSITE de BATNA**

Faculté des Sciences de l'Ingénieur  
Département de Mécanique

## **VISUALISATION DES ECOULEMENTS IRROTATIONNELS**

Proposé et dirigé par: Dr. Laïd. MESSAOUDI  
par: SLIMANE SIHEM

Etudié

### ▼ **Introduction:**

Le but de ce travail est d'introduire l'utilisation du logiciel de calcul formel (ou symbolique) "Maple" dans le calcul scientifique d'une part et, d'autre part, de réaliser un programme à caractère pédagogique qui apportera une aide aux enseignants afin de faciliter aux étudiants la compréhension des écoulements à potentiels de vitesse (ou irrotationnels). Ce travail se résume donc à effectuer tous les calculs nécessaires et visualiser graphiquement n'importe quel écoulement potentiel en utilisant le principe de superposition des écoulements élémentaires en utilisant uniquement les commandes du logiciel "Maple".

### ▼ **Etude mathématique:**

Le but de cette partie est d'étudier les écoulements potentiels. Cette étude est constituée de trois parties principales.  
Dans la première partie, nous donnons les fonctions de courant et potentiel des vitesses ainsi que les composantes du champ de vitesses pour les écoulements élémentaires.  
Dans la deuxième partie, nous appliquons le principe de

superposition des écoulements élémentaires afin d'obtenir des écoulements plus complexes. Nous déterminons ainsi la fonction de courant, le potentiel des vitesses et le champs de vitesses pour chaque écoulement résultant.

Dans la troisième partie, nous avons développé un programme utilisant les "Maplets" qui donne automatiquement la fonction de courant et le potentiel des vitesses de n'importe quel écoulement défini par sa fonction potentielle complexe  $F(z)$ .

### ▼ Ecoulements élémentaires:

#### ▼ Ecoulement uniforme:

Ce type d'écoulement est défini par la fonction potentiel complexe  $F(z)$  suivante:

```
> restart;
> F(z):=q[0]*z*exp(-I*alpha);
```

$$F(z) := q_0 z e^{-I\alpha}$$

$z$  étant le nombre complexe défini par:

```
> z:=x+I*y;
```

$$z := x + Iy$$

Donc:

```
> F(z):= q[0]*z*exp(-I*alpha); F(z):= evalc(F(z));
```

$$F(x + Iy) := q_0 (x + Iy) e^{-I\alpha}$$

$$F(x + Iy) := q_0 x \cos(\alpha) + q_0 y \sin(\alpha) + I (q_0 y \cos(\alpha) - q_0 x \sin(\alpha))$$

La fonction de courant et le potentiel des vitesses sont données successivement par:

```
> psi:= evalc(Im(F(z))):
                                psi:= collect(psi,q[0]);
                                phi:=
```

```
evalc(Re(F(z))):
                                phi:= collect(phi,q[0]);
```

$$\psi := (y \cos(\alpha) - x \sin(\alpha)) q_0$$

$$\phi := (x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha)) q_0$$

Les composantes du champ de vitesse sont données par :

```
> u:=diff(phi,x); v:=diff(phi,y);
      u := cos(α) q0
      v := sin(α) q0
```

▼ *Ecoulement de type source:*

*Ce type d'ecoulement est défini par la fonction potentiel complexe F(z) suivante:*

```
> restart;
> F(z):=qv/(2*pi)*ln(z-zs);
      F(z) :=  $\frac{1}{2} \frac{qv \ln(z - zs)}{\pi}$ 
```

```
> z:= x+I*y; zs:= xs+I*ys;
      z := x + I y
      zs := xs + I ys
```

*Donc:*

```
> F(z):=qv/(2*pi)*ln(z-zs): F(z):= evalc(F(z));
F(x+I y) :=  $\frac{1}{4} \frac{qv \ln((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}{\pi}$ 
+  $\frac{\frac{1}{2} I qv \arctan(y - ys, x - xs)}{\pi}$ 
```

*La fonction de courant et le potentiel des vitesses sont données comme suit:*

```
> psi:= evalc(Im(F(z)));
      phi:= evalc(Re(F(z)));
      ψ :=  $\frac{1}{2} \frac{qv \arctan(y - ys, x - xs)}{\pi}$ 
      φ :=  $\frac{1}{4} \frac{qv \ln((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}{\pi}$ 
```

*Les composantes de champs de vitesse u et v sont défini par:*

```
> u:=diff(phi,x);
      v:=diff(phi,y);
      u :=  $\frac{1}{4} \frac{qv (2 x - 2 xs)}{\pi ((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}$ 
      v :=  $\frac{1}{4} \frac{qv (2 y - 2 ys)}{\pi ((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}$ 
```

### ▼ *Ecoulement de type puits:*

Ce type d'ecoulement est défini par la fonction potentiel complexe  $F(z)$  suivante :

```
> restart;
```

```
> F(z):=-qv/(2*pi)*ln(z-zp);
```

$$F(z) := -\frac{1}{2} \frac{qv \ln(z - zp)}{\pi}$$

```
> z:=x+I*y; zp:=xp+I*yp; F(z):=-qv/(2*pi)*ln(z-zp): F(z):=evalc(F(z));
```

$$z := x + Iy$$

$$zp := xp + Iyp$$

$$F(x + Iy) := -\frac{1}{4} \frac{qv \ln((x - xp)^2 + (y - yp)^2)}{\pi}$$

$$-\frac{\frac{1}{2} I qv \arctan(y - yp, x - xp)}{\pi}$$

La fonction de courant et le potentiel des vitesses sont données comme suit :

```
> psi:= evalc(Im(F(z)));
```

```
phi:= evalc(Re(F(z)));
```

$$\psi := -\frac{1}{2} \frac{qv \arctan(y - yp, x - xp)}{\pi}$$

$$\phi := -\frac{1}{4} \frac{qv \ln((x - xp)^2 + (y - yp)^2)}{\pi}$$

Les composantes de champs de vitesses  $u$  et  $v$  sont défini par :

```
> u:=diff(phi,x);
```

```
v:=diff(phi,y);
```

$$u := -\frac{1}{4} \frac{qv (2x - 2xp)}{\pi ((x - xp)^2 + (y - yp)^2)}$$

$$v := -\frac{1}{4} \frac{qv (2y - 2yp)}{\pi ((x - xp)^2 + (y - yp)^2)}$$

### ▼ *Ecoulement tourbillonnaire:*

Ce type d'ecoulement est défini par la fonction potentiel complexe  $F(z)$  suivante :

```
> restart;
```

```
> F(z):=-Gamma/(2*pi)*ln(z-zv);
```

$$F(z) := -\frac{1}{2} \frac{\Gamma \ln(z-zv)}{\pi}$$

```
> z:= x+I*y; zv:=xv+I*yv; F(z):=-Gamma/(2*pi)*ln(z-zv): F(z):=evalc(F(z));
```

$$z := x + Iy$$

$$zv := xv + Iyv$$

$$F(x + Iy) := -\frac{1}{4} \frac{\Gamma \ln((x-xv)^2 + (y-yv)^2)}{\pi}$$

$$-\frac{\frac{1}{2} I \Gamma \arctan(y-yv, x-xv)}{\pi}$$

*La fonction de courant et le potentiel des vitesses sont données comme suit :*

```
> psi:= evalc(Im(F(z)));
```

```
phi:= evalc(Re(F(z)));
```

$$\psi := -\frac{1}{2} \frac{\Gamma \arctan(y-yv, x-xv)}{\pi}$$

$$\phi := -\frac{1}{4} \frac{\Gamma \ln((x-xv)^2 + (y-yv)^2)}{\pi}$$

*Les composantes de champs de vitesses u et v sont définies par :*

```
> u:=diff(phi,x); v:=diff(phi,y);
```

$$u := -\frac{1}{4} \frac{\Gamma (2x - 2xv)}{\pi ((x-xv)^2 + (y-yv)^2)}$$

$$v := -\frac{1}{4} \frac{\Gamma (2y - 2yv)}{\pi ((x-xv)^2 + (y-yv)^2)}$$

### ▼ *Ecoulement autour d'un angle:*

*Ce type d'écoulement est défini par la fonction potentiel complexe F(z) suivante :*

```
> restart;
```

```
> F(z):=A*z^n;
```

$$F(z) := Az^n$$

```
> z:=x+I*y; F(z):=A*z^n: F(Z):= evalc(F(z));
```

$$z := x + Iy$$

$$F(Z) := A e^{\frac{1}{2} n \ln(x^2 + y^2)} \cos(n \arctan(y, x)) \\ + I A e^{\frac{1}{2} n \ln(x^2 + y^2)} \sin(n \arctan(y, x))$$

