

2- Modes de transfert de chaleur

2.1- Introduction

Comme nous l'avons déjà mentionné, on peut définir le transfert thermique entre deux corps comme étant le transfert de l'énergie qui résulte d'une différence de température entre deux corps. On distingue habituellement trois modes de transfert: par conduction, par convection et par rayonnement. Ces trois modes sont régis par des lois bien spécifiques et feront l'objet des paragraphes suivants. Bien que les trois processus puissent avoir lieu simultanément, l'un des mécanismes est généralement prépondérant. Par exemple, la chaleur est principalement transmise par conduction à travers les murs en brique d'une maison; l'eau dans une casserole placée sur une cuisinière est surtout chauffée par convection; la terre reçoit sa chaleur du soleil en grande partie par rayonnement.

Le fait donc de comprendre chaque mode de transmission permet à l'ingénieur d'écrire correctement les équations nécessaires ou éventuellement de bien poser son modèle mathématique afin de résoudre le problème auquel il est confronté.

2.2- Transfert de chaleur par conduction

La transmission de la chaleur dans les solides non poreux se fait uniquement par conduction, tandis que dans les liquides et les gaz, elle se fait souvent par les trois modes combinés. Il est donc normal que l'on parle dans ce paragraphe surtout des solides. Nous allons, en premier lieu, commencer par traiter le cas de la conduction unidimensionnelle afin de mieux comprendre la théorie associée à chaque cas, ensuite nous verrons comment passer aux cas à deux et trois dimensions.

2.2.1- Première loi de Fourier

2.2.1.1- Cas d'une paroi plane

Considérons un mur vertical d'aire A et d'épaisseur dx dont l'une de ses extrémités est portée à la température T constante (Fig 2.1). Une différence de température dT entre les deux faces du mur entraînera un courant thermique de la face la plus chaude à la face la plus froide. Cette quantité de chaleur appelée puissance thermique (quantité de chaleur transportée par unité de temps) est donnée par la première loi de Fourier:

$$q_x = \frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

où :

q_x : puissance thermique ou flux de chaleur [W] ;

λ : coefficient de conductivité thermique [W/m°K].

Le signe (-) est dû au fait que la chaleur se transmet dans la direction des températures décroissantes.

Lorsque les températures des deux faces sont constantes dans le temps, alors le flux de chaleur qui traverse le mur sera constant. La première loi de Fourier implique que le profil de température à l'intérieure du mur sera linéaire et constant dans le temps.

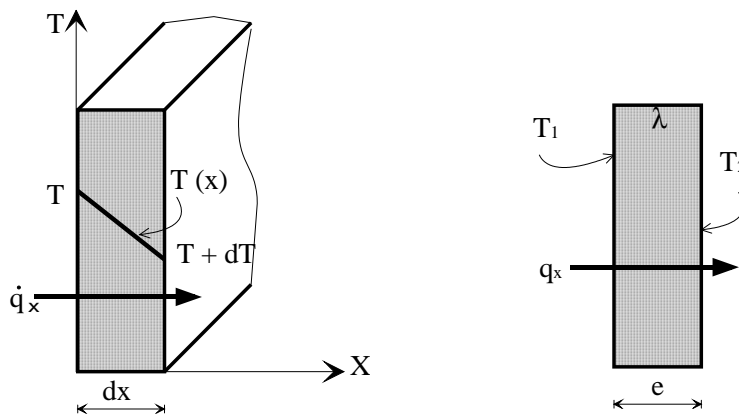


Fig.2.1- Première loi de Fourier. Cas d'une paroi plane.

Dans le cas d'un mur d'épaisseur e et dont les faces sont maintenues aux températures T_1 et T_2 constantes (Fig.2.1) tel que $T_1 > T_2$, la relation (2.1) s'écrit alors :

$$q_x = -\lambda A \frac{(T_2 - T_1)}{e} = A \frac{\lambda}{e} \Delta T = A h \Delta T \quad (2.2)$$

avec :

$$h = \frac{\lambda}{e} : \text{coefficient de transfert de chaleur [W/m}^2\text{°K].}$$

Le coefficient h caractérise l'aptitude du mur d'épaisseur e à conduire la chaleur. Pour les parois d'un congélateur par exemple, il faudra choisir un coefficient h aussi petit que possible, c'est-à-dire choisir un matériau de faible conductivité thermique λ et d'une épaisseur e assez grande. Il est aussi claire, d'après la relation (2.2), que le flux de chaleur est proportionnel à la surface d'échange, plus elle est grande, plus le flux est grand.

