République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère De I’ Enseignement Supérieure Et De la Recherche Scientifique
Université Hadj Lakhdar Batna
Département Mécanique
Spécialité Energetique

Mini projet sur :

La résolution de l'equation de Laplace en 2 D

Réaliser par :

* GAIRAA MOHAMMED
* FOURAR ISSAM

Proposé par :

* Dr LAID MESSAOUDI

Année universsaire : 2013/2014

Table des matiéres :

1. Introduction 1
2. Définition de l'équation aux dérivées partielles EDP 1
3. Résolution de l'équation de Laplace 1
 3.1. Méthode numérique..1
  3.1.1. Méthode des différences finis (MDF)...........................1
  3.1.2. Discrétisation par la formule à 5 points 2
  3.1.3. Méthode d'ordre élevé 2
 3.2. Méthodes Analytiques 2
  3.2.1. Méthode de séparation des variables (MSV) 3
  3.2.2. Equation de Laplace en coordonées rectangulaires 3
4 Solution avec Maple 4
 4.1 Solution avec β=1 4
  4.1.1 Données 4
  4.1.2 Maillage 4
  4.1.3 Discrétisation par la formule à 5 points............................5
  4.1.4 Discrétisation par la formule à 9 points............................5
  4.1.5 Méthode analytique..6
  4.1.6 Tableaux de comparésent..6
  4.1.7 Commentaire 7
 4.2 Solution avec β≠1 7
  4.2.1 Données 7
  4.2.2 Maillage 8
  4.2.3 Discrétisation par la formule à 5 points............................8
  4.2.4 Discrétisation par la formule à 9 points............................9
  4.2.5 Méthode analytique..9
  4.2.6 Tableaux de comparésent..10
  4.2.7 Commentaire 11
 4.3 Graphe 11
5 Conclution...12

EQUATION DE LAPLACE :

1 Introduction :

Les scientifiques et les ingénieurs utilisent plusieurs techniques pour la résolution des problèmes des champs (diffusion de la chaleur, propagation d'ondes...etc).Ces techniques peuvent être expérimentales, analytiques ou numériques.
Les méthodes expérimentales sont très chères, prennent beaucoup de temps et dans certains cas, elles sont hasardeuses et même dangereuses. Elles ne permettent pas souvent une grande flexibilité des paramètres de variation.
La plupart des méthodes analytiques ne s'appliquent que dans des cas limités. Pour des problèmes relatifs à des systèmes de forme géométrique complexe ou à des milieux à caractéristiques non uniformes ou non isotropes, qui est le cas de la plupart des problèmes rencontrés en pratique, il est nécessaire de faire appel aux méthodes numériques.
Les problèmes rencontrés dans le domaine des sciences de l'ingénieur sont souvent représentés (ou modélisés) par des équations aux dérivées partielles (EDP) qui modélisent les phénomènes physiques présents (écoulement de fluides, transfert de chaleur, vibration des structures, propagation d'ondes, champ électromagnétique...etc.)

2 Définition de l'équation aux dérivées partielles EDP :

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation faisant intervenir une fonction inconnue de plusieurs variables ainsi que certaines de ses dérivées partielles.

3 Résolution de l'équation de Laplace :

Dans le domaine de l'énergétique, l'équation de Laplace est souvent rencontrée en mécanique des fluides dans les écoulements potentiels (irrationnels) et en transfert thermique dans la conduction dans un solide par exemple.