*La fonction de courant et le potentiel des vitesses sont données comme suit :*

```
> psi:=evalc(Im(F(z)));
                                phi:= evalc(Re(F(z)));
```

$$\psi := A e^{\frac{1}{2} n \ln(x^2 + y^2)} \sin(n \arctan(y, x))$$

$$\phi := A e^{\frac{1}{2} n \ln(x^2 + y^2)} \cos(n \arctan(y, x))$$

*Les composantes de champs de vitesses u et v sont définit par :*

```
> u:=collect(diff(phi,x),exp);
                                v:=collect(diff(phi,y),exp);
```

$$u := \left( \frac{A n x \cos(n \arctan(y, x))}{x^2 + y^2} \right. \\ \left. + \frac{A \sin(n \arctan(y, x)) n y}{x^2 \left( 1 + \frac{y^2}{x^2} \right)} \right) e^{\frac{1}{2} n \ln(x^2 + y^2)}$$

$$v := \left( \frac{A n y \cos(n \arctan(y, x))}{x^2 + y^2} \right. \\ \left. - \frac{A \sin(n \arctan(y, x)) n}{x \left( 1 + \frac{y^2}{x^2} \right)} \right) e^{\frac{1}{2} n \ln(x^2 + y^2)}$$

▼ *Ecoulement autour d'une plaque verticale:*

*Ce type d'ecoulement est définit par la fonction potentiel complexe F(z) suivante :*

```
> restart;
```

```
> F(z):=abs(q0)*(sqrt(z^2+a^2));
```

$$F(z) := |q_0| \sqrt{z^2 + a^2}$$

```
> q0:=limit((y/a)/(sqrt((1-(y/a)^2))),y=ymax);
```

$$q0 := \frac{ymax}{a \sqrt{1 - \frac{ymax^2}{a^2}}}$$

```
> z:=x+I*y: F(z):=abs(q0)*(sqrt(z^2+a^2)): F(Z):=
evalc(F(z));
```

$$F(Z) := \frac{1}{2} \left( \frac{ymax^2 \cos\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{signum}\left(-1 + \frac{ymax^2}{a^2}\right)\right) \pi\right)^2}{a^2 \left| -1 + \frac{ymax^2}{a^2} \right|} + \frac{ymax^2 \sin\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{signum}\left(-1 + \frac{ymax^2}{a^2}\right)\right) \pi\right)^2}{a^2 \left| -1 + \frac{ymax^2}{a^2} \right|} \right)$$

1/2

$$\sqrt{2 \sqrt{x^4 + 2 x^2 y^2 + 2 x^2 a^2 + y^4 - 2 y^2 a^2 + a^4} + 2 x^2 - 2 y^2 + 2 a^2} + \frac{1}{2} I \left( \frac{ymax^2 \cos\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{signum}\left(-1 + \frac{ymax^2}{a^2}\right)\right) \pi\right)^2}{a^2 \left| -1 + \frac{ymax^2}{a^2} \right|} + \frac{ymax^2 \sin\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{signum}\left(-1 + \frac{ymax^2}{a^2}\right)\right) \pi\right)^2}{a^2 \left| -1 + \frac{ymax^2}{a^2} \right|} \right)$$

1/2

$$\operatorname{csgn}(2 x y - I x^2 + I y^2 - I a^2)$$

$$\sqrt{2 \sqrt{x^4 + 2 x^2 y^2 + 2 x^2 a^2 + y^4 - 2 y^2 a^2 + a^4} - 2 x^2 + 2 y^2 - 2 a^2}$$

*La fonction de courant et le potentiel des vitesses sont données comme suit :*

```
> phi:=evalc(Re(F(z))); psi:=evalc(Im(F(z)));
```

$$\phi := \frac{1}{2} \left( \frac{y_{max}^2 \cos \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{signum} \left( -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right) \right) \pi \right)^2}{a^2 \left| -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right|} + \frac{y_{max}^2 \sin \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{signum} \left( -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right) \right) \pi \right)^2}{a^2 \left| -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right|} \right)^{1/2}$$

$$\psi := \frac{1}{2} \left( \frac{y_{max}^2 \cos \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{signum} \left( -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right) \right) \pi \right)^2}{a^2 \left| -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right|} + \frac{y_{max}^2 \sin \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{signum} \left( -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right) \right) \pi \right)^2}{a^2 \left| -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right|} \right)^{1/2}$$

$$\operatorname{csgn}(2xy - Ix^2 + Iy^2 - Ia^2)$$

$$\sqrt{2\sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2a^2 + y^4 - 2y^2a^2 + a^4} - 2x^2 + 2y^2 - 2a^2}$$

Les composantes de champs de vitesses  $u$  et  $v$  sont définit par :

**> u:=diff(phi,x); v:=diff(phi,y);**

$$u := \frac{1}{4} \left( \frac{y_{max}^2 \cos \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{signum} \left( -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right) \right) \pi \right)^2}{a^2 \left| -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right|} \right)$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{y_{max}^2 \sin\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{signum}\left(-1 + \frac{y_{max}^2}{a^2}\right)\right) \pi\right)^2}{a^2 \left| -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right|} \right) \\
&^{1/2} \left( \frac{4x^3 + 4xy^2 + 4xa^2}{\sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2a^2 + y^4 - 2y^2a^2 + a^4}} + 4x \right) \Bigg) / \\
& \sqrt{2 \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2a^2 + y^4 - 2y^2a^2 + a^4} + 2x^2 - 2y^2 + 2a^2} \\
v := & \frac{1}{4} \left( \frac{y_{max}^2 \cos\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{signum}\left(-1 + \frac{y_{max}^2}{a^2}\right)\right) \pi\right)^2}{a^2 \left| -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right|} \right. \\
& + \frac{y_{max}^2 \sin\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{signum}\left(-1 + \frac{y_{max}^2}{a^2}\right)\right) \pi\right)^2}{a^2 \left| -1 + \frac{y_{max}^2}{a^2} \right|} \right) \\
&^{1/2} \left( \frac{4x^2y + 4y^3 - 4ya^2}{\sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2a^2 + y^4 - 2y^2a^2 + a^4}} - 4y \right) \Bigg) / \\
& \sqrt{2 \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2a^2 + y^4 - 2y^2a^2 + a^4} + 2x^2 - 2y^2 + 2a^2}
\end{aligned}$$

▼ *Exemples de superposition des écoulement élémentaires:*

▼ *Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source:  
"Demi solide de RANKINE".*

```

> restart;
F1(z) : représente la fonction potentiel complexe de l'écoulement
uniforme .
> F[1](z) := q[0]*z*exp(-I*alpha);

```

$$F_1(z) := q_0 z e^{-I\alpha}$$

$F_2(z)$  : représente la fonction potentiel complexe de l'écoulement autour d'une source .

>  $F[2](z) := qv / (2 * \pi i) * \ln(z - zs)$ ;

$$F_2(z) := \frac{1}{2} \frac{qv \ln(z - zs)}{\pi}$$

La superposition de ces deux écoulements donnera :

>  $F(z) = F[1](z) + F[2](z)$ ;

$$F(z) = q_0 z e^{-I\alpha} + \frac{1}{2} \frac{qv \ln(z - zs)}{\pi}$$

>  $z := x + I * y$ ;  $zs := xs + I * ys$ ;  $F[1](z) := q[0] * z * \exp(-I * \alpha)$ ;  $F[2](z) := qv / (2 * \pi i) * \ln(z - zs)$ ;  $F(z) = F[1](z) + F[2](z)$ ;  $F(z) = \text{evalc}(F[1](z) + F[2](z))$ ;

$$z := x + I y$$

$$zs := xs + I ys$$

$$F(x + I y) = q_0 x \cos(\alpha) + q_0 y \sin(\alpha)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{qv \ln((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}{\pi} + I \left( q_0 y \cos(\alpha) - q_0 x \sin(\alpha) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{qv \arctan(y - ys, x - xs)}{\pi} \right)$$

La fonction de courant et le potentiel des vitesses sont données respectivement par:

>  $\psi := \text{evalc}(\text{Im}(F[1](z) + F[2](z)))$ ;

$\phi := \text{evalc}(\text{Re}(F[1](z) + F[2](z)))$ ;

$$\psi := q_0 y \cos(\alpha) - q_0 x \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \frac{qv \arctan(y - ys, x - xs)}{\pi}$$

$$\phi := q_0 x \cos(\alpha) + q_0 y \sin(\alpha) + \frac{1}{4} \frac{qv \ln((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}{\pi}$$

Les composantes du champs de vitesses sont données par:

>  $u := \text{diff}(\phi, x)$ ;

$v := \text{diff}(\phi, y)$ ;

$$u := q_0 \cos(\alpha) + \frac{1}{4} \frac{qv (2x - 2xs)}{\pi ((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}$$

$$v := q_0 \sin(\alpha) + \frac{1}{4} \frac{qv(2y - 2ys)}{\pi((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}$$

$$v := q_0 \sin(\alpha) + \frac{1}{4} \frac{qv(2y - 2ys)}{\pi((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}$$