Exemple :

Soit à déterminer la puissance perdue par un mur dont les températures aux extrémités sont $T_1=1150$ °K et $T_2=1400$ °K, et dont les caractéristiques sont :

- Hauteur : $H=0.5$ m ; Largeur : $L=3$ m ; $e=0.15$ m ; $\lambda=1.7$ W/m °K.

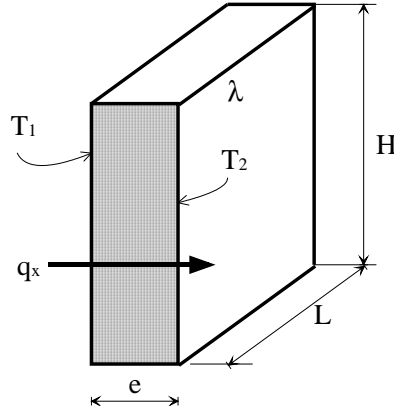


Fig.2.2- Première loi de Fourier. Exemple d'application.

En supposant que le problème est stationnaire et unidimensionnel, et que les propriétés du mur sont constantes, nous pouvons écrire :

$$q_x = A h \Delta T = (H.L) \frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2) = (0,5.3) \frac{1,7}{0,15} (1400 - 1150) = \underline{\underline{4250 W}}$$

Pratiquement, on utilise souvent la densité de flux \dot{q}_x en $[\text{W}/\text{m}^2]$ au lieu du flux de chaleur q_x afin de pouvoir comparer différentes quantités de chaleur indépendamment de la géométrie du corps (en se référant à une même surface d'échange). Elle est définie par :

$$\dot{q}_x = \frac{q_x}{A} = -\lambda \frac{dT}{dx} = h \Delta T \quad (2.3)$$

Dans l'exemple ci-dessus, la densité de flux perdue par le mur est de $2833.33 \text{ W}/\text{m}^2$.

2.2.1.2- Forme générale

La forme générale (2D ou 3D) de la première loi de Fourier s'écrit pour le flux de chaleur:

$$\vec{q} = -\lambda A \vec{\nabla} T \quad (2.4)$$

et pour la densité de flux :

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (2.5)$$

avec :

$$\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

La relation (2.4) indique implicitement que le vecteur flux de chaleur est dans la direction perpendiculaire aux surfaces isothermes (idem pour la relation (2.5)).

2.2.1.3- Cas d'un mur composé

Dans le cas où le mur (ou la paroi plane) est composé de plusieurs matériaux de différentes épaisseurs (Fig.2.3), comme on en rencontre souvent en pratique, nous aurons alors puisque le flux traversant le mur est constant en régime stationnaire:

$$\dot{q}_x = h_1 \Delta T_1 = h_2 \Delta T_2 = \dots = h_N \Delta T_N \quad (2.6)$$

avec :

$$\Delta T_i = T_i - T_{i+1} \quad i = 1 \dots N \quad (2.7)$$

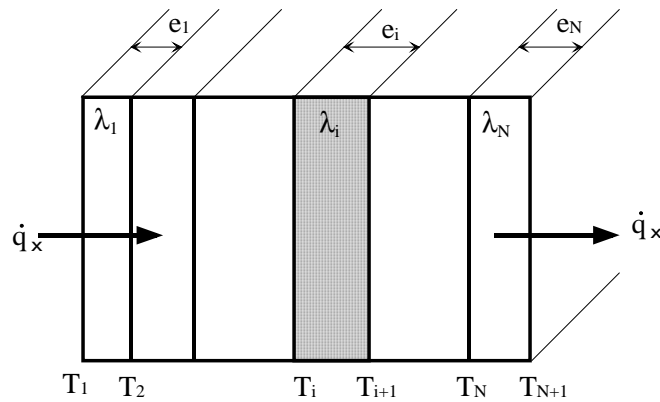


Fig.2.3- Première loi de Fourier. Cas d'un mur composé.

