RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE BATNA

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MÉCANIQUE

MEMOIRE
PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME

LICENCE
Spécialité : *MECANIQUE*

Option : *ENERGETIQUE*
PAR

Zouagri Achref
KHadda Houssam

Rèsolution de L'èquation d
'onde1d
'Par La Mèthod Differences Finie en Utilisante laprogramation par maple
et en utilisant le schèma discritisation explicite de euler.

Soutenue le

Encadré par :
Dr. Laid Messaoudi

ANNEE UNIVERSITAIRE 2014/2015

Remerciements Nous remercions dieu qui nous a `aidé` `à` accomplirai notre projet de fin d'`étude`. Nous tenons `à` exprimer notre gratitude et nos remerciements au membre de jury. Veuillez accepter dans ce travail notre `sincère` respect et notre profonde reconnaissance. Nous tenons `également` `à` remercier infiniment notre encadrour L.MESSAOUDI pour nous avoir offert les conditions `nécessaires` et nous avoir `guidés` dans l'`élaboration` de ce travail et contribuer largement `à` sa `réalisation` avec la patience et le dynamisme qui le `caractérise` et aussi son soutien tout au long de notre projet Nous profitons aussi de ce `mémoire` pour exprimer nos plus vifs remerciements envers tous les professeurs qui nous ont `apportés` du soutien durant nos `études` et envers tous nos amis qui ont `été` toujours `prés` de nous avec leurs encouragements, critiques et conseils. Que le corps professoral et administratif et surtout le directeur `général` de `faculté` de technologie, trouvent ici nos vifs remerciements, pour tout le travail `effectué` durant notre formation.

« DEDICACES »

Nous dédions ce modeste travail
A nos chers parents
Pour leur soutien, leur patience, leur sacrifice
et leur amour, vous méritez tout éloge,
vous qui avez fait de nous ce que nous sommes maintenant.
Nous espérons être l'image que vous êtes fait de
nous, que dieu vous garde et vous bénisse.
Nous dédions aussi ce travail à nos chers frères et soeurs,
pour leur affection et leur encouragement qui ont toujours
été pour nous des plus précieux.
Que ce travail soit pour vous le gage de notre profond amour
A tout nos amis
A tous ceux qui nous ont aidés.
A tous ceux que nous aimons, nous dédions ce travail

Achref/Houssam,

INTRODUCTION :

L'equation d'onde est une équation de cordes vibrantes par consequens, si on trouver on jue de solutions , tout combinaison linèaire de ces equation sera encore solution ,on prêfère etudier cela dans le cas on l'èquation ne dèpend pas du temps.

LA rèsolution de l'èquation d'onde permet de comprondre doit etre la solution de ce problème etudier par la mèthod numèriques et analytique posséde des proprietes connnues qui permettent d'appréhender la phénommene matimatique par la nalyse se forme d'équation en l'absenence de toute influence susceptible d'amortir le processus.

Les conditions aux limites aux initiales conduiront on solution particulieres, qui' il s'agisse d'une résolution analytiques ou, commes ici d'une solution numérique.

PARTI THIORIQUE

1-*resolution de l'equation d'onde 1*:

la rèsolution de l'equation puet se faire en la transformant en syeteme d'equations couplèes de type:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f + c\frac{\partial}{\partial x} g = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} g + c\frac{\partial}{\partial x} f = 0 \end{cases}$$

soit le problème mathèmatique avec ses (C.L) dèfini par:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le \pi \ , t \ge 0$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \ , \quad u(x,0)=f(x)=2*\sin\left(\frac{\pi}{L}\cdot x\right) \\ u(\pi,t)=0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)=-\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{L}\cdot x\right) \end{cases}$$

-discrètisation:

L'èquation est discrètisèe par exemple par un schèma d'orde 2 en temps et en espace de la manière suivante:

$$\frac{u_i^{n-1} + 2\,u_i^n + u_i^{n+1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i-1}^n - 2\,u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

en posant : $\lambda = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$ =canstant ,nous aurons lèequation discrètisèèe suivante:

$$u_i^{n+1} = 2*(1-\lambda)\,u_i^n + \lambda\,(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) - u_i^{n-1}$$

