REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOGRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L' ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BATNA

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE LICENCE

Spécialité :MECANIQUE

Option : ENERGITIQUE

PAR

SAADA MIYADA
SAADA OUARDA

THEME

Résolution de l'équation de Laplace 3D par la méthode des différences finies en utilisant la programmation par Maple.

Encadrées par :
Dr.Laïd MESSAOUDI

ANNEE UNIVERSITAIRE 2014/2015

Introduction :

Le logiciel Maple est un système de calcul formel. Alors que la plupart des logiciels de mathématiques utilisent des valeurs numériques pour les calculs, Maple manipule des valeurs symboliques et est ainsi capable d'obtenir des solutions exactes à de nombreux problèmes mathématiques.

Ce logiciel fait des merveille dans le calcul à très haute précision, la résolution d'équations réelles, imaginaires, différentielles, intégrales , ...etc.

L'objectif principale de ce mémoire est la résolution de l'équation de Laplace 3D par la méthode des différences finies en utilisant la programmation par Maple. La solution numérique sera comparée avec la solution analytique si elle existe.

L'équation de Laplace en 3D s'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, y, z)+\frac{\partial^2}{\partial y^2} T(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} T(x, y, z) = 0$$

Données:

```
> restart;
> Ndx := 5;
```

$$Ndx := 5 \quad \textbf{(1.1.1)}$$

```
> Ndy := 4;
```

$$Ndy := 4 \quad \textbf{(1.1.2)}$$

```
> Ndz := 5;
```

$$Ndz := 5 \quad \textbf{(1.1.3)}$$

```
> L := 20.; H := 16.; E := 20.;
```

$$L := 20.$$
$$H := 16.$$
$$E := 20. \quad \textbf{(1.1.4)}$$

> $\Delta x := \frac{L}{Ndx};$

$$\Delta x := 4.000000000 \quad \textbf{(1.1.5)}$$

> $\Delta y := \frac{H}{Ndy};$

$$\Delta y := 4.000000000 \quad \textbf{(1.1.6)}$$

> $\Delta z := \frac{E}{Ndz};$

$$\Delta z := 4.000000000 \quad \textbf{(1.1.7)}$$

> $\beta 1 := \frac{\Delta x}{\Delta y};$

$$\beta 1 := 1.000000000 \quad (1.1.8)$$

> $\beta 2 := \frac{\Delta x}{\Delta z};$

$$\beta 2 := 1.000000000 \quad (1.1.9)$$

> $Tb := 0.; Th := 100.; Tg := 75.; Td := 50.; Tf := 45.; Ts := 35.;$

$$Tb := 0.$$
$$Th := 100.$$
$$Tg := 75.$$
$$Td := 50.$$
$$Tf := 45.$$
$$Ts := 35. \quad (1.1.10)$$

> $imax := Ndx + 1;$

$$imax := 6 \quad (1.1.11)$$

> $jmax := Ndy + 1;$

$$jmax := 5 \quad (1.1.12)$$

> $kmax := Ndz + 1;$

$$kmax := 6 \quad (1.1.13)$$

>

Nombre d'équation (noeuds):

> $Ndeq := (imax - 2).(jmax - 2).(kmax - 2);$

$$Ndeq := 48 \quad (1.2.1)$$

Cl:

condition limite en bas :

```
> for j from 2 to jmax − 1 do
   for i from 2 to imax − 1 do
    T[i, j, 1] := Tb
   end do;
  end do;
```

> $seq(seq(T[i, j, 1], i = 2 ..imax - 1), j = 2 ..jmax - 1)$

$$0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0. \quad (1.3.1)$$

condition limite en haute :

```
> for j from 2 to jmax − 1 do
    for i from 2 to imax − 1 do
     T[i, j, kmax] := Th
    end do;
   end do;
```

> $seq(seq(T[i, j, kmax], i = 2 ..imax - 1), j = 2 ..jmax - 1)$

(1.3.2)