Le coefficient de transfert de chaleur global de l'ensemble des parois juxtaposées est donné par :

$$\dot{q}_x = h_{global} \Delta T \quad (2.8)$$

et comme :

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \dots + \Delta T_N \quad (2.9)$$

on en déduit la loi de composition des coefficients de transmission :

$$\frac{1}{h_{global}} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \dots + \frac{1}{h_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{h_i} = \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{\lambda_i} \quad (2.10)$$

Le coefficient de transfert de chaleur h traduisant la facilité du transfert de chaleur, son inverse $\frac{1}{h}$ peut être considéré comme une résistance thermique. Donc, comme pour un courant électrique traversant des résistances en série, la résistance globale $\frac{1}{h}$ est égale à la somme des résistances

$$\frac{1}{h_i} \quad (i = 1..N).$$

2.2.1.4- Résistance thermique

De même que la résistance électrique est associée à la conduction électrique, la résistance thermique est associée à la conduction de chaleur. Elle est définie à partir du flux de chaleur par:

$$R_{th} = \frac{\Delta T}{q_x} = \frac{e}{\lambda A} \quad (2.11)$$

elle est exprimée en [°K/W]. La figure (Fig.2.4) nous montre un exemple de cette analogie.

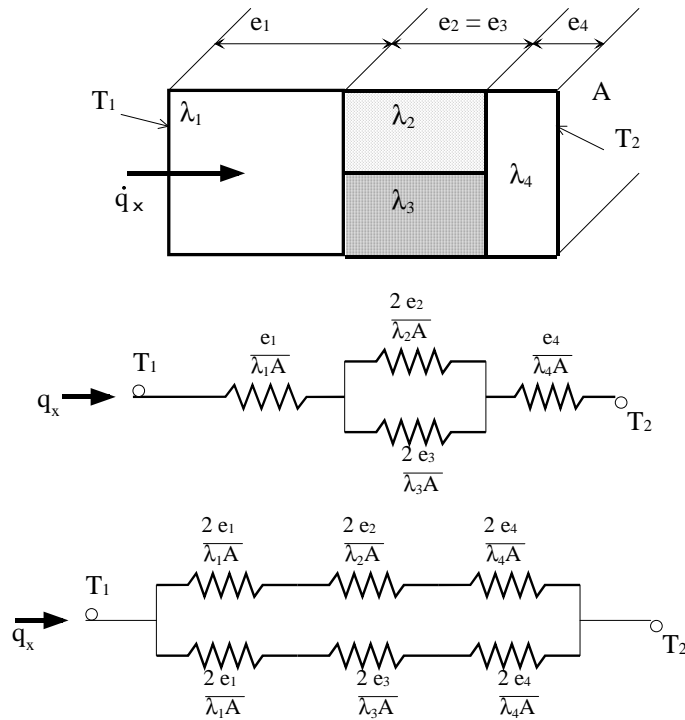


Fig.2.4- Analogie électrique. Résistance thermique.

2.2.1.5- Notions de résistance thermique de contact

Dans la réalité, deux solides accolés et non soudés représentent un contact imparfait (Fig.2.5) et la conduction à travers l'interface est accompagnée d'une chute de température proportionnelle à la densité de flux en régime stationnaire. Cette résistance est appelée résistance thermique de contact, elle est exprimée en [m²°K/W] et elle est définie par:

$$R_{th,c} = \frac{(T_{1,I} - T_{2,I})}{\dot{q}_x} \quad (2.12)$$

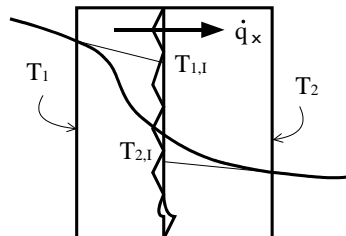


Fig.2.5- Résistance thermique de contact.

$T_{1,I}$ et $T_{2,I}$ étant les températures fictives obtenues par extrapolation des distributions de température jusqu'à l'interface.

Cette résistance dépend donc des matériaux en contact, de leurs état de surface, de l'aire des zones de contact, de la hauteur des aspérités, de la pression de contact, de la température du fluide interstitiel et de sa pression.

Importance en pratique :

Pour les contacts entre les corps mauvais conducteurs de chaleur, les résistances de contact peuvent être négligées. Il en est de même, d'une façon générale, pour des densités de flux faibles ou modérées. Mais, dans plusieurs techniques modernes, où les densités de flux peuvent être très grandes (réacteurs, véhicules spatiaux, turbines, ...etc), des résistances de contact en jeu peuvent correspondre à des chutes de températures qu'on ne peut négliger.