Superposition d'un écoulement uniforme, d'une source et d'un puits: "Solide de RANKINE".

```
> restart;
```

$F_1(z)$  : représente la fonction potentiel complexe de l'écoulement uniforme .

```
> F[1](z) = q[0]*z*exp(-I*alpha);
```

$$F_1(z) = q_0 z e^{-I\alpha}$$

$F_2(z)$  : représente la fonction potentiel complexe de l'écoulement autour d'une source .

```
> F[2](z) := qv/(2*pi)*ln(z-zs);
```

$$F_2(z) := \frac{1}{2} \frac{qv \ln(z - zs)}{\pi}$$

$F_3(z)$  : représente la fonction potentiel complexe de l'écoulement autour d'un puits .

```
> F[3](z) := qv/(2*pi)*ln(z-zp);
```

$$F_3(z) := \frac{1}{2} \frac{qv \ln(z - zp)}{\pi}$$

```
> F(Z) := F[1](z) + F[2](z) + F[3](z);
```

$$F(Z) := q_0 z e^{-I\alpha} + \frac{1}{2} \frac{q_v \ln(z - zs)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{q_v \ln(z - zp)}{\pi}$$

La superposition de ces écoulements donnera:

```
> z:=x+I*y: zp:=xp+I*yp: zs:=xs+I*ys:
```

```
F[1](z) = q[0]*z*exp(-I*
```

```
alpha):
```

```
F[2](z) := qv/(2*
```

```
pi)*ln(z-zs): F[3](z) := qv/(2*pi)*ln(z-zp): F(z) = F
```

```
[1](z) + F[2](z) + F[3](z): F(z) = evalc(q[0]*z*exp(-I*
```

```
alpha) + F[2](z) + F[3](z));
```

$$F(x + Iy) = q_0 x \cos(\alpha) + q_0 y \sin(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \frac{qv \ln((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}{\pi} \\
& + \frac{1}{4} \frac{qv \ln((x - xp)^2 + (y - yp)^2)}{\pi} + I \left( q_0 y \cos(\alpha) - q_0 x \sin(\alpha) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{qv \arctan(y - ys, x - xs)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{qv \arctan(y - yp, x - xp)}{\pi} \right)
\end{aligned}$$

*La fonction de courant et le potentiel des vitesses sont données successivement par:*

```
> psi:=evalc(Im(F(z)));
    phi:=evalc(Re(F(z)));
```

$$\begin{aligned}
\psi &:= q_0 y \cos(\alpha) - q_0 x \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \frac{qv \arctan(y - ys, x - xs)}{\pi} \\
& + \frac{1}{2} \frac{qv \arctan(y - yp, x - xp)}{\pi} \\
\phi &:= q_0 x \cos(\alpha) + q_0 y \sin(\alpha) + \frac{1}{4} \frac{qv \ln((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}{\pi} \\
& + \frac{1}{4} \frac{qv \ln((x - xp)^2 + (y - yp)^2)}{\pi}
\end{aligned}$$

*Les composantes de champs de vitesses sont données par:*

```
> u:=diff(phi,x);
    v:=diff(phi,y);
```

$$\begin{aligned}
u &:= q_0 \cos(\alpha) + \frac{1}{4} \frac{qv(2x - 2xs)}{\pi((x - xs)^2 + (y - ys)^2)} \\
& + \frac{1}{4} \frac{qv(2x - 2xp)}{\pi((x - xp)^2 + (y - yp)^2)} \\
v &:= q_0 \sin(\alpha) + \frac{1}{4} \frac{qv(2y - 2ys)}{\pi((x - xs)^2 + (y - ys)^2)} \\
& + \frac{1}{4} \frac{qv(2y - 2yp)}{\pi((x - xp)^2 + (y - yp)^2)}
\end{aligned}$$

$$v := q_0 \sin(\alpha) + \frac{1}{4} \frac{qv(2y - 2ys)}{\pi((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{qv(2y - 2yp)}{\pi((x - xp)^2 + (y - yp)^2)}$$

Superposition d'une source et d'un puits centrés au même point: "DOUBLET".

L'écoulements de type doublet est défini par la fonction potentiel complexe suivante :

```
> restart;
```

```
> F(z):=(qv^2)*exp(-I*alpha)/(z-zd);
```

$$F(x+Iy) := \frac{qv^2 e^{-I\alpha}}{x+Iy-zd}$$

```
> z:= x+I*y; zd:=xd+I*yd; F(z):=(qv^2)*exp(-I*alpha)/(z-zd): evalc((F(z)));
```

$$z := x + Iy$$

$$zd := xd + Iyd$$

$$\frac{qv^2 \cos(\alpha) (x - xd)}{(x - xd)^2 + (y - yd)^2} - \frac{qv^2 \sin(\alpha) (y - yd)}{(x - xd)^2 + (y - yd)^2} + I \left( -\frac{qv^2 \sin(\alpha) (x - xd)}{(x - xd)^2 + (y - yd)^2} - \frac{qv^2 \cos(\alpha) (y - yd)}{(x - xd)^2 + (y - yd)^2} \right)$$

La fonction de courant et le potentiel des vitesses sont données successivement par:

```
> psi:=evalc(Im(F(z)));
```

```
phi:=evalc(Re(F(z)));
```

$$\psi := -\frac{qv^2 \sin(\alpha) (x - xd)}{(x - xd)^2 + (y - yd)^2} - \frac{qv^2 \cos(\alpha) (y - yd)}{(x - xd)^2 + (y - yd)^2}$$

$$\phi := \frac{qv^2 \cos(\alpha) (x - xd)}{(x - xd)^2 + (y - yd)^2} - \frac{qv^2 \sin(\alpha) (y - yd)}{(x - xd)^2 + (y - yd)^2}$$

Les composantes de champs de vitesses sont déterminer comme suit:

```
> u:=diff(phi,x);
```

```
v:=diff(phi,y);
```

$$u := \frac{qv^2 \cos(\alpha)}{(x - xd)^2 + (y - yd)^2} - \frac{qv^2 \cos(\alpha) (x - xd) (2x - 2xd)}{((x - xd)^2 + (y - yd)^2)^2} + \frac{qv^2 \sin(\alpha) (y - yd) (2x - 2xd)}{((x - xd)^2 + (y - yd)^2)^2}$$

$$v := - \frac{qv^2 \cos(\alpha) (x - xd) (2y - 2yd)}{((x - xd)^2 + (y - yd)^2)^2} - \frac{qv^2 \sin(\alpha)}{(x - xd)^2 + (y - yd)^2} + \frac{qv^2 \sin(\alpha) (y - yd) (2y - 2yd)}{((x - xd)^2 + (y - yd)^2)^2}$$

▼ *Superposition d' une source et d'un vortex:*

> restart;

*F1(z) : représente la fonction potentiel complexe de type source .*

> F[1](z):=qv/(2\*pi)\*ln(z-zs);

$$F_1(z) := \frac{1}{2} \frac{qv \ln(z - zs)}{\pi}$$

*F2(z) : représente la fonction potentiel complexe de type vortex .*

> F[2](z):=-I\*Gamma/(2\*pi)\*ln(z-zv);

$$F_2(z) := - \frac{\frac{1}{2} I \Gamma \ln(z - zv)}{\pi}$$

*La superposition de ces deux écoulements donnera :*

> F[1](z):=qv/(2\*pi)\*ln(z-zs):

F[2](z):=-I\*Gamma/(2\*pi)\*ln(z-zv):

F(z)=F[1](z)+F[2](z);

$$F(z) = \frac{1}{2} \frac{qv \ln(z - zs)}{\pi} - \frac{\frac{1}{2} I \Gamma \ln(z - zv)}{\pi}$$

> z:=x+I\*y: zv:=xv+I\*yv: zs:=xs+I\*ys:

F[1](z):=qv/(2\*pi)\*ln(z-zs):

F[2](z):=-I\*Gamma/(2\*pi)\*ln(z-zv):

F(z)=F[1](z)+F[2](z):

F(z):=evalc(F

[1](z)+F[2](z));

$$F(x + Iy) := \frac{1}{4} \frac{qv \ln((x - xs)^2 + (y - ys)^2)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma \arctan(y - yv, x - xv)}{\pi} + I \left( \frac{1}{2} \frac{q \arctan(y - ys, x - xs)}{\pi} - \frac{1}{4} \frac{\Gamma \ln((x - xv)^2 + (y - yv)^2)}{\pi} \right)$$

La fonction de courant et le potentiel des vitesses sont données successivement par:

```
> psi:=evalc(Im(F[1](z)+F[2](z)));
    phi:=evalc(Re(F[1](z)+F[2](z)));
```

$$\psi := \frac{1}{2} \frac{q v \arctan(y - y_s, x - x_s)}{\pi} - \frac{1}{4} \frac{\Gamma \ln((x - x_v)^2 + (y - y_v)^2)}{\pi}$$

$$\phi := \frac{1}{4} \frac{q v \ln((x - x_s)^2 + (y - y_s)^2)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma \arctan(y - y_v, x - x_v)}{\pi}$$