100., 100., 100., 100., 100., 100., 100., 100., 100., 100., 100., 100. **(1.3.2)**

condition limite en gauche :

```
> for k from 2 to kmax − 1 do
   for i from 2 to imax − 1 do
    T[i, 1, k] := Tg
   end do;
  end do;
```

```
> seq(seq(T[i, 1, k], i = 2 ..imax − 1), k = 2 ..kmax − 1)
```

75., 75., 75., 75., 75., 75., 75., 75., 75., 75., 75., 75., 75., 75., 75., 75. **(1.3.3)**

condition limite en droite :

```
> for k from 2 to kmax − 1 do
   for i from 2 to imax − 1 do
   T[i, jmax, k] := Td
   end do;
  end do;
```

```
> seq(seq(T[i, jmax, k], i = 2 ..imax − 1), k = 2 ..kmax − 1)
```

50., 50., 50., 50., 50., 50., 50., 50., 50., 50., 50., 50., 50., 50., 50., 50. **(1.3.4)**

condition limite en avant :

```
> for k  from 2 to kmax − 1 do
    for j from 2 to jmax − 1 do
     T[1, j, k] := Tf
    end do;
  end do;
```

```
> seq(seq(T[1, j, k], j = 2 ..jmax − 1), k = 2 ..kmax − 1)
```

45., 45., 45., 45., 45., 45., 45., 45., 45., 45., 45., 45. **(1.3.5)**

condition limite en arriére

```
> for k  from 2 to kmax − 1 do
    for j from 2 to jmax − 1 do
    T[imax, j, k] := Ts
    end do;
  end do;
```

```
> seq(seq(T[imax, j, k], j = 2 ..jmax − 1), k = 2 ..kmax − 1)
```

35., 35., 35., 35., 35., 35., 35., 35., 35., 35., 35., 35. **(1.3.6)**

Systèmes d'équations et résolution:

```
> h := 1 :
```

```
> for k  from 2 to kmax − 1 do
    for j from 2 to jmax − 1 do
     for i from 2 to imax − 1 do
       Eq[h] := -2·(1 + β1^2 + β2^2)·T[i, j, k] + (T[i + 1, j, k] + T[i − 1, j, k]) + β1^2
    .(T[i, j − 1, k] + T[i, j + 1, k]) + β2^2.(T[i, j, k − 1] + T[i, j, k + 1]) = 0;
      var[h] := T[i, j, k];
       h := h + 1;
```

```
      end do;
     end do;
   end do;
> for h  from  1 to Ndeq do
    Eq[h];
  var[h];
   end do:
> sys := seq(Eq[h], h = 1 ..Ndeq) :
> vars := (seq(var[h], h = 1 ...Ndeq)) :
> solve({sys}, {vars});
```

$$\{T_{2,2,2}=41.29109020, T_{2,2,3}=54.27641832, T_{2,2,4}=61.09510085, T_{2,2,5}=71.09941803, T_{2,3,2}=32.97958922, T_{2,3,3}=46.86211371, T_{2,3,4}=55.56447105, T_{2,3,5}=68.38386329, T_{2,4,2}=34.29109020, T_{2,4,3}=45.77641832, T_{2,4,4}=52.59510085, T_{2,4,5}=64.09941803, T_{3,2,2}=40.49053366, T_{3,2,3}=56.41020515, T_{3,2,4}=65.63029768, T_{3,2,5}=77.11754402, T_{3,3,2}=30.43324123, T_{3,3,3}=47.57578532, T_{3,3,4}=59.45064763, T_{3,3,5}=74.53987264, T_{3,4,2}=31.99053366, T_{3,4,3}=45.91020515, T_{3,4,4}=55.13029768, T_{3,4,5}=68.61754402, T_{4,2,2}=39.80866541, T_{4,2,3}=55.48819589, T_{4,2,4}=64.70828842, T_{4,2,5}=76.43567577, T_{4,3,2}=29.56300549, T_{4,3,3}=46.38829909, T_{4,3,4}=58.26316140, T_{4,3,5}=73.66963691, T_{4,4,2}=31.30866541, T_{4,4,3}=44.98819589, T_{4,4,4}=54.20828842, T_{4,4,5}=67.93567577, T_{5,2,2}=38.31025742, T_{5,2,3}=50.61371728, T_{5,2,4}=57.43239981, T_{5,2,5}=68.11858524, T_{5,3,2}=29.43916182, T_{5,3,3}=42.45145056, T_{5,3,4}=51.15380791, T_{5,3,5}=64.84343588, T_{5,4,2}=31.31025742, T_{5,4,3}=42.11371728, T_{5,4,4}=48.93239981, T_{5,4,5}=61.11858524\} \quad \textbf{(1.4.1)}$$