Ordre de grandeur :

- Surfaces en acier, laiton, aluminium de rugosités diverses :

$$P_{méc} = 0,153 \dots 5,6 \text{ MPa} \quad \longrightarrow \quad R_{th,c} = 3,17 \dots 0,14 \text{ cm}^2 \text{ } ^\circ\text{K/W.}$$

- Couples de surfaces laiton-acier ($P_{méc} = 1,5 \text{ Mpa}$):

* dans le vide : $R_{th,c} = 14 \text{ cm}^2 \text{ } ^\circ\text{K/W.}$ * à l'air libre : $R_{th,c} = 3 \text{ cm}^2 \text{ } ^\circ\text{K/W.}$

- Couples de surfaces acier inox-laiton (air à P_{atm}):

à 100 °C	,	8 MPa	→	1	cm ² °K/W.
à 250 °C	,	8 MPa	→	0,7	cm ² °K/W.
à 100 °C	,	4 MPa	→	1,8	cm ² °K/W.
à 250 °C	,	4 MPa	→	1,4	cm ² °K/W.
à 100 °C	,	1 MPa	→	2,8	cm ² °K/W.
à 250 °C	,	1 MPa	→	2	cm ² °K/W.

2.2.1.6- Cas d'une paroi cylindrique composée

De même que pour le cas du mur composé, nous définissons le coefficient de transfert global dans le cas d'une paroi cylindrique composée (Fig.2.6) par la relation:

$$\frac{l}{h_{global}} = \sum_{i=1}^N \frac{l}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_{int}}{r_{ext}}\right)_i \quad (2.13)$$

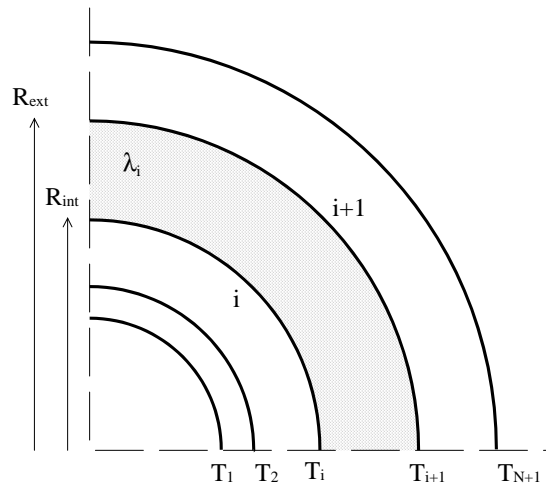


Fig.2.6- Première loi de Fourier. Cas d'une paroi cylindrique composée.

2.2.2- Seconde loi de Fourier

2.2.2.1- Cas d'une paroi plane

Considérons un milieu homogène de masse volumique ρ , de chaleur spécifique C_p et de conductibilité thermique λ , limité par deux faces parallèles d'aire A et distantes d'une longueur élémentaire dx (Fig.2.7).

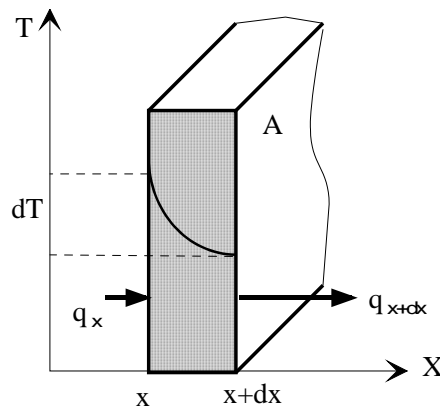


Fig.2.7- Seconde loi de Fourier. Cas d'une paroi plane.

Si le gradient de température de la face située à la distance x est supérieur au gradient de l'autre face située à $(x+dx)$, les flux thermiques seront tel que $q_x > q_{x+dx}$. La différence entre les deux courants thermiques se traduira par une accumulation de chaleur dans la plaque qui sera, pendant l'intervalle de temps dt : $(q_x - q_{x+dx}) dt$.