Les composantes de champs de vitesses sont données comme suit:

```
> u:=diff(phi,x);
                                v:=diff(phi,y);
```

$$u := \frac{1}{4} \frac{q v (2 x - 2 x_s)}{\pi ((x - x_s)^2 + (y - y_s)^2)} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma (y - y_v)}{\pi (x - x_v)^2 \left( 1 + \frac{(y - y_v)^2}{(x - x_v)^2} \right)}$$

$$v := \frac{1}{4} \frac{q v (2 y - 2 y_s)}{\pi ((x - x_s)^2 + (y - y_s)^2)} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\pi (x - x_v) \left( 1 + \frac{(y - y_v)^2}{(x - x_v)^2} \right)}$$

$$v := \frac{1}{4} \frac{q v (2 y - 2 y_s)}{\pi ((x - x_s)^2 + (y - y_s)^2)} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\pi (x - x_v) \left( 1 + \frac{(y - y_v)^2}{(x - x_v)^2} \right)}$$

### Programme de détermination des fonctions de courant et des potentiels des vitesses:

On remarque que la connaissance des caractéristiques d'un écoulement est liée à la détermination de la fonction de courant et du potentiel des vitesses. Ces informations sont contenues dans la fonction potentielle complexe de l'écoulement  $F(z)$ . Nous proposons donc, afin de faciliter cette tâche à l'utilisateur, le programme ci-dessous qui permet d'extraire les fonctions **psi** et **phi** de n'importe quel écoulement donné par sa fonction  $F(z)$ .

```
> restart;
> with(Maplets[Elements]):
> courant := proc()
```

```

        local fonction,z;

        use Maplets[Tools] in
            fonction := Get( 'TF1'::algebraic );

        end use;

        evalc(Im(fonction));
    end proc: poten := proc()
        local fonction,z;

        use Maplets[Tools] in
            fonction := Get( 'TF1'::algebraic );

        end use;

        evalc(Re(fonction));
    end proc:
> maplet := Maplet( Window( 'title'="Détermination des
fonctions psi et phi",'height'=250, 'width'=
500,'toolbar' = ToolBar(ToolBarButton("Quitter",
Shutdown())), ['background'=turquoise,['background'=
cyan,"Entrer une expression de la variable complexe z
sous la forme (x+I*y):"],
        TextField['TF1'](50,'value'=-gamma/(2*pi)*I*ln
(x+I*y)),

        TextField['TF2'](), TextField['TF3'](),
        ['background'=turquoise,Button( "Fonction de
courant",'height'=30,'width'=200,foreground=blue,
Evaluate('TF2' = "courant" ) ),Button( " Potentiel
des vitesses",'height'=30,'width'=200,foreground=red,
Evaluate('TF3' = "poten" ) )

        ]
    ] ) ):
Maplets[Display]( maplet );

```

## Programme superposition des écoulements élémentaires:

*Ce programme permet de visualiser graphiquement n'importe quel écoulement potentiel en utilisant le principe de superposition des*



## écoulements élémentaires.

```
> restart;with(plottools):with(plots):with(Maplets
[Elements]):
Warning, the name changecoords has been redefined
Warning, the previous binding of the name arrow has been
removed and it now has an assigned value
> reference:=proc(refe)
    local myprog,maplet,superpos,
Affichage,result,maplet3d,champ;
#####
#####
PROCEDURE
GLOBALE
#####
#####
    if (refe=1) then
        myprog:=proc(prog)
            local maplet3d,
result,Affichage;
            if (prog=1) then
                Affichage:=proc(cas)
                    local qv,k,p,psi,phi,N,xs,ys;
#####
#####
PROCEDURE DES
ECOULEMENTS ELEMENTAIRES
#####
#####
#####
#####
SOURCE
#####
use Maplets[Tools] in
    xs := Get( 'xs1':numeric );
    qv := Get( 'qv1':numeric );    ys := Get(
'ys1':numeric );
    end use;

N:=30;
psi:=qv/6.28*arctan(y-xs,x-ys):
qv/12.56*ln((x-ys)^2+(y-xs)^2):
phi:=
for k from -N to N do
    if (cas=1) then p[k]:=implicitplot(psi=k,x=-10..10,y=
-10..10,color=blue,'title'="Lignes de courant" )
    elif (cas=2) then p[k]:=implicitplot(phi=k,x=-10..10,
y=-10..10,color=red,'title'="Lignes equipotentiellles")
    else
        p[k]:=implicitplot([psi=k,phi=k],x=-10..10,y=-10.
.10,color=[blue, red])
    end if:
od:

display(seq(p[k],k=-N..N));
```

```

end:      champ:=proc() local g0,phi,xs,ys,qv;  use
Maplets[Tools] in
      xs := Get( 'xs1'::numeric );
      qv := Get( 'qv1'::numeric );      ys := Get(
'ys1'::numeric );
      end use;
phi:=qv/12.56*ln((x-ys)^2+(y-xs)^2):
      g0:= fieldplot([diff
(phi,x),diff(phi,y)],x=-10..10,y=-10..10,arrows=THICK,
color=orange) :      display(g0);      end:
      maplet3d
:= Maplet(Window(( 'title'= "Ecoulement de type
source",'toolbar' = ToolBar(ToolBarButton("Quitter",
Shutdown()))),
      [{" (xs , ys): coordonnées de la source
", 'background'="#FFFFCC"], 'background'="#CCFFCC" ,

      [ "Débit volumique qv en [m^2/s]:",TextField['qv1']
(3, 'value' = 30 ), "xs en [m]:", TextField['xs1'](3,
'value' = 0), "ys en [m] :", TextField['ys1'](3, 'value'
= 0), 'background'="#FFFFCC"],
      Plotter['PL1']('height'=320),MathMLViewer['MMLV1']
('height'=100, 'width'=550),
      [ 'background'="#CCFFCC", Button("Lignes de
courant",foreground=blue, Action(Evaluate('PL1' =
'Affichage(1)'),Evaluate('MMLV1'='psi=q[v]/(2*pi)*
arctan((y-x[s])/(x-y[s]))' ) ), Button("Lignes
équipotentiellles",foreground=red,Action( Evaluate('PL1'
= 'Affichage(2)'),Evaluate('MMLV1'='phi=q[v]/(4*pi)*ln(
(x-y[s])^2+(y-x[s])^2)' ) ),
      Button("Ensemble",Action( Evaluate('PL1' =
'Affichage(3)'),Evaluate('MMLV1'='f(z)=q[v]/(2*pi)*ln
(z-z[s])' ) ), Button("Champ de vitesses",foreground=
orange,Action( Evaluate('PL1' = 'champ()'),Evaluate
('MMLV1'='q= 1/4*qv*(2*x-2*xs)/(pi*((x-xs)^2+(y-ys)^2))
+I* 1/4*qv*(2*y-2*ys)/(pi*((x-xs)^2+(y-ys)^2))' ) ) ) ]
      ]))):
result := Maplets[Display](maplet3d):

      elif (prog=2)then
      Affichage:=proc(cas)
      local q0,k,p,psi,phi,N,alpha;
      ###          ECOULEMENT UNIFORME
      #####
      use Maplets[Tools] in
      q0:= Get( 'q01'::numeric );

```

```

        alpha := Get( 'alpha1'::numeric );
    end use;

        N:=10;
psi := q0*y*cos(alpha*3.14/180)-q0*x*sin(alpha*
3.14/180):
phi := q0*x*cos(alpha*3.14/180)+q0*y*sin(alpha*
3.14/180):

for k from -N to N do
    if (cas=1) then p[k]:=implicitplot(psi=k,x=-10..10,y=
-10..10,color=blue , 'title'="Lignes de courant")
    elif (cas=2) then p[k]:=implicitplot(phi=k,x=-10..10,
y=-10..10,color=red, 'title'="Lignes equipotentielles")
    else
        p[k]:=implicitplot([psi=k,phi=k],x=-10..10,y=-10.
.10,color=[blue, red])
    end if:
od:

display(seq(p[k],k=-N..N));

end: champ:=proc() local g0,phi,q0,alpha; use Maplets
[Tools] in
    q0 := Get( 'q01'::numeric );
    alpha := Get( 'alpha1'::numeric );
    end use;

    phi := q0*x*cos(alpha*3.14/180)+q0*y*sin(alpha*
3.14/180):
    g0:= fieldplot([diff
(phi,x),diff(phi,y)],x=-10..10,y=-10..10,arrows=THICK,
color=orange) :    display(g0);    end:

maplet3d := Maplet(Window( 'title'= " Ecoulement
uniforme", 'toolbar' = ToolBar(ToolBarButton("Quitter",
Shutdown()))),
[
    'background'="#CCFFCC" ,
    [    " Vitesse d'écoulement  q0  en [m/s] : ",
TextField['q01'](3,'value' = 1), " Angle d'incidence
alpha  en  [°] :", TextField['alpha1'](3,'value' =
0), 'background'="#FFFFCC" ],
        Plotter['PL1']('height'=320),MathMLViewer
['MMLV1']('height'=100, 'width'=550),
        ['background'="#CCFFCC", Button("Lignes de
courant",foreground=blue,Action( Evaluate('PL1' =
'Affichage(1)'),Evaluate('MMLV1'='psi=q[0]*y*cos(alpha)-
q0*x*sin(alpha)')) ), Button("Lignes equipotentielles",