3.1 Méthode numérique:

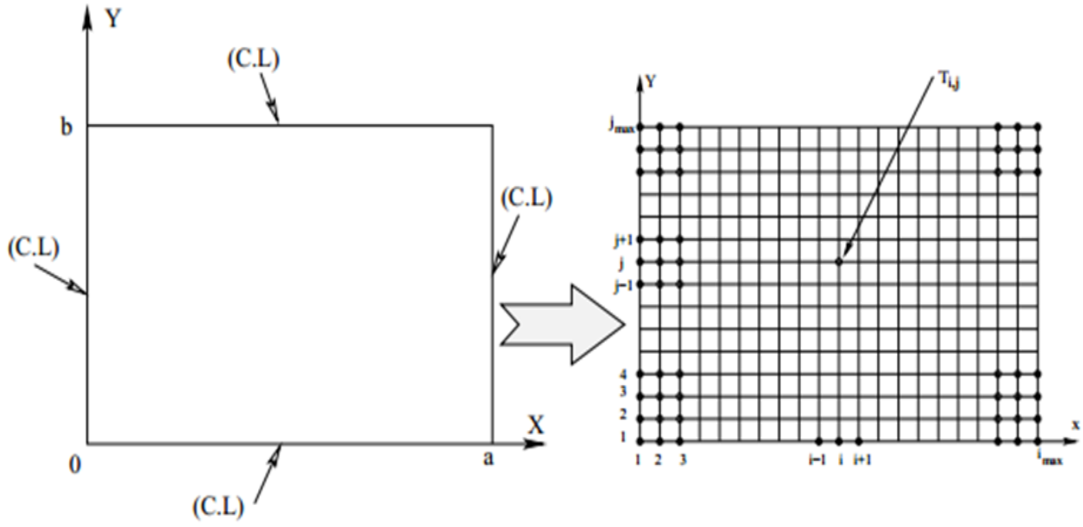
En général, les méthodes numériques donnent une solution approximative avec une précision suffisante pour les problèmes rencontrés en pratique.
Parmi les méthode exister en utiliser la méthode des différences finis (MDF).

3.1.1. Méthode des différences finis (MDF):

L'objectif de cette méthode est de transformer une équation continue valable sur un domaine continu en un système à N équations à N inconnues associées à un domaine discret appelé maillage.
Soit un problème régis par l'équation de Laplace et modélisant le transfert thermique à travers une plaque rectangulaire. Cette équation s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

Nous passons du domaine continu au domaine discret en divisant le premier en un ensemble de mailles aussi petites que l'on peut.



Domaine continu Domaine discrétisé

3.1.2. Discrétisation par la formule à 5 points :

L'équation (1) est discrétisée par le schéma centré d'ordre 2 en espace O ($\Delta x^2+\Delta y^2$) de la manière suivante :

$$\frac{T_{i-1,j} - 2\,T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2\,T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

On posant: $\beta = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ nous pouvons calculer les températures nodales par :

$$-2\left(\beta^2+1\right)T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + \beta^2\,T_{i,j-1} + \beta^2\,T_{i,j+1} = 0$$

3.1.3. Méthode d'ordre élevé :

Parmi les méthodes d’ordre élevé, on distingue principalement la formulation à 9 points précise au second ordre O ($\Delta x^2+ \Delta y^2$) :

$$T_{i-1,j-1} + T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j+1} + T_{i+1,j+1} + \frac{2\left(-\beta^2+5\right)\left(T_{i-1,j} + T_{i+1,j}\right)}{\beta^2+1}$$
$$+ \frac{2\left(5\,\beta^2-1\right)\left(T_{i,j-1} + T_{i,j+1}\right)}{\beta^2+1} - 20\,T_{i,j} = 0$$

3.2. Méthodes Analytiques :

La solution la plus satisfaisante d'un problème de champ est certainement la solution mathématique exacte. Cependant, dans beaucoup de cas pratiques, cette solution analytique ne peut être obtenue et on a alors recours aux méthodes numériques qui sont approximatives. La solution analytique, si elle existe, est intéressante afin de s'assurer de la solution obtenue numériquement.
Parmi les méthode exister en utiliser la méthode de séparation des variables (MSV).