Procédure:

```
> restart;
> Lap3D := proc(Ndx, Ndy, Ndz, L, H, E, Tb, Th, Tg, Td , Tf, Ts)
   local Δx, Δy, Δz, β1, β2, imax, jmax, kmax, Ndeq, i, j, k, T, h, Eq, var, sys, vars;
  Δx := L/Ndx;
  Δy := H/Ndy; Δz := E/Ndz; β1 := Δx/Δy; β2 := Δx/Δz; imax := Ndx + 1; jmax := Ndy + 1;
     kmax := Ndz + 1; Ndeq := (imax − 2).(jmax − 2).(kmax − 2);
     for j from  2 to jmax − 1 do
      for i from  2 to imax − 1 do
      T[i, j, 1] := Tb
     end do;
    end do;
    for j from  2 to jmax − 1 do
     for i from  2 to imax − 1 do
      T[i, j, kmax] := Th
```

```
      end do;
    end do;
     for k from 2 to kmax − 1 do
      for i from 2 to imax − 1 do
      T[i, 1, k] := Tg
      end do;
     end do;
     for k from 2 to kmax − 1 do
      for i from 2 to imax − 1 do
       T[i, jmax, k] := Td
      end do;
     end do;
    for k  from 2 to kmax − 1 do
      for j from 2 to jmax − 1 do
        T[1, j, k] := Tf
      end do;
    end do;
    for k  from 2 to kmax − 1 do
      for j from 2 to jmax − 1 do
         T[imax, j, k] := Ts
      end do;
    end do;
    h := 1 :
  for k from 2 to kmax − 1 do
    for j from 2 to jmax − 1 do
      for i from 2 to imax − 1 do
         Eq[h] := -2·(1 + β1^2 + β2^2)·T[i, j, k] + (T[i + 1, j, k] + T[i − 1, j, k]) + β1^2
       .(T[i, j − 1, k] + T[i, j + 1, k]) + β2^2.(T[i, j, k − 1] + T[i, j, k + 1]) = 0;
         var[h] := T[i, j, k];
         h := h + 1;
      end do;
     end do;
   end do;
    sys := seq(Eq[h], h = 1 ..Ndeq) :
   vars := (seq(var[h], h = 1 ...Ndeq)) :
 solve({sys}, {vars});

 end proc;
```

```
Lap3D := proc(Ndx, Ndy, Ndz, L, H, E, Tb, Th, Tg, Td, Tf, Ts)                    (1.5.1)
    local Δx, Δy, Δz, β1, β2, imax, jmax, kmax, Ndeq, i, j, k, T, h, Eq, var, sys, vars;
    Δx := L / Ndx;
    Δy := H / Ndy;
    Δz := E / Ndz;
    β1 := Δx / Δy;
    β2 := Δx / Δz;
    imax := Ndx + 1;
```

```
jmax := Ndy + 1;
kmax := Ndz + 1;
Ndeq := Typesetting:-delayDotProduct(Typesetting:-delayDotProduct(imax - 2,
jmax - 2), kmax - 2);
for j from 2 to jmax - 1 do
    for i from 2 to imax - 1 do
        T[i, j, 1] := Tb
    end do
end do;
for j from 2 to jmax - 1 do
    for i from 2 to imax - 1 do
        T[i, j, kmax] := Th
    end do
end do;
for k from 2 to kmax - 1 do
    for i from 2 to imax - 1 do
        T[i, 1, k] := Tg
    end do
end do;
for k from 2 to kmax - 1 do
    for i from 2 to imax - 1 do
        T[i, jmax, k] := Td
    end do
end do;
for k from 2 to kmax - 1 do
    for j from 2 to jmax - 1 do
        T[1, j, k] := Tf
    end do
end do;
for k from 2 to kmax - 1 do
    for j from 2 to jmax - 1 do
        T[imax, j, k] := Ts
    end do
end do;
h := 1;
for k from 2 to kmax - 1 do
    for j from 2 to jmax - 1 do
        for i from 2 to imax - 1 do
            Eq[h] := -(2 + 2 * β1^2 + 2 * β2^2) * T[i, j, k] + T[i + 1, j, k] + T
            [i - 1, j, k] + Typesetting:-delayDotProduct(β1^2, T[i, j - 1, k] + T
            [i, j + 1, k]) + Typesetting:-delayDotProduct(β2^2, T[i, j, k - 1] + T
```

```
                    [i, j, k + 1]) = 0;
                    var[h] := T[i, j, k];
                    h := h + 1
                end do
            end do
        end do;
        sys := seq(Eq[h], h = 1 ..Ndeq);
        vars := seq(var[h], h = 1 ..Ndeq);
        solve({sys}, {vars})
end proc
```