```

```

foreground=red,Action( Evaluate('PL1' = 'Affichage(2)
'),Evaluate('MMLV1'='phi=q[0]*x*cos(alpha)+q0*y*sin
(alpha)')) ), Button("Ensemble", Action(Evaluate('PL1' =
'Affichage(3)'),Evaluate('MMLV1'='f(z)=q[0]*z*exp(-I*
alpha)')) ), Button("Champ de vitesses",foreground=
orange, Action(Evaluate('PL1' = 'champ()'),Evaluate
('MMLV1'='q = q0*cos(alpha)+I*q0*sin(alpha)')) )
]
)))):
result := Maplets[Display](maplet3d):

      elif (prog=3) then
          Affichage:=proc(cas)
local Gamma,qv,k,p,psi,phi,N,xv,yv;
  ###          ECOULEMENT TOURBILLONNAIRE
#####
use Maplets[Tools] in
      Gamma:= Get( 'Gammal'::numeric );
      xv:= Get( 'xv1'::numeric );yv:= Get(
'yv1'::numeric );
  end use;

N:=30;
psi := -1/12.56*Gamma*ln((x-xv)^2+(y-yv)^2):
phi := 1/6.28*Gamma*arctan(y-yv, x-xv):
  for k from -N to N do
      if (cas=1) then p[k]:=implicitplot(psi=k,x=-10..10,y=
-10..10,color=blue,'title'="Lignes de courant" )
      elif (cas=2) then p[k]:=implicitplot(phi=k,x=-10..10,y=
-10..10,color=red,'title'="Lignes equipotentielles")
      else
          p[k]:=implicitplot([psi=k,phi=k],x=-10..10,y=-10..10,
color=[blue, red])
      end if:
  od:

display(seq(p[k],k=-N..N));

end:      champ:=proc() local g0,phi,Gamma,xv,yv; use
Maplets[Tools] in
      Gamma := Get( 'Gammal'::numeric );
      xv:= Get( 'xv1'::numeric ); yv:= Get(
'yv1'::numeric );
  end use;

phi := 1/6.28*Gamma*arctan(y-yv, x-xv):
  g0:= fieldplot([diff(phi,x),diff(phi,y)],x=-10..10,y=-10.

```

```

.10,arrows=THICK,color=orange) :      display(g0);      end:

      maplet3d := Maplet(Window( 'title'= "
Ecoulement tourbillonnaire",'toolbar' = ToolBar
(ToolBarButton("Quitter", Shutdown()))),
[ [" (xv , yv ) : Coordonnées du vortex ", 'background'=
"#FFFFCC"],
  'background'="#CCFFCC",
  [ " Circulation Gamma en [m^2/s] :", TextField
['Gamma1'](3,'value' = 30)," xv en [m] :", TextField
['xv1'](3,'value' = 0),"yv en [m] :", TextField['yv1']
(3,'value' = 0),'background'="#FFFFCC"],
    Plotter['PL1']('height'=280),MathMLViewer['MMLV1']
('height'=70, 'width'=500),
    [ 'background'="#CCFFCC",Button("Lignes de courant",
foreground=blue, Action(Evaluate('PL1' = 'Affichage(1)'),
Evaluate('MMLV1'='psi=-1/4*Gamma*ln((x-x[v])^2+(y-y[v])^2
/pi') )), Button("Lignes équipotentielles",foreground=red,
Action( Evaluate('PL1' = 'Affichage(2)'),Evaluate('MMLV1'=
'phi= 1/(2*pi)*Gamma*arctan((y-y[v])/(x-x[v]))') )),

      Button("Ensemble",Action( Evaluate('PL1' =
'Affichage(3)'),Evaluate('MMLV1'='f(z) = -I * Gamma / (2*
pi) * ln(z-z[v])') )),Button("Champ de vitesses",
foreground=orange,Action( Evaluate('PL1' = 'champ()'),
Evaluate('MMLV1'='q = -1/4*Gamma*(2*x-2*xv)/(pi*((x-xv)^2+
(y-yv)^2))-I* 1/4*Gamma*(2*y-2*yv)/(pi*((x-xv)^2+(y-yv)^2))
')))
    ]
  ])):
result := Maplets[Display](maplet3d):

> elif (prog=4) then
      Affichage:=proc(cas)
        local qv,k,p,psi,phi,N,xp,yp;
        ###          ECOULEMENT DE TYPE PUIITS
        #####
        use Maplets[Tools] in
          xp:=Get( 'xp1'::numeric );yp:=Get(
'yp1'::numeric );
          qv := Get( 'qv1'::numeric );
        end use;
        N:=100;

          for k from -N to N do

```

```

phi := -1/12.56*qv*ln((x-xp)^2+(y-yp)^2):
      psi := -1/6.28*qv*arctan(y-yp, x-xp):
      if (cas=1) then p[k]:=implicitplot(psi=k,x=-10..10,
y=-10..10,color=blue,'title'="Lignes de courant" )
      elif (cas=2) then p[k]:=implicitplot(phi=k,x=-10..10,
y=-10..10,color=red,'title'="Lignes equipotentielles")
      else
      p[k]:=implicitplot([psi=k,phi=k],x=-10..10,y=-10.
.10,color=[blue, red])
      end if:
od:

display(seq(p[k],k=-N..N));

end:champ:=proc() local g0,phi,qv,xp,yp; use Maplets
[Tools] in
      qv := Get( 'qv1'::numeric );
      xp := Get( 'xp1'::numeric ); yp := Get(
'yp1'::numeric );
      end use;

      phi := -1/12.56*qv*ln((x-xp)^2+(y-yp)^2)
:
g0:= fieldplot([diff(phi,x),diff(phi,y)],x=-10..10,y=
-10..10,arrows=THICK,color=orange) :      display(g0);
end:
maplet3d := Maplet(Window( 'title'= "Ecoulement de type
puits",'toolbar' = ToolBar(ToolBarButton("Quitter",
Shutdown()))),
[ [ "(xp,yp): Coordonnées du puits ",'background'=
"#FFFFCC"],'background'="#CCFFCC",

[ " Débit volumique qv en [m^2/s] :", TextField
['qv1'](3,'value' = 30), " xp en [m] : ", TextField
['xp1'](3,'value' = 0)," yp en [m] : ", TextField
['yp1'](3,'value' = 0),'background'="#FFFFCC"],
      Plotter['PL1']('height'=320),MathMLViewer['MMLV1']
('height'=70, 'width'=600),
[ 'background'="#CCFFCC", Button("Lignes de
courant",foreground=blue, Action(Evaluate('PL1' =
'Affichage(1)'),Evaluate('MMLV1'='psi=-1/(2*pi)*qv*
arctan(y-y[p])/(x-x[p]))' ) ), Button("Lignes
équipotentielles",foreground=red,Action( Evaluate('PL1'
= 'Affichage(2)'),Evaluate('MMLV1'='phi=-1/(4*pi)*q[v]*
ln((x-x[p])^2+(y-y[p])^2)') ) ),

      Button("Ensemble",Action( Evaluate('PL1' =
'Affichage(3)'),Evaluate('MMLV1'='f(z)=-q[v]/(2*pi)*ln

```

```

(z-z[p])))) )
,Button("Champ de vitesses",foreground=orange,Action(
Evaluate('PL1' = 'champ()'),Evaluate('MMLV1'='q = -1/4*
qv*(2*x-2*xp)/(pi*((x-xp)^2-(y-yp)^2))+I* 1/4*qv*(2*
y-2*yp)/(pi*((x-xp)^2+(y-yp)^2))')) )
])):
result := Maplets[Display](maplet3d):

elif (prog=5) then

Affichage:=proc(cas)
local A,n,k,p,psi,phi,N;
##### ECOULEMENT AUTOUR
D'UN ANGLE #####
use Maplets[Tools] in
A:= Get( 'A1':numeric );
n := Get( 'n1':numeric );
end use;

N:=30;
if (n<=1) then
psi := A*exp(1/2*n*ln(r^2*cos(theta)^2+r^2*sin(theta)
^2))*sin(n*arctan(r*sin(theta), r*cos(theta))):

phi := A*exp(1/2*n*ln(r^2*cos(theta)^2+r^2*
sin(theta)^2))*cos(n*arctan(r*sin(theta), r*cos(theta))
):
for k from -N to N do
if (cas=1) then p[k]:=implicitplot(psi=
k,r=0..10,theta=0..2*Pi,color=blue, coords=
polar,'title'="Lignes de courant")
elif (cas=2) then p[k]:=implicitplot(phi=k,r=0..10,
theta=0..2*Pi,color=red, coords=polar,'title'="Lignes
equipotentiellles")
else
p[k]:=implicitplot([psi=k,phi=k],r=0..10,theta=0..2*
Pi,color=[blue, red], coords=polar)
end if:
od:

display(seq(p[k],k=-N..N));
else
psi := A*exp(1/2*n*ln(r^2*cos(theta)^2+
r^2*sin(theta)^2))*sin(n*arctan(r*sin(theta), r*cos
(theta))):