3.2.1. Méthode de séparation des variables (MSV) :

Le principe de cette méthode est de chercher les solutions d'une EDP sous la forme :

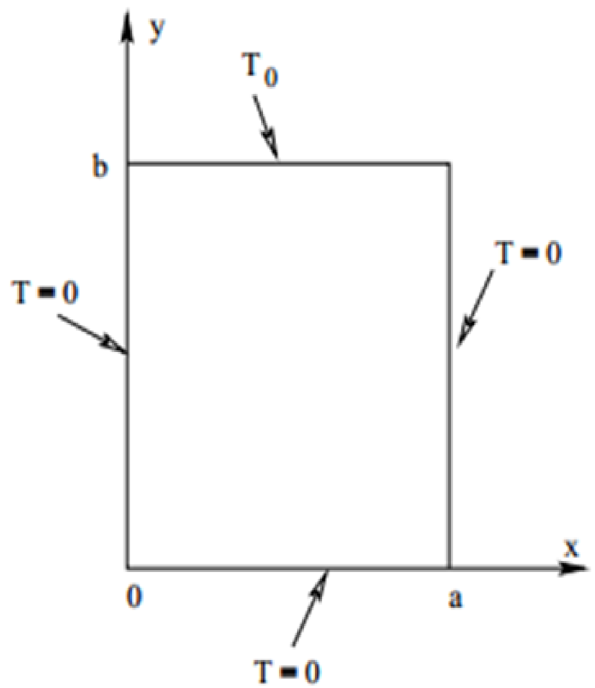
$$\phi\,(x, y, z, t) = X\,(x).Y\,(y).Z\,(z).T\,(t)$$

3.2.2. Equation de Laplace en coordonées rectangulaires :

Soit une plaque retangulaire soumise à des températures constantes comme il est indiqué sur la figure :

$$\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 \le x \le a\ ,\ 0 \le y \le b$$

$$\{\ T(0,y) = 0 \quad , \quad T(x,0) = 0$$
$$\{\ T(a,y) = 0 \quad , \quad T(x,0) = T0$$



Appliquons maintenant la MSV :

$$T(x, y) = \frac{4 \cdot T0}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sinh\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi}{a} \cdot y\right)}{(2 \cdot k - 1) \cdot \sinh\left(\frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi}{a} \cdot b\right)}$$

avec : n = 2 k - 1 , k = 1 , 2 , ... ∞.

4 Solution avec Maple :

> $interface(displayprecision = 3)$:

4.1 Solution avec β=1 :

Pour obtenir **β=1** il faut que **Δx=Δy** si ta dire **a=dx** et **b=dy**.

4.1.1 Données :

```
> restart
> T0 := 100 :
> a := 4 :
> b := 3 :
> n := 50 :
> dx := a :
> dy := b :
> Nx := dx + 1 :
> Ny := dy + 1 :
```

> $\Delta x := \frac{a}{dx}$

$$\Delta x := 1 \tag{1}$$

> $\Delta y := \frac{b}{dy}$

$$\Delta y := 1 \tag{2}$$

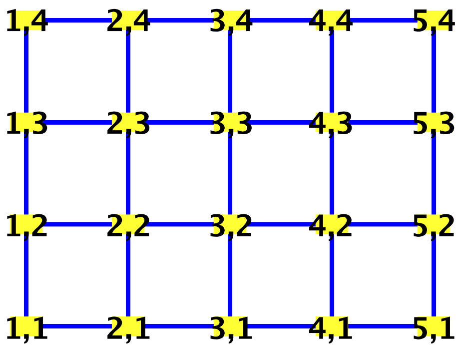
```
> N := (Nx − 2)·(Ny − 2) :
> Th := T0 :
> Tb := 0 :
> Td := 0 :
> Tg := 0 :
> imax := Nx :
> jmax := Ny :
```