C'est un schèma à troit ètapes temporelles (n-1;n,n+1),nous devons donc calculer u_i^{-1} afin d'initialiser la procèdure de calcul. pour celà, utilisons la (C?I) de neumann et exprimons là par un schèma aux diffèrences centrè du 2^{nd} ordre:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{u_i^1 + u_i^{-1}}{2\,\Delta t} = g(x_i) \Rightarrow u_i^{-1} = u_i^1 - 2\,\Delta t\, g(x_i)$$

Ecrivons maintenant l'equation au pas de temps 0:

$u_i^1 = 2(1-\lambda)\, u_i^0 + \lambda\, (u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0) - u_i^{-1}$

En utilisant la (C,L) $u_i^0 = f(x_i)$ et en remplaçant u_i^{-1} par sa valeur ,nous aurons;

$u_i^1 = (1-\lambda) f(x_i) + \lambda/2\, (f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})) - u_i^{-1}\, \Delta t\, g(x_i)$

maintenant, nous pouvons calculer toutes lles valeurs de l'equation en utilisant les (C,L) suivantes :$u_1^n = 0$ et $u_{imax}^n = 0$.

pari pratique

solution numerique :

les donnees :

> *restart*

> $c := 1;$

$$c := 1 \tag{3.1}$$

> $l := 1;$

$$l := 1 \tag{3.2}$$

> $\mathrm{P} := 3.141592654;$

$$\mathrm{P} := 3.141592654 \tag{3.3}$$

> $\Delta x := 0.2;$

$$\Delta x := 0.2 \tag{3.4}$$

> $\Delta t := 0.004;$

$$\Delta t := 0.004 \tag{3.5}$$

> $\lambda := c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2};$

$$\lambda := 0.0004000000000 \tag{3.6}$$

> $imax := 11;$

$$imax := 11 \tag{3.7}$$

> $nmax := 15;$

$$nmax := 15 \tag{1}$$

les condition au limites :

> **for** n **from** 0 **to** $nmax$ **do** $u[1, n] := 0$ **end do**

$$u_{1,\,0} := 0$$

$$u_{1,\,1} := 0$$

$$u_{1,\,2} := 0$$

$$u_{1,3} := 0$$
$$u_{1,4} := 0$$
$$u_{1,5} := 0$$
$$u_{1,6} := 0$$
$$u_{1,7} := 0$$
$$u_{1,8} := 0$$
$$u_{1,9} := 0$$
$$u_{1,10} := 0$$
$$u_{1,11} := 0$$
$$u_{1,12} := 0$$
$$u_{1,13} := 0$$
$$u_{1,14} := 0$$
$$u_{1,15} := 0 \qquad (4.1)$$

> **for** n **from** 0 **to** $nmax$ **do** $u[imax, n] := 0$ **end do**

$$u_{11,0} := 0$$
$$u_{11,1} := 0$$
$$u_{11,2} := 0$$
$$u_{11,3} := 0$$
$$u_{11,4} := 0$$
$$u_{11,5} := 0$$
$$u_{11,6} := 0$$
$$u_{11,7} := 0$$
$$u_{11,8} := 0$$
$$u_{11,9} := 0$$
$$u_{11,10} := 0$$
$$u_{11,11} := 0$$
$$u_{11,12} := 0$$
$$u_{11,13} := 0$$
$$u_{11,14} := 0$$
$$u_{11,15} := 0 \qquad (4.2)$$

les condition initiales :