```

```

        phi := A*exp(1/2*n*ln(r^2*cos(theta)^2+r^2*
sin(theta)^2))*cos(n*arctan(r*sin(theta), r*cos(theta))
) :
        for k from -N to N do
            if (cas=1) then p[k]:=implicitplot(psi=
k,r=0..10,theta=0..Pi/2,color=blue, coords=
polar,'title'="Lignes de courant")
            elif (cas=2) then p[k]:=implicitplot(phi=k,r=0..10,
theta=0..Pi/2,color=red, coords=polar,'title'="Lignes
equipotentielles")
            else
                p[k]:=implicitplot([psi=k,phi=k],r=0..10,theta=0..
Pi/2,color=[blue, red], coords=polar)
            end if:
        od:

display(seq(p[k],k=-N..N)); end if;

end:

        maplet3d := Maplet(Window( 'title'=
"Ecoulement autour d'un angle",'toolbar' = ToolBar
(ToolBarButton("Quitter", Shutdown()))),
[ ["n = pi / alpha ",'background'="#FFFFCC"," alpha
: Angle entre les deux parois "], 'background'=
"#CCFFCC",

    [ "Constante A :", TextField['A1'](10,'value' = 3),
" Constante n : ", TextField['n1'](10,'value' = 0.5 )
,'background'="#FFFFCC"],
    Plotter['PL1']('height'=320),MathMLViewer['MMLV1']
('height'=100,'width'=600),
    [ 'background'="#CCFFCC", Button("Lignes de
courant",foreground=blue, Action(Evaluate('PL1' =
'Affichage(1)'),Evaluate('MMLV1'='psi=A*exp(1/2*n*ln
(x^2+y^2))*sin(n*arctan(y/x))'))), Button("Lignes
equipotentielles",foreground=red,Action( Evaluate('PL1'
= 'Affichage(2)'),Evaluate('MMLV1'='phi=A*exp(1/2*n*ln
(x^2+y^2))*cos(n*arctan(y/x))'))),

        Button("Ensemble",Action( Evaluate('PL1' =
'Affichage(3)'),Evaluate('MMLV1'='f(z)=A * Z^n ')) )
    ]
])):
result := Maplets[Display](maplet3d):

        elif (prog=6) then
            Affichage:=proc(cas)

                local a,q0,k,p,psi,phi,N;

```



```

                                ###          ECOULEMENT AUTOUR D'UNE
PLAQUE VERTICALE          #####
use Maplets[Tools] in
    q0:= Get( 'q01'::numeric );
    a := Get( 'a1'::numeric );
end use;

N:=50;
psi := 1/2*abs(limit(y*exp(-.5*ln(abs(1-y^2/a^2)))*cos
(.5*(1/2-1/2*signum(1-y^2/a^2))*Pi)/a-I*y*exp(-.5*ln
(abs(1-y^2/a^2)))*sin(.5*(1/2-1/2*signum(1-y^2/a^2))*
Pi)/a, y = 2*a))*csgn(2*x*y-I*x^2+I*y^2-I*a^2)*(2*
(x^4+2*x^2*y^2+2*x^2*a^2+y^4-2*y^2*a^2+a^4)^(1/2)-2*
x^2+2*y^2-2*a^2)^(1/2):
phi := 1/2*abs(limit(y*exp(-.5*ln(abs(1-y^2/a^2)))*cos
(.5*(1/2-1/2*signum(1-y^2/a^2))*Pi)/a-I*y*exp(-.5*ln
(abs(1-y^2/a^2)))*sin(.5*(1/2-1/2*signum(1-y^2/a^2))*
Pi)/a, y = 2*a))*(2*(x^4+2*x^2*y^2+2*x^2*a^2+y^4-2*y^2*
a^2+a^4)^(1/2)+2*x^2-2*y^2+2*a^2)^(1/2):
for k from -N to N do
    if (cas=1) then p[k]:=implicitplot(psi=k,x=-10..10,y=
0..20,color=blue,'title'="Lignes de courant")
    elif (cas=2) then p[k]:=implicitplot(phi=k,x=-10..10,
y=0..20,color=red,'title'="Lignes equipotentielles")
    else
        p[k]:=implicitplot([psi=k,phi=k],x=-10..10,y=0..20,
color=[blue, red])
    end if:
od:

display(seq(p[k],k=-N..N));
end:

maplet3d := Maplet(Window( 'title'= "
Ecoulement autour d'une plaque vertical",'toolbar' =
ToolBar(ToolBarButton("Quitter", Shutdown()))),
[
    'background'="#CCFFCC" ,
    [ " Vitesse d'ecoulement q0 en [m / s] : ",
TextField['q01'](3,'value'= 1), "Longueur de la plaque
a en [m] :", TextField['a1'](3,'value'= 10)
,'background'="#FFFFCC"],
    Plotter['PL1']('height'=320),MathMLViewer
['MMLV1']('height'=100, 'width'=600),
    ['background'="#CCFFCC",Button("Lignes de courant",
foreground=blue,Action( Evaluate('PL1' = 'Affichage(1)
'),Evaluate('MMLV1'='psi = 1/2*q0*csgn(2*x*y-I*x^2+I*
y^2-I*a^2)*(2*(x^4+2*x^2*y^2+2*x^2*a^2+y^4-2*y^2*a^2+
a^4)^(1/2)-2*x^2+2*y^2-2*a^2)^(1/2)')) ), Button

```

```

("Lignes equipotentiellees",foreground=red,Action(
Evaluate('PL1' = 'Affichage(2)'),Evaluate('MMLV1'='phi =
1/2*q0*(2*(x^4+2*x^2*y^2+2*x^2*a^2+y^4-2*y^2*a^2+a^4)^
(1/2)+2*x^2-2*y^2+2*a^2)^(1/2)')) ),

        Button("Ensemble",Action( Evaluate('PL1' =
'Affichage(3)'),Evaluate('MMLV1'='f(z)=q[0] * sqrt (z^2
+ a^2)')) )
    ]
))) :
result := Maplets[Display](maplet3d):
        end if:

                                end:

                                maplet

:= Maplet( Window( 'title'= "choix type d'écoulement à
visualiser:",('height'=320,'width'=400,'toolbar' =
ToolBar(ToolBarButton("Quitter", Shutdown()))),

                                [TextField['TF3']('editable' = 'false' )
],

        BoxLayout('background'=turquoise,
        BoxColumn('halign'='left','valign'='none',
'background'=turquoise,
        BoxCell(Button("                                Ecoulement
Uniforme                                ", 'height'=30, 'width'=360,
foreground=blue, Evaluate('TF3'='myprog(2)') ) ),
        BoxCell(Button("                                Ecoulement de type
source                                ", 'height'=30, 'width'=360,
foreground=blue, Evaluate('TF3'='myprog(1)') ) ),

        BoxCell(Button("                                Ecoulement de type
puits                                ", 'height'=30, 'width'=360,
foreground=blue, Evaluate('TF3'='myprog(4)') ) ),

        BoxCell(Button("                                Ecoulement
tourbillonnaire                                ", 'height'=30, 'width'=360,
foreground=blue, Evaluate('TF3'='myprog(3)') ) ),
BoxCell(Button("                                Ecoulement  autour  d'un
angle                                ", 'height'=30, 'width'=360,
foreground=blue, Evaluate('TF3'='myprog(5)') ) ),BoxCell
(Button("Ecoulement autour d'une plaque verticale ",
foreground=blue, 'height'=30, 'width'=360, Evaluate
('TF3'='myprog(6)') ) ) )
    )
)