> $\beta := \frac{\Delta x}{\Delta y}$

$$\beta := 1 \tag{3}$$

4.1.2 Maillage :

```
> with(GraphTheory) : with(SpecialGraphs) :
> G := GridGraph(Nx, Ny) : DrawGraph(G)
```



4.1.3 Discrétisation par la formule à 5 points (avec la méthode des procedure):

```
> SolutionA5point := proc( Th, Tb, Td, Tg, a, b, Nx, Ny, β, imax, jmax, N)
local k, T, x, y, sol1, i, j, Eq, var, sys, e;
for i from 2 to imax − 1 do T[i, 1] := Tb end do;
for i from 2 to imax − 1 do T[i, jmax] := Th end do;
for j from 2 to jmax − 1 do T[1, j] := Tg end do;
for j from 2 to jmax − 1 do T[imax, j] := Td end do;
e := 1 ;
for j from 2 to jmax − 1 do
    for i from 2 to imax − 1 do
Eq[e] := -2·(1 + β^2)·T[i, j] + T[i − 1, j] + T[i + 1, j] + β^2·T[i, j − 1] + β^2·T[i, j + 1] = 0 :
e := e + 1
    end do
end do;
sys := [seq(Eq[k], k = 1 ..N) ];
var := [seq(seq(T[i, j], i = 2 ..imax − 1), j = 2 ..jmax − 1) ];
sol1 := evalf(solve(sys, var) );
sol1 := convert(sol1[1], list);
sol1 := [seq(rhs(sol1[u]), u = 1 ..N) ];
end proc:
> sol1 := SolutionA5point(T0, Tb, Td, Tg, a, b, Nx, Ny, β, imax, jmax, N)
```

$$sol1 := [15.528, 20.497, 15.528, 41.615, 50.932, 41.615] \quad (4)$$

4.1.4 Discrétisation par la formule à 9 points (avec la méthode des procedure):

```
> SolutionA9point := proc( Th, Tb, Td, Tg, a, b, Nx, Ny, β, imax, jmax, N)
 local k, T, x, y, sol2, i, j, Eq, var, sys, e;
  for i from 2 to imax − 1 do T[i, 1] := Tb end do;
 for i from 2 to imax − 1 do T[i, jmax] := Th end do;
 for j from 2 to jmax − 1 do T[1, j] := Tg end do;
 for j from 2 to jmax − 1 do T[imax, j] := Td end do;
T[1, 1] := (Tg + Tb)/2;
T[imax, 1] := (Td + Tb)/2;
T[1, jmax] := (Tg + Th)/2;
T[imax, jmax] := (Th + Td)/2;
e := 1 ;
for j from 2 to jmax − 1 do
 for i from 2 to imax − 1 do
Eq[e] := T[i − 1, j − 1] + T[i + 1, j − 1] + T[i − 1, j + 1] + T[i + 1, j + 1] + (2·(5 − β^2))/(1 + β^2)
    ·(T[i − 1, j] + T[i + 1, j]) + (2·(5·β^2 − 1))/(1 + β^2)·(T[i, j − 1] + T[i, j + 1]) − 20·T[i, j] = 0 :
 e := e + 1
 end do
 end do;
sys := [seq(Eq[k], k = 1 ..N) ];
```

```
var := [seq(seq(T[i, j], i = 2 ..imax − 1), j = 2 ..jmax − 1)];
sol2 := evalf(solve(sys, var));
sol2 := convert(sol2[1], list);
sol2 := [seq(rhs(sol2[u]), u = 1 ..N)];
end proc:
```

```
> sol2 := SolutionA9point(T0, Tb, Td, Tg, a, b, Nx, Ny, β, imax, jmax, N)
```

$$sol2 := [15.200, 20.790, 15.200, 42.082, 52.511, 42.082] \tag{5}$$

4.1.5 Méthode analytique (avec la méthode des procedure):

```
> SolutionAnalytique := proc(a, b, T0 , n, Nx, Ny)
local k, x, y;
```

$$\left[\mathrm{evalf}\left(\mathrm{seq}\left(\mathrm{seq}\left(\frac{4\cdot T0}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{(2\cdot k-1)\cdot\pi}{a}\cdot x\right)\cdot\sinh\left(\frac{(2\cdot k-1)\cdot\pi}{a}\cdot y\right)}{(2\cdot k-1)\cdot\sinh\left(\frac{(2\cdot k-1)\cdot\pi}{a}\cdot b\right)}\right), x=1..Nx-2\right), y=1..Ny-2\right)\right)\right];$$

```
end proc:
> sol3 := SolutionAnalytique(a, b, T0, n, Nx, Ny)
```

$$sol3 := [15.219, 20.788, 15.219, 42.077, 52.462, 42.077] \tag{6}$$

4.1.6 Tableaux de comparésent :

les tableaux de comparésent entre la méthode analytique et la méthode numérique (5 points et 9 points)