> **for** i **from** 2 **to** $imax - 1$ **do**

$u[i,0] := 2 \cdot \sin\left(\frac{P}{l} \cdot (i-1) \cdot \Delta x\right)$

end do

$$u_{2,0} := 1.175570505$$
$$u_{3,0} := 1.902113033$$
$$u_{4,0} := 1.902113033$$
$$u_{5,0} := 1.175570503$$
$$u_{6,0} := -8.204135230\ 10^{-10}$$
$$u_{7,0} := -1.175570504$$
$$u_{8,0} := -1.902113033$$
$$u_{9,0} := -1.902113032$$
$$u_{10,0} := -1.175570502 \tag{5.1}$$

>

> **for** i **from** 2 **to** imax − 1 **do**

$u[i,1] := (1-\lambda) \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{P}{l} \cdot (i-1) \cdot \Delta x\right)\right) + \frac{\lambda}{2} \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{P}{l} \cdot (i-2) \cdot \Delta x\right) + \left(2 \cdot \sin\left(\frac{P}{l} \cdot (i) \cdot \Delta x\right)\right)\right) + \Delta t \cdot \left(-\sin\left(\frac{2 \cdot P}{l} \cdot (i-1) \cdot \Delta x\right)\right)$

end do;

$$u_{2,1} := 1.171676474$$
$$u_{3,1} := 1.899616584$$
$$u_{4,1} := 1.904318865$$
$$u_{5,1} := 1.179284924$$
$$u_{6,1} := -8.235670117\ 10^{-10}$$
$$u_{7,1} := -1.179284925$$
$$u_{8,1} := -1.904318866$$
$$u_{9,1} := -1.899616583$$
$$u_{10,1} := -1.171676471 \tag{5.2}$$

>

> **for** n **from** 1 **to** nmax **do**
for i **from** 2 **to** imax − 1 **do**

$u[i,n+1] := 2 \cdot (1-\lambda) \cdot u[i,n] + \lambda \cdot (u[i-1,n] + u[i+1,n]) - u[i,n-1]$

end do;
end do;

>

> **for** i **from** 2 **to** imax − 1 **do** u[i, n]
end do;

$$1.093207276$$
$$1.828294051$$
$$1.901775310$$
$$1.212102372$$
$$-8.388963920\ 10^{-10}$$
$$-1.212102373$$
$$-1.901775326$$
$$-1.828294050$$
$$-1.093207273 \qquad \textbf{(2)}$$

```
> for n from 1 to nmax do
  l[n] := (seq(u[i, n], i = 1 ..imax))
  end do;
```

$l_1 := 0, 1.171676474, 1.899616584, 1.904318865, 1.179284924, -8.235670117\ 10^{-10}, -1.179284925, -1.904318866, -1.899616583, -1.171676471, 0$

$l_2 := 0, 1.167604948, 1.896830839, 1.906232802, 1.182817645, -8.264616470\ 10^{-10}, -1.182817646, -1.906232804, -1.896830838, -1.167604945, 0$

$l_3 := 0, 1.163358070, 1.893757165, 1.907853612, 1.186166605, -8.290951133\ 10^{-10}, -1.186166606, -1.907853615, -1.893757164, -1.163358067, 0$

$l_4 := 0, 1.158938009, 1.890396970, 1.909180110, 1.189329772, -8.314653040\ 10^{-10}, -1.189329773, -1.909180114, -1.890396969, -1.158938006, 0$

$l_5 := 0, 1.154346957, 1.886751704, 1.910211155, 1.192305147, -8.335703227\ 10^{-10}, -1.192305148, -1.910211160, -1.886751703, -1.154346954, 0$

$l_6 := 0, 1.149587128, 1.882822859, 1.910945655, 1.195090762, -8.354084850\ 10^{-10}, -1.195090763, -1.910945661, -1.882822858, -1.149587125, 0$

$l_7 := 0, 1.144660758, 1.878611969, 1.911382564, 1.197684683, -8.369783203\ 10^{-10}, -1.197684684, -1.911382571, -1.878611968, -1.144660755, 0$

$l_8 := 0, 1.139570105, 1.874120606, 1.911520886, 1.200085009, -8.382785730\ 10^{-10}, -1.200085010, -1.911520894, -1.874120605, -1.139570102, 0$