```

```

)):

  Maplets[Display](maplet):

elif (refe=2) then
    superpos:=proc(choix)
    local
Affichage,maplet3d,result;

    if(choix=1)then
        Affichage:=proc(cas)
        local alpha,qv,q0,k,p,psi,phi,N,xs,ys;
#####
#####
DE SUPERPOSITION
#####
##### DEMI SOLIDE DE RANKINE
#####
use Maplets[Tools] in
    q0:= Get( 'q01'::numeric );alpha:= Get(
'alpha1'::numeric );
    qv := Get( 'qv1'::numeric );xs:= Get(
'xs1'::numeric );
    ys:= Get( 'ys1'::numeric )
;
    end use;

N:=30;
psi:=q0*y*cos(alpha)-q0*x*sin(alpha)+qv/6.28*arctan(y-
ys, x-xs):
phi := q0*x*cos(alpha)+q0*y*sin(alpha)+qv/12.56*ln((x-
xs)^2+(y-ys)^2):

for k from -N to N do
    if (cas=1) then p[k]:=implicitplot([psi=k,psi=-15,
psi=15],x=-10..10,y=-10..10,color=[blue,green,green] ,
title="Lignes de courant")
    elif (cas=2) then p[k]:=implicitplot(phi=k,x=-10..10,
y=-10..10,color=red,title="Lignes equipotentielles")
    else
        p[k]:=implicitplot([psi=k,phi=k],x=-10..10,y=-10.
.10,color=[blue, red])
    end if:
od:

display(seq(p[k],k=-N..N));
end:

maplet3d :=
Maplet(Window( 'title'= " Demi solide de

```

```

RANKINE",'height'=600,'width'=600,'toolbar' = ToolBar
(ToolBarButton("Quitter", Shutdown())),
[
    'background'="#CCFFCC",
    [ 'background'="#CCFFCC", [Label( "Ecoulement
uniforme ", 'font' = Font( "times",bold, 16)
),'background'="#FFFFCC",[" Vitesse d'écoulement q0 en
[m/s] : ", TextField['q01'](3,'value'=1)],["Angle
d'incidence alpha en [°] :
", TextField
['alpha1'](3,'value'=0)], [Label( "Source", 'font' =
Font( "times",bold, 16)), 'background'="#FFFFCC",["Débit
volumique qv en [m^2/s] :", TextField['qv1'](3,'value'=
30)],["xs en [m] :
",
TextField['xs1'](3,'value'=0)], ["ys en [m]:
", TextField['ys1'](3,'value'=0)] ]
],
    Plotter['PL1']('height'=280),
    [ 'background'="#CCFFCC",Button("Lignes de
courant",foreground=blue, Evaluate('PL1' =
'Affichage(1)') ), Button("Lignes équipotentiellles",
foreground=red, Evaluate('PL1' = 'Affichage(2)') ),

        Button("Ensemble", Evaluate('PL1' = 'Affichage(3)
') )
    ]
])):
result := Maplets[Display](maplet3d):
        elif (choix=2)then Affichage:=proc(cas)
    local qvs,k,p,psi,phi,N,xs,ys,qvp,xp,yp,q0,alpha;
    ###          SOLIDE DE RANKINE
    #####
    use Maplets[Tools] in
        xs:= Get( 'xs1'::numeric );  ys:= Get(
'ys1'::numeric );
        qvs := Get( 'qvs1'::numeric );      xp:= Get(
'xp1'::numeric ); yp:= Get( 'yp1'::numeric );q0:= Get(
'q01'::numeric ); alpha:= Get( 'alpha1'::numeric );
qvp:= Get( 'qvp1'::numeric )
    end use;

    N:=30;
    psi := 1/6.28*qvs*arctan(y-ys, x-xs)-1/6.28*qvp*arctan
(y-yp, x-xp)+q0*y*cos(alpha*3.14/180)-q0*x*sin(alpha*
3.14/180):

        phi := 1/12.56*qvs*ln((x-xs)^2+
(y-ys)^2)-1/12.56*qvp*ln((x-xp)^2+(y-yp)^2)+q0*x*cos
(alpha*3.14/180)+q0*y*sin(alpha*3.14/180):
    for k from -N to N do

```

```

    if (cas=1) then p[k]:=implicitplot(psi=k,x=-10..10,y=
-10..10,color=blue, title="lignes de courant")
    elif (cas=2) then p[k]:=implicitplot(phi=k,x=-10..10,
y=-10..10,color=red, title="lignes equipotentielles")
    else
        p[k]:=implicitplot([psi=k,phi=k],x=-10..10,y=-10.
.10,color=[blue, red])
    end if:
od:display(seq(p[k],k=-N..N));

                                end:  maplet3d := Maplet
(Window( 'title'= " Solide de RANKINE",'toolbar' =
ToolBar(ToolBarButton("Quitter", Shutdown()))),
['background'="#CCFFCC",
[ 'background'="#CCFFCC",[Label( "Source", 'font' =
Font( "times",bold, 16)), 'background'="#FFFFCC",["Débit
volumique en [m^2/s]:",TextField['qvs1'](3,'value'=30)
], ["xs en [m] :                                ", TextField
['xs1'](3,'value'=-2)],["ys en [m] :
        ", TextField['ys1'](3,'value'=0)]],[Label(
"Puits", 'font' = Font( "times",bold, 16)), 'background'=
"#FFFFCC",["Débit volumique en [m^2/s]:", TextField
['qvp1'](3,'value'=30)],["xp en [m] :
        ", TextField['xp1'](3,'value'=2)],["yp en [m] :
        ", TextField['yp1'](3,'value'=
0)]],[Label( "Ecoulement uniforme ", 'font' = Font(
"times",bold, 16)), 'background'="#FFFFCC",["Angle
d'incidence alpha en [°] :                                ", TextField
['alpha1'](3,'value'=0)],[" Vitesse D'écoulement q0
en [m/s] :", TextField['q01'](3,'value'=1)]]],
    Plotter['PL1']('height'=280),
    [ 'background'="#CCFFCC", Button("Lignes de
courant",foreground=blue, Evaluate('PL1' =
'Affichage(1)') ), Button("Lignes équipotentielles",
foreground=red, Evaluate('PL1' = 'Affichage(2)') ),

        Button("Ensemble", Evaluate('PL1' = 'Affichage(3)
') )
    ]
))] :
result := Maplets[Display](maplet3d):
        elif (choix=3) then Affichage:=proc(cas)
    local qv,k,p,psi,phi,N,xd,yd,alpha;
    ###                                DOUBLET
#####
use Maplets[Tools] in
        xd := Get( 'xd1':numeric );  yd:= Get(
'yd1':numeric );

```

```

        qv := Get( 'qv1'::numeric ); alpha:= Get(
'alpha1'::numeric );
    end use;

N:=30;

        psi := -qv^2*sin(-alpha*3.14/180)*(x-xd)/
((x-xd)^2+(y-yd)^2)-qv^2*cos(-alpha*3.14/180)*(y-yd)/((
(x-xd)^2+(y-yd)^2):
        phi := qv^2*cos(-alpha*3.14/180)*(x-
xd)/((x-xd)^2+(y-yd)^2)-qv^2*sin(-alpha*3.14/180)*(y-
yd)/((x-xd)^2+(y-yd)^2):
for k from -N to N do
    if (cas=1) then p[k]:=implicitplot(psi=k,x=-10..10,y=
-10..10,color=blue,'title'="Lignes de courant" )
    elif (cas=2) then p[k]:=implicitplot(phi=k,x=-10..10,
y=-10..10,color=red,'title'="Lignes equipotentiellles")
    else
        p[k]:=implicitplot([psi=k,phi=k],x=-10..10,y=-10.
.10,color=[blue, red])
    end if:
od:

display(seq(p[k],k=-N..N));

end:    maplet3d := Maplet(Window( 'title'= "
Doublet",'height'=600,'width'=600,'toolbar' = ToolBar
(ToolBarButton("Quitter", Shutdown()))),
[ 'background'="#CCFFCC",[ "(xd,yd) : Coordonnées de
doublet",'background'="#FFFFCC"],

    [ 'background'="#CCFFCC", [{"Débit volumique qv en
[m^2 / s]:", TextField['qv1'](3,'value'=5)],["alpha en
[°]:", TextField['alpha1'](3,
'value'=0)],'background'="#FFFFCC"], [{"xd en [m] :",
TextField['xd1'](3,'value'=0)],["yd en [m]:", TextField
['yd1'](3,'value'=0)],'background'="#FFFFCC"]],
    Plotter['PL1']('height'=320),
    [ 'background'="#CCFFCC",Button("Lignes de
courant",foreground=blue, Evaluate('PL1' =
'Affichage(1)') ), Button("Lignes équipotentiellles",
foreground=red, Evaluate('PL1' = 'Affichage(2)') ),

        Button("Ensemble", Evaluate('PL1' = 'Affichage(3)
') )
    ]
])):
result := Maplets[Display](maplet3d):