***Methode 1 (Maplet):**

```
> with(Maplets[Elements]) :
> maplet := Maplet([BoxCell(Table([Température, Cinq, neuf, Analytique, Ana/Cinq, Ana/neuf],
    [seq([[seq(seq(T[x, y], x = 2 ..Nx − 1), y = 2 ..Ny − 1)]_f, sol1[f], sol2[f], sol3[f],
    abs(sol1[f]·100/sol3[f] - 100), abs(sol2[f]·100/sol3[f] − 100)], f = 1 ..N)]), 'as_needed'),
    Button("OK", Shutdown())]) :
> Maplets[Display](maplet)
```

***Method 2 (normal):**

	5 points	9 points	Analytique	Comparésent Ana à 5 pts	Comparésent Ana à 9 pts
T_{22}	sol1[1] 15.528	sol2[1] 15.200	sol3[1] 15.219	$\mathrm{abs}\left(\frac{sol1[2]\cdot 100}{sol3[2]} - 100\right)$ 1.399	$\mathrm{abs}\left(\frac{sol2[1]\cdot 100}{sol3[1]} - 100\right)$ 0.129

T_{32}	sol1[2] 20.497	sol2[2] 20.790	sol3[2] 20.788	$abs\left(\frac{sol1[2]\cdot 100}{sol3[2]} - 100\right)$ 1.399	$abs\left(\frac{sol2[2]\cdot 100}{sol3[2]} - 100\right)$ 0.012
T_{42}	sol1[3] 15.528	sol2[3] 15.200	sol3[3] 15.219	$abs\left(\frac{sol1[3]\cdot 100}{sol3[3]} - 100\right)$ 2.027	$abs\left(\frac{sol2[3]\cdot 100}{sol3[3]} - 100\right)$ 0.129
T_{23}	sol1[4] 41.615	sol2[4] 42.082	sol3[4] 42.077	$abs\left(\frac{sol1[4]\cdot 100}{sol3[4]} - 100\right)$ 1.099	$abs\left(\frac{sol2[4]\cdot 100}{sol3[4]} - 100\right)$ 0.010
T_{33}	sol1[5] 50.932	sol2[5] 52.511	sol3[5] 52.462	$abs\left(\frac{sol1[5]\cdot 100}{sol3[5]} - 100\right)$ 2.917	$abs\left(\frac{sol2[5]\cdot 100}{sol3[5]} - 100\right)$ 0.093
T_{43}	sol1[6] 41.615	sol2[6] 42.082	sol3[6] 42.077	$abs\left(\frac{sol1[6]\cdot 100}{sol3[6]} - 100\right)$ 1.099	$abs\left(\frac{sol2[6]\cdot 100}{sol3[6]} - 100\right)$ 0.010

Tableau de comparaison

4.1.7 Commentaire :

Quand nous prenons $\beta = 1$ la solution avec la méthode numérique est a peut prés la méme que la solution avec la méthode analytique .

4.2 Solution avec $\beta \neq 1$:

Pour obtenir $\boldsymbol{\beta \neq 1}$ il faut que $\boldsymbol{\Delta x \neq \Delta y}$ si ta dire **a≠dx** et/ou **b≠dy**.

4.2.1 Données :

```
> restart
> T0 := 100 :
> a := 4 :
> b := 3 :
> n := 50 :
> dx := 3 :
> dy := 4 :
> Nx := dx + 1 :
> Ny := dy + 1 :
```

> $\Delta x := \frac{a}{dx}$

$$\Delta x := \frac{4}{3} \tag{7}$$

> $\Delta y := \frac{b}{dy}$

(8)