$l_9 := 0, 1.134317444, 1.869350383, 1.911359674, 1.202289875, -8.393082027\ 10^{-10}, -1.202289876, -1.911359683, -1.869350382, -1.134317441, 0$

$l_{10} := 0, 1.128905069, 1.864302951, 1.910898030, 1.204297453, -8.400663860\ 10^{-10}, -1.204297454, -1.910898040, -1.864302950, -1.128905066, 0$

$l_{11} := 0, 1.123335291, 1.858979998, 1.910135108, 1.206105952, -8.405525163\ 10^{-10}, -1.206105953, -1.910135119, -1.858979997, -1.123335288, 0$

$l_{12} := 0, 1.117610437, 1.853383249, 1.909070112, 1.207713621, -8.407662050\ 10^{-10}, -1.207713622, -1.909070124, -1.853383248, -1.117610434, 0$

$l_{13} := 0, 1.111732848, 1.847514466, 1.907702299, 1.209118748, -8.407072807\ 10^{-10},$

$- 1.209118749, - 1.907702312, - 1.847514465, - 1.111732845, 0$

$l_{14} := 0, 1.105704879, 1.841375445, 1.906030977, 1.210319662, - 8.403757910\ 10^{-10},$

$- 1.210319663, - 1.906030991, - 1.841375444, - 1.105704876, 0$

$l_{15} := 0, 1.099528896, 1.834968018, 1.904055509, 1.211314732, - 8.397720003\ 10^{-10},$ **(3)**

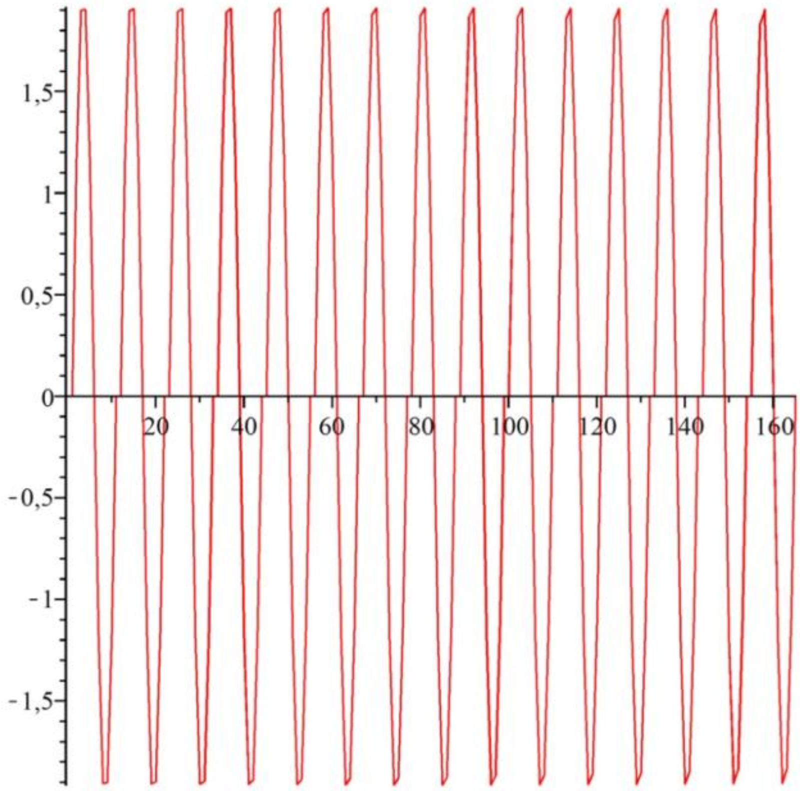
$- 1.211314733, - 1.904055524, - 1.834968017, - 1.099528893, 0$

\>

\> *with*(*plots*);

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*] **(4)**

\> *listplot*([*seq*(*l*[*n*], *n* = 1 ...*nmax*)], *color* = *red*)