```

```

                                elif (choix=4) then Affichage:=
proc(cas)
  local Gamma,qv,k,p,psi,phi,N,xs,xv,ys,yv;
  ###      SUPERPOSITION D'UNE SOURCE ET D'UN VORTEXE
  #####
use Maplets[Tools] in
  Gamma:= Get( 'Gammal':numeric ); xs:= Get(
'xs1':numeric ); xv:= Get( 'xv1':numeric ); ys:= Get(
'ys1':numeric );
          qv := Get( 'qv1':numeric );   yv:= Get(
'yv1':numeric );
  end use;

N:=30;
psi := -1/12.56*Gamma*ln((x-xv)^2+(y-yv)^2)+1/6.28*qv*
arctan(y-ys, x-xs):
                                phi :=
1/6.28*Gamma*arctan(y-yv, x-xv)+1/12.56*qv*ln((x-xs)^2+
(y-ys)^2):
for k from -N to N do
  if (cas=1) then p[k]:=implicitplot(psi=k,x=-10..10,y=
-10..10,color=blue, title="Lignes de courant")
  elif (cas=2) then p[k]:=implicitplot(phi=k,x=-10..10,
y=-10..10,color=red, title="Lignes equipotentielles")
  else
    p[k]:=implicitplot([psi=k,phi=k],x=-10..10,y=-10.
.10,color=[blue, red])
  end if:
od:display(seq(p[k],k=-N..N));

end: maplet3d := Maplet(Window( 'title'= "
Superposition d'une source et un vortex",'toolbar' =
ToolBar(ToolBarButton("Quitter", Shutdown()))),
[ 'background'="#CCFFCC",
  [ 'background'="#CCFFCC",[ Label( "Source", 'font' =
Font( "times",bold, 16)), 'background'="#FFFFCC",
["Débit volumique en [m^2/s]:",TextField['qv1'](3,
'value'=15)], ["Xs en [m] :                                ",
TextField['xs1'](3,'value'=0)],[" Ys en [m] :
", TextField['ys1'](3,'value'=0)]]],[Label
( "Vortex", 'font' = Font( "times",bold, 16)),
'background'="#FFFFCC",[" Circulation Gamma en [m^2 /
s]:", TextField['Gammal'](3,'value'=15)],["Xv en [m] :
", TextField['xv1']
(3,'value'=0)],["Yv en [m] :
", TextField['yv1'](3,'value'=0)]]],
  Plotter['PL1']('height'=280),

```

```

[ 'background'="#CCFFCC",
  Button("Lignes de courant",foreground=blue,
Evaluate('PL1' = 'Affichage(1)') ), Button("Lignes
équipotentiellles",foreground=red, Evaluate('PL1' =
'Affichage(2)') ),
  Button("Ensemble", Evaluate('PL1' = 'Affichage(3)
') )
]
))) :
result := Maplets[Display](maplet3d):
end if: end:maplet := Maplet( Window('height'=220,
'width'=420,( 'title'= " Exemples de superposition des
écoulements élémentaires:",'toolbar' = ToolBar
(ToolBarButton("Quitter", Shutdown()))),

[TextField['TF3']('editable' = 'false' )
],

BoxLayout('background'="#FFE7FD",
  BoxColumn('halign'='left','valign'='none',
'background'="#FFE7FD",
  BoxCell(Button("          Demi solide de
RANKINE          ", 'height'=30, 'width'=360,
foreground="#990099", Evaluate('TF3'='superpos(1)') )),
  BoxCell(Button("          Solide de RANKINE
          ", 'height'=30, 'width'=360, foreground=
"#990099", Evaluate('TF3'='superpos(2)') )),

  BoxCell(Button("          Ecoulement de type
doublet          ", 'height'=30, 'width'=360, foreground=
"#990099", Evaluate('TF3'='superpos(3)') )),

  BoxCell(Button("Superposition d'une source et
d'un vortex ", 'height'=30, 'width'=360, foreground=
"#990099", Evaluate('TF3'='superpos(4)'))))
))
):

Maplets[Display](maplet):
  elif (refe=3) then
    Affichage:=proc(cas)
      local Gamma,qvs,k,p,psi,phi,N,xs,xv,ys,yv,qvp,xp,yp,
q0,alpha;
#####
#####

```



```

PROCEDURE DE SUPERPOSITION #####
#####
#####
use Maplets[Tools] in
    Gamma:= Get( 'Gammal':numeric ); xs:= Get(
'xs1':numeric ); xv:= Get( 'xv1':numeric ); ys:= Get(
'ys1':numeric );
    qvs := Get( 'qvs1':numeric ); yv:= Get(
'yv1':numeric ); xp:= Get( 'xp1':numeric ); yp:=
Get( 'yp1':numeric ); q0:= Get( 'q01':numeric );
alpha:= Get( 'alpha1':numeric ); qvp:= Get(
'qvp1':numeric )
end use;

N:=30;
psi := 1/6.28*qvs*arctan(y-ys, x-xs)-1/6.28*qvp*arctan
(y-yp, x-xp)+q0*y*cos(alpha*3.14/180)-q0*x*sin(alpha*
3.14/180)-1/12.56*Gamma*ln((x-xv)^2+(y-yv)^2):

    phi := 1/12.56*qvs*ln((x-xs)^2+(y-ys)^2)-1/12.56*
qvp*ln((x-xp)^2+(y-yp)^2)+q0*x*cos(alpha*3.14/180)+q0*
y*sin(alpha*3.14/180)+1/6.28*Gamma*arctan(y-yv, x-xv):
for k from -N to N do
    if (cas=1) then p[k]:=implicitplot(psi=k,x=-10..10,y=
-10..10,color=blue, title="lignes de courant")
    elif (cas=2) then p[k]:=implicitplot(phi=k,x=-10..10,
y=-10..10,color=red, title="lignes equipotentiellles")
    else
        p[k]:=implicitplot([psi=k,phi=k],x=-10..10,y=-10.
.10,color=[blue, red])
    end if:
od:

display(seq(p[k],k=-N..N));

end:      maplet3d := Maplet(Window( 'title'= "
Superposition des écoulements élémentaires
",'toolbar' = ToolBar(ToolBarButton("Quitter", Shutdown
())),
[ 'background'="#CCFFCC",
    [ 'background'="#CCFFCC",[Label( "Source", 'font' =
Font( "times",bold, 16)), 'background'="#FFFFCC",
[ 'background'="#FFFFCC","Débit volumique en [m^2/s]:" ,
TextField['qvs1'](3,'value'=20)], ["xs en [m] :
", 'background'="#FFFFCC",TextField
['xs1'](3,'value'=-2)],["ys en [m] :
", 'background'="#FFFFCC", TextField['ys1'](3,

```

```

'value'=0)],[Label( "Vortex", 'font' = Font( "times",
bold, 16)), 'background'="#FFFFCC",["Circulation en
[m^2/s]:", 'background'="#FFFFCC", TextField['Gamma1'](3,
'value'=10)], ["xv en [m]:
", 'background'="#FFFFCC", TextField['xv1'](3, 'value'=0)
],["yv en [m] :
", 'background'="#FFFFCC", TextField['yv1'](3, 'value'=5)],[Label(
"Puits", 'font' = Font( "times", bold, 16)
), 'background'="#FFFFCC", ["Débit volumique en [m^2/s]
:", 'background'="#FFFFCC", TextField['qvp1'](3, 'value'=
20)], ["xp en [m] :
", 'background'="#FFFFCC", TextField['xp1'](3, 'value'=2)
], ["yp en [m] :
", 'background'="#FFFFCC", TextField['yp1'](3, 'value'=0)],[Label(
"Écoulement uniforme", 'font' = Font( "times", bold, 16)
), 'background'="#FFFFCC", ["Angle d'incidence alpha en
[°] : ", 'background'="#FFFFCC", TextField['alpha1'](3,
'value'=0)], [" Vitesse q0 en [m/s] :", 'background'="#FFFFCC", TextField['q01'](3, 'value'=1)]]],
    Plotter['PL1']('height'=280),
    [ 'background'="#CCFFCC", Button("Lignes de
courant", foreground=blue, Evaluate('PL1' =
'Affichage(1)')) ), Button("Lignes équipotentiellles",
foreground=red, Evaluate('PL1' = 'Affichage(2)')) ),

        Button("Ensemble", Evaluate('PL1' = 'Affichage(3)
') )
    ]
)):
result := Maplets[Display](maplet3d):

end

if:end:
> maplet := Maplet( Window('height'=190, 'width'=
400, ('toolbar' = ToolBar(ToolBarButton("Quitter",
Shutdown()))),

        [TextField['TF3']('editable' = 'false' )
],

    BoxLayout('background'="#DCFAE0",
        BoxColumn('halign'='left', 'valign'='none',
'background'="#DCFAE0",
            BoxCell(Button("
                                Écoulements
élémentaires
                                ", 'height'=30, 'width'=
360, foreground="#0B4B1C", Evaluate('TF3'='reference(1)'))
), BoxCell(Button(" Superposition des écoulements
élémentaires
                                ", 'height'=30, 'width'=360,
foreground="#0B4B1C", Evaluate('TF3'='reference(3)')) )),

```

```

BoxCell(Button("
superposition
360,foreground="#0B4B1C",Evaluate('TF3'='reference(2)')
))

))
)

)):

Maplets[Display](maplet):

```