Exemple:

```
> Lap3D(5, 4, 5, 20, 16, 20, 0, 100., 75, 45 , 50, 35)
```

$$\{T_{2,2,2} = 42.65669031, T_{2,2,3} = 55.92344691, T_{2,2,4} = 62.74212944, T_{2,2,5} = 72.46501814, T_{2,3,2} = 34.27651481, T_{2,3,3} = 48.41027857, T_{2,3,4} = 57.11263592, T_{2,3,5} = 69.68078888, T_{2,4,2} = 34.25669031, T_{2,4,3} = 45.72344691, T_{2,4,4} = 52.54212944, T_{2,4,5} = 64.06501814, T_{3,2,2} = 40.74018015, T_{3,2,3} = 56.73158315, T_{3,2,4} = 65.95167568, T_{3,2,5} = 77.36719051, T_{3,3,2} = 30.33542968, T_{3,3,3} = 47.42562688, T_{3,3,4} = 59.30048918, T_{3,3,5} = 74.44206109, T_{3,4,2} = 30.54018015, T_{3,4,3} = 44.13158315, T_{3,4,4} = 53.35167568, T_{3,4,5} = 67.16719051, T_{4,2,2} = 39.71737777, T_{4,2,3} = 55.34856927, T_{4,2,4} = 64.56866180, T_{4,2,5} = 76.34438813, T_{4,3,2} = 29.03007608, T_{4,3,3} = 45.64439753, T_{4,3,4} = 57.51925984, T_{4,3,5} = 73.13670749, T_{4,4,2} = 29.51737777, T_{4,4,3} = 42.74856927, T_{4,4,4} = 51.96866180, T_{4,4,5} = 66.14438813, T_{5,2,2} = 38.18544114, T_{5,2,3} = 50.42939536, T_{5,2,4} = 57.24807789, T_{5,2,5} = 67.99376896, T_{5,3,2} = 28.96587370, T_{5,3,3} = 41.79428386, T_{5,3,4} = 50.49664121, T_{5,3,5} = 64.37014777, T_{5,4,2} = 29.78544114, T_{5,4,3} = 40.22939536, T_{5,4,4} = 47.04807789, T_{5,4,5} = 59.59376896\} \tag{1.5.2}$$

Conclution:

La présente étude constitue un avant projet pour résoudre ce genre de problème. A notre surprise très peu de bibliographie a traité analytiquement ce genre de problème. Le problème du refroidissement des grands locaux pose toujours un probléme. Atravers la présent étude, nous sommes intéressés à trouver une solution à l'équation de Laplace 3D en utilisant le logiciel Maple qui nous a aidé à faire ce travail. Basé sur l'approche de ce programme et après avoir pris connaissance des commandes et de leur syntaxe, nous avons résolu cette équation en la discrétisant par différences finies.

En raison de contraintes de temps , nous avons été incapables de trouver la solution analytique de cette équation si elle existe.