2 - Solution Analytique

$U(\mathrm{x}, \mathrm{t}) := 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{c \cdot \pi \cdot x}{L}\right) - \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot c} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot c \cdot \pi \cdot t}{L}\right);$

tracé graphique :

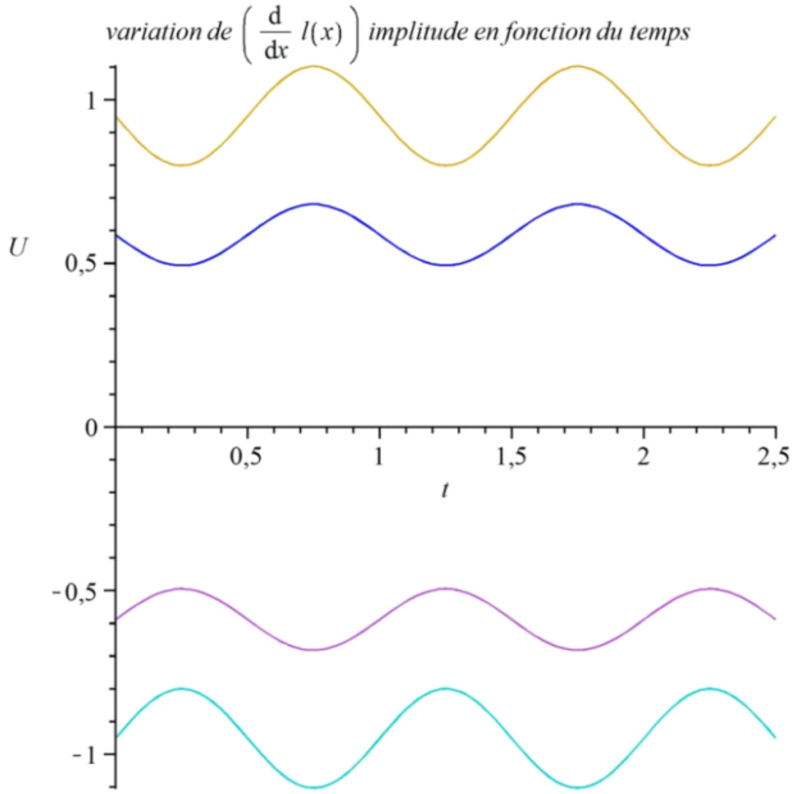
```
> restart, with(plots) :
> c := 1; L := 1;
```

$$c := 1$$
$$L := 1 \qquad (7.1)$$

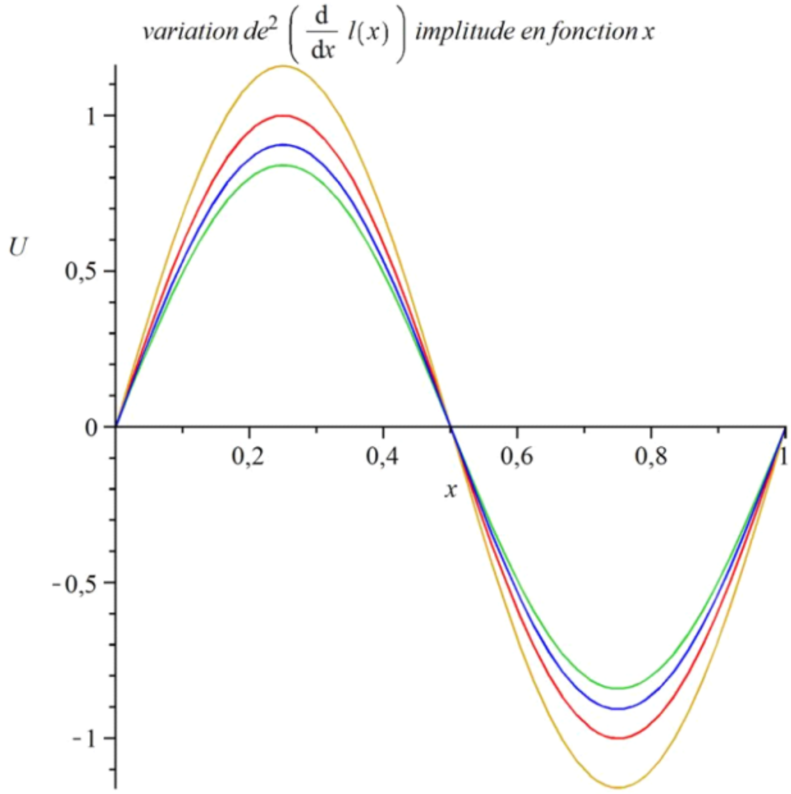
> $U(\mathrm{x}, \mathrm{t}) := 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{c \cdot \pi \cdot x}{L}\right) - \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot c} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot c \cdot \pi \cdot t}{L}\right);$