Cette accumulation de chaleur sensible provoquera donc une augmentation de température dT de la plaque de volume $A dx$:

$$(q_x - q_{x+dx}) dt = A dx \rho c_p dT$$

Appliquons la première loi de Fourier (toujours dans le cas unidimensionnel) pour calculer les flux q_x et q_{x+dx} :

$$q_{x+dx} \approx q_x + \frac{\partial}{\partial x}(q_x) dx = q_x - \lambda A \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dx$$

$$q_x - q_{x+dx} = \lambda A \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dx = \frac{A dx \rho c_p dT}{dt}$$

on obtient alors la seconde loi de Fourier qui s'écrit:

$$\alpha \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{dT}{dt} \quad (2.14)$$

où :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (2.15)$$

est la diffusivité thermique du matériau qui caractérise son aptitude à diffuser la chaleur lors d'une conduction en régime transitoire. Elle s'exprime en $[m^2/s]$.

En régime instationnaire (transitoire), il y a variation de la température locale avec le temps, c'est-à-dire accumulation ou déperdition de chaleur. C'est la raison pour laquelle la diffusivité thermique, influencée par la chaleur spécifique (reliant l'accumulation de chaleur à l'augmentation de température), doit être utilisée au lieu de la seule conductivité thermique.

2.2.3- Généralisation de la loi de Fourier

L'équation de la conduction dans sa forme la plus générale est obtenue en appliquant le premier principe de la thermodynamique à un volume de contrôle autour du corps solide

considéré. La démonstration peut être consulté dans les ouvrages généraux de transfert thermique et l'équation générale s'écrit:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}[\lambda \vec{\nabla} T] + \dot{q}_s \quad (2.16)$$

où :

\dot{q}_s est la densité volumique ou puissance thermique par unité de volume engendrée par les sources (ou puits) à l'intérieur de l'éléments.

On trouve dans la pratique beaucoup d'applications qui font apparaître le terme source, par exemple :

- ✓ Résistances électriques chauffantes.
- ✓ Fours à micro-ondes.
- ✓ Réacteurs nucléaires et chimiques.
- ✓ Câbles électriques.
- ✓ Fours à induction.

L'équation (2.16) est souvent difficile à résoudre et en pratique, on la retrouve sous plusieurs formes simplifiées :

➤ Pour les solides homogènes et isotropes la conductibilité thermique λ ne dépend plus de la température, donc $\lambda = C^{te}$ et on aura :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{q}_s}{\rho c_p} \quad (2.17)$$

avec :

$$\nabla^2 T \equiv \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Cette équation est aussi vérifiée dans le cas où les variations de température sont suffisamment faibles pour que l'on puisse admettre que λ ne varie pratiquement pas en fonction T.

➤ En régime stationnaire et $\lambda = C^{te}$, on aura l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}_s}{\lambda} = 0 \quad (2.18)$$

- En régime stationnaire, $\lambda = C^{te}$ et en l'absence du terme source, on aura l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.19)$$

- En régime variable et en l'absence du terme source, on aura l'équation de Fourier déjà démontrée (2.2.2.1) ou équation de la chaleur telle qu'elle est appelée dans les ouvrages mathématiques:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.20)$$

Remarquons que si L est la dimension caractéristique du corps, l'équation (2.20) peut être mise sous la forme adimensionnelle (sans unité) suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} \quad (2.21)$$

avec :

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} \quad ; \quad \xi = \frac{x}{L} \quad ; \quad \eta = \frac{y}{L} \quad ; \quad \zeta = \frac{z}{L}$$

Cette transformation permet de faire ressortir le nombre de Fourier τ qui est le temps sans dimension caractéristique du transfert par conduction.

L'équation générale de la conduction (avec $\lambda = C^{te}$) s'écrit dans les différents systèmes d'axes de la manière suivante:

- ◆ Coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_s}{\lambda} \quad (2.22)$$

- ◆ Coordonnées cylindriques (r, z, θ) :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_s}{\lambda} \quad (2.23)$$

- ◆ Coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\dot{q}_s}{\lambda} \quad (2.23)$$

2.2.4- Conditions aux limites

Pour résoudre l'équation générale (2.16) ou les équations simplifiées (2.17)...(2.20) dans le domaine de l'espace occupé par le corps conducteur de chaleur, il faut s'imposer une condition initiale (en général la distribution initiale de température) et des conditions aux limites à la surface du corps. Ces dernières sont classées en trois types principaux:

- Condition de Dirichlet ou du 1^{er} type : Distribution de température imposée sur la frontière (variable ou non dans le temps) :

$$T(x_M, t) = T_p \quad M \in \text{frontière du solide} \quad (2.24)$$

- Condition de Neumann ou du 2^{er} type : Distribution de densité de flux imposée sur la frontière:

- Densité de flux de chaleur finie :