$$\Delta y := \frac{3}{4} \quad (8)$$

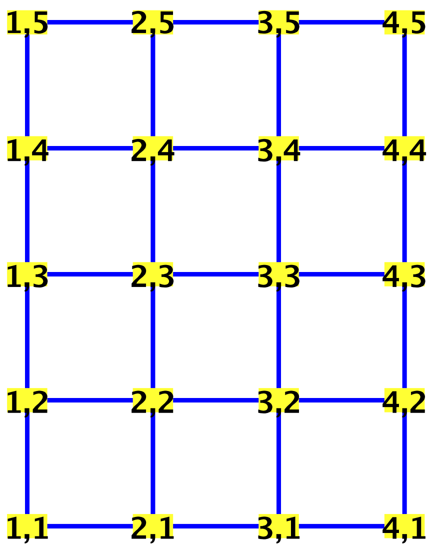
```
> N := (Nx - 2)·(Ny - 2) :
> Th := T0 :
> Tb := 0 :
> Td := 0 :
> Tg := 0 :
> imax := Nx :
> jmax := Ny :
```

> $\beta := \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$

$$\beta := \frac{16}{9} \quad (9)$$

4.2.2 Maillage :

```
> with(GraphTheory) : with(SpecialGraphs) :
> G := GridGraph(Nx, Ny) : DrawGraph(G)
```



4.2.3 Discrétisation par la formule à 5 points (avec la méthode des procedure):

```
> SolutionA5point := proc( Th, Tb, Td, Tg, a, b, Nx, Ny, β, imax, jmax, N)
  local k, T, x, y, sol1, i, j, Eq, var, sys, e;
  for i from 2 to imax - 1 do T[i, 1] := Tb end do;
  for i from 2 to imax - 1 do T[i, jmax] := Th end do;
  for j from 2 to jmax - 1 do T[1, j] := Tg end do;
  for j from 2 to jmax - 1 do T[imax, j] := Td end do;
  e := 1 ;
  for j from 2 to jmax - 1 do
     for i from 2 to imax - 1 do
  Eq[e] := -2·(1 + β^2)·T[i, j] + T[i - 1, j] + T[i + 1, j] + β^2·T[i, j - 1] + β^2·T[i, j + 1] = 0 :
  e := e + 1
     end do
```

```
end do;
sys := [seq(Eq[k], k = 1 ..N) ];
var := [seq(seq(T[i, j], i = 2 ..imax - 1 ), j = 2 ..jmax - 1 ) ];
sol1 := evalf(solve(sys, var) );
sol1 := convert(sol1[1], list);
sol1 := [seq(rhs(sol1[u]), u = 1 ..N) ];
end proc:
> sol1 := SolutionA5point(T0, Tb, Td, Tg, a, b, Nx, Ny, β, imax, jmax, N)
```

$$sol1 := [12.826, 12.826, 29.711, 29.711, 55.997, 55.997] \quad (10)$$

4.2.4 Discrétisation par la formule à 9 points (avec la méthode des procedure):

```
> SolutionA9point := proc( Th, Tb, Td, Tg, a, b, Nx, Ny, β, imax, jmax, N)
 local k, T, x, y, sol2, i, j, Eq, var, sys, e;
 for i from 2 to imax - 1 do T[i, 1] := Tb end do;
 for i from 2 to imax - 1 do T[i, jmax] := Th end do;
 for j from 2 to jmax - 1 do T[1, j] := Tg end do;
 for j from 2 to jmax - 1 do T[imax, j] := Td end do;
```

$$T[1,1] := \frac{(Tg+Tb)}{2};$$

$$T[imax,1] := \frac{(Td+Tb)}{2};$$

$$T[1,jmax] := \frac{(Tg+Th)}{2};$$

$$T[imax,jmax] := \frac{(Th+Td)}{2};$$

```
e := 1 ;
for j from 2 to jmax - 1 do
 for i from 2 to imax - 1 do
```

$$Eq[e] := T[i-1,j-1] + T[i+1,j-1] + T[i-1,j+1] + T[i+1,j+1] + \frac{2\cdot(5-\beta^2)}{1+\beta^2} \cdot (T[i-1,j] + T[i+1,j]) + \frac{2\cdot(5\cdot\beta^2-1)}{1+\beta^2} \cdot (T[i,j-1] + T[i,j+1]) - 20\cdot T[i,j] = 0 :$$

```
 e := e + 1
 end do
 end do;
sys := [seq(Eq[k], k = 1 ..N) ];
var := [seq(seq(T[i, j], i = 2 ..imax - 1 ), j = 2 ..jmax - 1 ) ];
sol2 := evalf(solve(sys, var) );
sol2 := convert(sol2[1], list);
sol2 := [seq(rhs(sol2[u]), u = 1 ..N) ];
 end proc:
> sol2 := SolutionA9point(T0, Tb, Td, Tg, a, b, Nx, Ny, β, imax, jmax, N)
```