$$U := (x, t) \rightarrow 2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{c \pi x}{L}\right) - \frac{1}{2} \frac{L \sin\left(\frac{2 \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2 c \pi t}{L}\right)}{c \pi} \qquad (7.2)$$

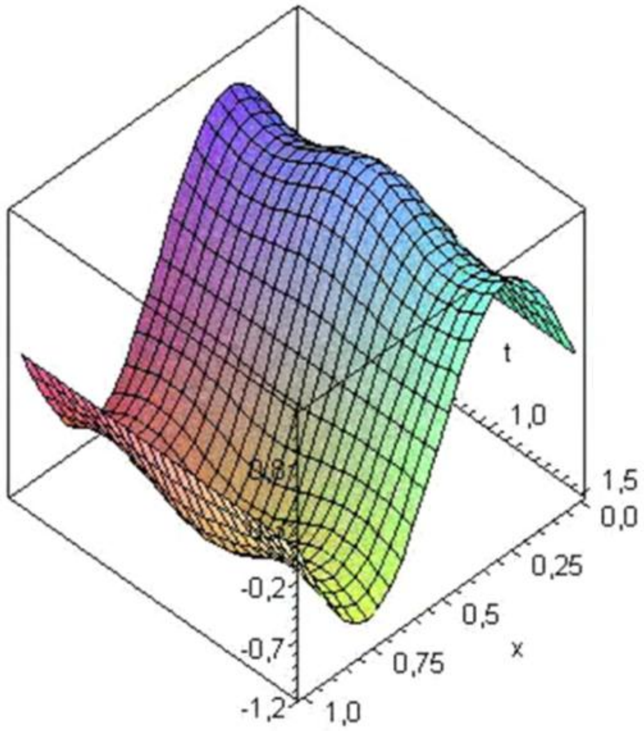
```
> plot({U(0.1, t), U(0.2, t), U(0.4, t), U(0.6, t), U(0.8, t), U(1, t)}, t = 0 ....2.5, title =
    'variation de l'implitude en fonction du temps', labels = ['t','U']);
```



> $plot(\{U(x, 0.1), U(x, 0.25), U(x, 0.75), U(x, 1), U(x, 1.5)\}, x = 0 \ldots.1, title =$ 'variation de l'implitude en fonction de x', labels = ['x','U']);



> $plot3d(U(x, t), x = 0 ..1, t = 0 ..1.5, axes = boxed);$


t
1,0
1,5
0,0
0,25
0,5
x
0,75
1,0
-0,2
-0,7
-1,2

>

Conclusion:

Nous avons ensuite décrire le but de ce résolution de l'équation d'onde pour comparer les méthode analytique et numérique pour d'evoquer la méthode plus classique employées on doit alors la résolution de l'équation est les résultat obtennu de la solution analytique est numérique l'orsqu'elle est seulment la méthode analytique different par rapport méthode numérique , la resolution de lèquation peuvent etre ne saplpliquent que dans des cas limitès .

pour des problemes relatifs a des systemes de forme gèometrique complexe ou a des milieu a caractristique non uniformes que plupart des problemes rencontrès en pratique, il est nècessaire de faire appel aux methodes ar ce que la solution numérique obtennu résultat exact .