Rattrapage: Outils numériques (Licence Génie Energétique)

N.B : *Aucun document n'est autorisé. Durée : 1 h 30 mn.*

Exercice N° 1: (3 points)

Classer les EDP suivantes (parabolique, hyperbolique ou elliptique) :

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
2. $x^2\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2xy\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + x\,\frac{\partial \phi}{\partial x} + y\,\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$
3. $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 6\,\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} - 16\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$

Exercice N° 2: (7 points)

La discrétisation de l'équation de la chaleur par la méthode *de Richardson* donne :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\,\Delta t} = \frac{T_{i-1}^n - 2\,T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

1- Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.

2- Etudier la stabilité de ce schéma.

Exercice N° 3: (3 points)

Parmi les schémas ci-dessous, dire lequel est explicite ou implicite :

1. $u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_{i-1}^{n+1} = 0$
2. $2u_{i,j} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 0$
3. $T_i^{n+1} - T_i^{n-1} + \lambda\,(T_{i+1}^n - T_{i-1}^n) = 0$

Exercice N° 4: (5 points)

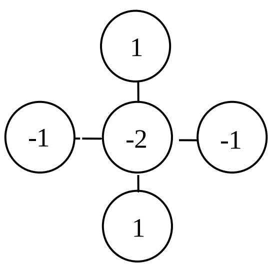
Soit l'équation aux dérivées partielles suivante : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

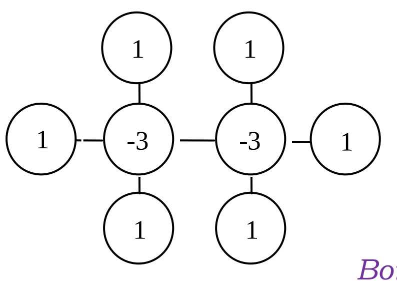
On demande de la discrétiser par :

1. Un schéma centré d'ordre 2 en temps et en espace.
2. Un schéma décentré arrière d'ordre 1 en temps et décentré avant d'ordre 2 en espace.

Exercice N° 5: (2 points)

Ecrire les équations de discrétisation de l'équation de Laplace pour la variable T :





Bonne chance

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$h\,f'(x)$	-1	+1			
$h^2\,f''(x)$	+1	-2	+1		

Tab.1- Approximation décentrée en avant en $O(h)$.

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$h\,f'(x)$				-1	+1
$h^2\,f''(x)$			+1	-2	+1

Tab.2- Approximation décentrée en arrière en $O(h)$.

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$
$2h\,f'(x)$	-3	+4	-1			
$h^2\,f''(x)$	+2	-5	+4	-1		

Tab.3- Approximation décentrée en avant en $O(h^2)$.

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2h\,f'(x)$				+1	-4	+3
$h^2\,f''(x)$			-1	+4	-5	+2

Tab.4- Approximation décentrée en arrière en $O(h^2)$.

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2h\,f'(x)$		-1	0	+1	
$h^2\,f''(x)$		+1	-2	+1	

Tab.5- Approximation centrée en $O(h^2)$.