$$sol2 := [12.704, 12.704, 29.922, 29.922, 57.775, 57.775] \quad (11)$$

4.2.5 Méthode analytique (avec la méthode des procedure):

```
> SolutionAnalytique := proc(a, b, T0 , n, Nx, Ny)
 local k, x, y;
```

$$\left[\text{evalf}\left(\text{seq}\left(\text{seq}\left(\frac{4\cdot T0}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{(2\cdot k-1)\cdot\pi}{a}\cdot x\right)\cdot\sinh\left(\frac{(2\cdot k-1)\cdot\pi}{a}\cdot y\right)}{(2\cdot k-1)\cdot\sinh\left(\frac{(2\cdot k-1)\cdot\pi}{a}\cdot b\right)}\right), x=1..Nx-2\right), y=1..Ny-2\right)\right)\right];$$

end proc:

> sol3 := SolutionAnalytique(a, b, T0, n, Nx, Ny)

sol3 := [15.219, 20.788, 42.077, 52.462, 100.900, 99.363] **(12)**

4.2.6 Tableaux : les tableaux de comparésent entre la méthode analytique et la méthode numérique (5 points et 9 points)

***Methode 1 (Maplet):**

> with(Maplets[Elements]) :

> maplet := Maplet$\left(\left[\text{BoxCell}\left(\text{Table}\left(\left[\text{Température, Cinq, neuf, Analytique}, \frac{\text{Ana}}{\text{Cinq}}, \frac{\text{Ana}}{\text{neuf}}\right],\right.\right.\right.\right.$
$\left[\text{seq}\left(\left[[\text{seq}(\text{seq}(T[x,y], x=2..Nx-1), y=2..Ny-1)]_f, \text{sol1}[f], \text{sol2}[f], \text{sol3}[f],\right.\right.\right.$
$\left.\left.\left.\left.\text{abs}\left(\frac{\text{sol1}[f]\cdot 100}{\text{sol3}[f]}-100\right), \text{abs}\left(\frac{\text{sol2}[f]\cdot 100}{\text{sol3}[f]}-100\right)\right], f=1..N\right)\right]\right), \text{'as\_needed'}\right),$
$\left.\left.\text{Button}(\text{"OK"}, \text{Shutdown}())\right]\right)$:

> Maplets[Display](maplet)

***Method 2 (normal):**

	5 points	9 points	Analytique	Comparésent Ana à 5 pts	Comparésent Ana à 9 pts
T_{22}	sol1[1] 12.826	sol2[1] 12.704	sol3[1] 15.219	$\text{abs}\left(\frac{\text{sol1}[2]\cdot 100}{\text{sol3}[2]}-100\right)$ 38.298	$\text{abs}\left(\frac{\text{sol2}[1]\cdot 100}{\text{sol3}[1]}-100\right)$ 16.530
T_{32}	sol1[2] 12.826	sol2[2] 12.704	sol3[2] 20.788	$\text{abs}\left(\frac{\text{sol1}[2]\cdot 100}{\text{sol3}[2]}-100\right)$ 38.298	$\text{abs}\left(\frac{\text{sol2}[2]\cdot 100}{\text{sol3}[2]}-100\right)$ 38.888
T_{42}	sol1[3] 29.711	sol2[3] 29.922	sol3[3] 42.077	$\text{abs}\left(\frac{\text{sol1}[3]\cdot 100}{\text{sol3}[3]}-100\right)$ 29.389	$\text{abs}\left(\frac{\text{sol2}[3]\cdot 100}{\text{sol3}[3]}-100\right)$ 28.887
T_{23}	sol1[4] 29.711	sol2[4] 29.922	sol3[4] 52.462	$\text{abs}\left(\frac{\text{sol1}[4]\cdot 100}{\text{sol3}[4]}-100\right)$ 43.366	$\text{abs}\left(\frac{\text{sol2}[4]\cdot 100}{\text{sol3}[4]}-100\right)$ 42.964

T_{33}	sol1[5] 55.997	sol2[5] 57.775	sol3[5] 100.900	$\mathrm{abs}\left(\frac{\mathrm{sol1}[5]\cdot 100}{\mathrm{sol3}[5]} - 100\right)$ 44.503	$\mathrm{abs}\left(\frac{\mathrm{sol2}[5]\cdot 100}{\mathrm{sol3}[5]} - 100\right)$ 42.740
T_{43}	sol1[6] 55.997	sol2[6] 57.775	sol3[6] 99.363	$\mathrm{abs}\left(\frac{\mathrm{sol1}[6]\cdot 100}{\mathrm{sol3}[6]} - 100\right)$ 43.645	$\mathrm{abs}\left(\frac{\mathrm{sol2}[6]\cdot 100}{\mathrm{sol3}[6]} - 100\right)$ 41.855

Tableau de comparaison

4.2.7 Commentaire :

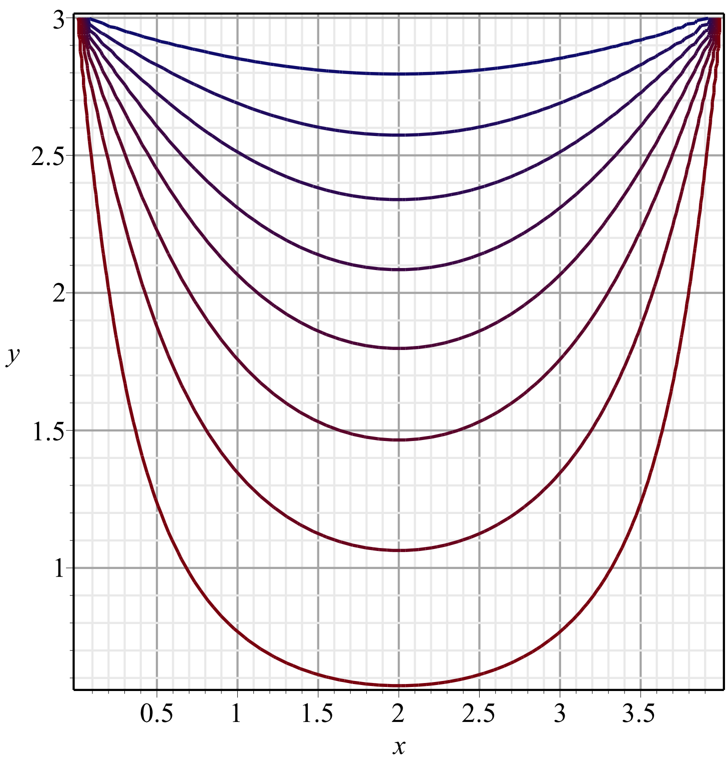
Quand nous prenons $\beta \neq 1$ la solution avec la méthode numérique et la solution avec la méthode analytique sont différent.

4.3 Graphe (Répartition des isothermes) :

> with(plots) :

$$> A := \mathrm{interactive}\left(\frac{4\cdot T0}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{(2\cdot k-1)\cdot\pi}{a}\cdot x\right)\cdot\sinh\left(\frac{(2\cdot k-1)\cdot\pi}{a}\cdot y\right)}{(2\cdot k-1)\cdot\sinh\left(\frac{(2\cdot k-1)\cdot\pi}{a}\cdot b\right)}\right)\right):$$

> display(A, axes = boxed, gridlines = true)



5 Conclution :

* En utilisez la méthodes Analytiques si $\beta = 1$ et En utilisez la méthodes numérique si $\beta \neq 1$.
* La solution avec la discrétisation par la formule à 9 points est mieux que la discrétisation par la formule à 5 points.
* Si en augment le nombre des noux N la solution avec la méthode numérique approche bien à la solution analytique .