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_M} = \dot{q} \quad (2.25)$$

- Surface adiabatique ou isolée :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_M} = 0 \quad (2.26)$$

- Condition de Fourier ou du 3^{er} type : Relation linéaire connue entre la densité de flux à la surface du corps et la température au même endroit :

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_M} = h[T_\infty - T(x_M, t)] \quad (2.27)$$

- A la limite entre deux corps conducteurs homogènes, on doit avoir les conditions suivantes :

- Egalité des températures en chaque point de ce contact I :

$$T_{1,I} = T_{2,I} \quad (2.28)$$

- Conservation du flux à cette limite :

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_I = \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_I \quad (2.29)$$

2.2.5- Méthodes de résolution

Dans un souci de simplification, nous nous limiterons dans ce paragraphe au cas des corps homogènes et isotropes sans présence de sources de chaleur internes.

2.2.5.1- Régime stationnaire

Si les températures ne varient pas dans le temps, le champs de température est alors une fonction harmonique des variables d'espace. En se limitant au cas unidimensionnel, l'équation de la chaleur s'écrit:

$$\frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} \left(r^n \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (2.30)$$

où :

$n = 0$ ($r = x$)	pour une paroi plane ;
$n = 1$	pour une paroi cylindrique ;
$n = 2$	pour une paroi sphérique.

Remarque :

Si la température dans un corps cylindrique ou sphérique n'est fonction uniquement que de la position radiale, on dira alors que le problème est unidimensionnel.

Cas d'une paroi plane :

Le champ de température est donné par:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad C.L \quad \begin{cases} T = T_1 & \text{pour } x = 0 \\ T = T_2 & \text{pour } x = e \end{cases} \quad (2.31)$$

d'où la distribution de température dans le mur :

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{e} x \quad (2.32)$$

et la densité de flux :

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2) \quad (2.33)$$

ainsi que le flux de chaleur transféré :

$$q_x = A \dot{q}_x = \frac{\lambda A}{e} (T_1 - T_2) \quad (2.34)$$

d'où la résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda A} \quad (2.35)$$

Cas d'une paroi cylindrique :

Le champ de température est donné par :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad C.L \quad \begin{cases} T = T_i & \text{pour } r = R_i \\ T = T_e & \text{pour } r = R_e \end{cases} \quad (2.36)$$

d'où la distribution de température dans la paroi :

$$T(r) = T_e + \frac{T_i - T_e}{\ln\left(\frac{R_i}{R_e}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_e}\right) \quad (2.37)$$

et la densité de flux :

$$\dot{q}_r = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\lambda \frac{T_i - T_e}{\ln\left(\frac{R_i}{R_e}\right)} \frac{1}{r} \quad (2.38)$$

ainsi que le flux de chaleur transféré :

$$q_r = A \dot{q}_r = 2\pi r L \dot{q}_r = 2\pi L \lambda \frac{T_i - T_e}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \quad (2.39)$$

d'où la résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\pi L \lambda} \quad (2.40)$$

Cas d'une paroi sphérique :

Le champ de température est donné par :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \text{C.L.} \quad \begin{cases} T = T_i & \text{pour } r = R_i \\ T = T_e & \text{pour } r = R_e \end{cases} \quad (2.41)$$

d'où la distribution de température dans la paroi :

$$T(r) = T_i + (T_i - T_e) \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_i} \right)}{\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right)} \quad (2.42)$$

et la densité de flux :

$$\dot{q}_r = \lambda \frac{T_i - T_e}{\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right)} \frac{1}{r^2} \quad (2.43)$$

ainsi que le flux de chaleur transféré :

$$q_r = 4\pi\lambda \frac{T_i - T_e}{\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right)} \quad (2.44)$$

d'où la résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right)}{4\pi\lambda} \quad (2.45)$$

2.2.5.2- Echange stationnaire entre un fluide et un mur plan composé

Considérons le mur composé de la figure (Fig.2.8) ci-dessous:

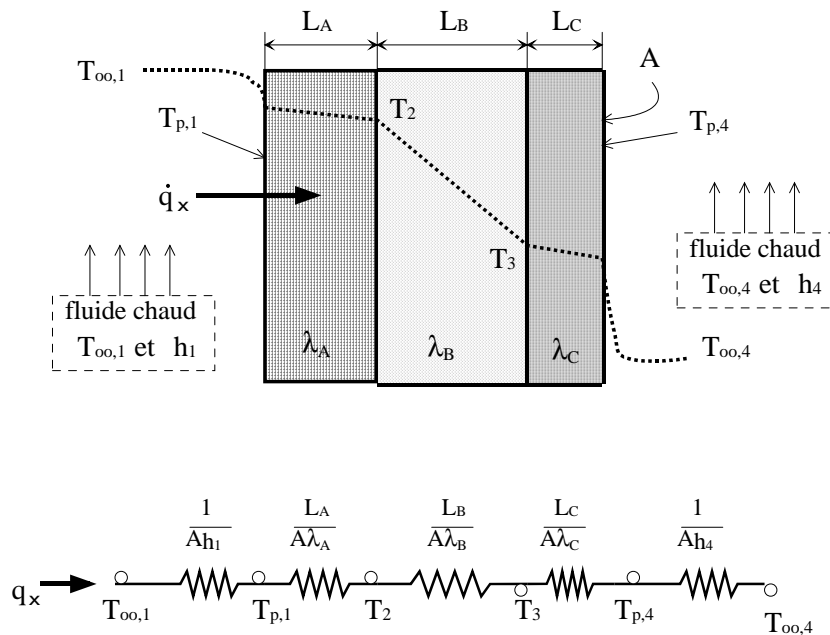


Fig.2.8- Echange thermique entre un fluide et un mur composé.

Le flux de chaleur traversant le mur étant conservé, décomposons le transfert de chaleur à travers ce dernier. Nous avons alors les modes suivants :

- Convection fluide chaud - paroi A :

$$\dot{q}_x = h_1 (T_{\infty,1} - T_{p,1}) \quad (2.46)$$

- Conduction à travers la paroi A :

$$\dot{q}_x = \frac{\lambda_A}{L_A} (T_{p,1} - T_2) \quad (2.47)$$

- Conduction à travers la paroi B :

$$\dot{q}_x = \frac{\lambda_B}{L_B} (T_2 - T_3) \quad (2.48)$$

- Conduction à travers la paroi C :

$$\dot{q}_x = \frac{\lambda_C}{L_C} (T_3 - T_{p,4}) \quad (2.49)$$

- Convection paroi C – fluide froid :

$$\dot{q}_x = h_4 (T_{p,4} - T_{\infty,4}) \quad (2.50)$$

D'autre part, nous pouvons écrire que :

$$\dot{q}_x = h_{global} \Delta T \quad (2.51)$$

d'où l'on détermine le coefficient de transfert global de l'ensemble :

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 + \Delta T_4 + \Delta T_5 = T_{\infty,1} - T_{\infty,4}$$

$$\Delta T = \frac{\dot{q}_x}{h_1} + \frac{\dot{q}_x L_A}{\lambda_A} + \frac{\dot{q}_x L_B}{\lambda_B} + \frac{\dot{q}_x L_C}{\lambda_C} + \frac{\dot{q}_x}{h_4} = \frac{\dot{q}_x}{h_{global}} \quad \text{d'où le coefficient global :}$$

$$\frac{1}{h_{global}} = \frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{\lambda_A} + \frac{L_B}{\lambda_B} + \frac{L_C}{\lambda_C} + \frac{1}{h_4} \quad (2.52)$$

et par suite la somme des résistances des différents composants nous donne la résistance globale du système :

$$R_{th, globale} = \frac{1}{A h_1} + \frac{L_A}{A \lambda_A} + \frac{L_B}{A \lambda_B} + \frac{L_C}{A \lambda_C} + \frac{1}{A h_4} \quad (2.53)$$

Une fois $R_{th, globale}$ déterminée, on calcul le flux de chaleur par la formule :

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{th, globale}} \quad (2.54)$$

et par suite nous pouvons calculer les différentes températures intermédiaires $T_{p,1}$, T_2 , T_3 et $T_{p,4}$ au moyen des relations (2.46)...(2.50) ainsi que la relation (2.3).

2.2.5.3- Echange stationnaire entre un fluide et une paroi cylindrique composée :

Considérons la paroi cylindrique composée de la figure (Fig.2.9) ci-dessous:

La même démarche que celle développée dans le paragraphe précédent nous donne la résistance thermique globale du système :

$$R_{th, globale} = R_{th1} + R_{th2} + R_{th3} + R_{th4} + R_{th5} \quad (2.55)$$

avec

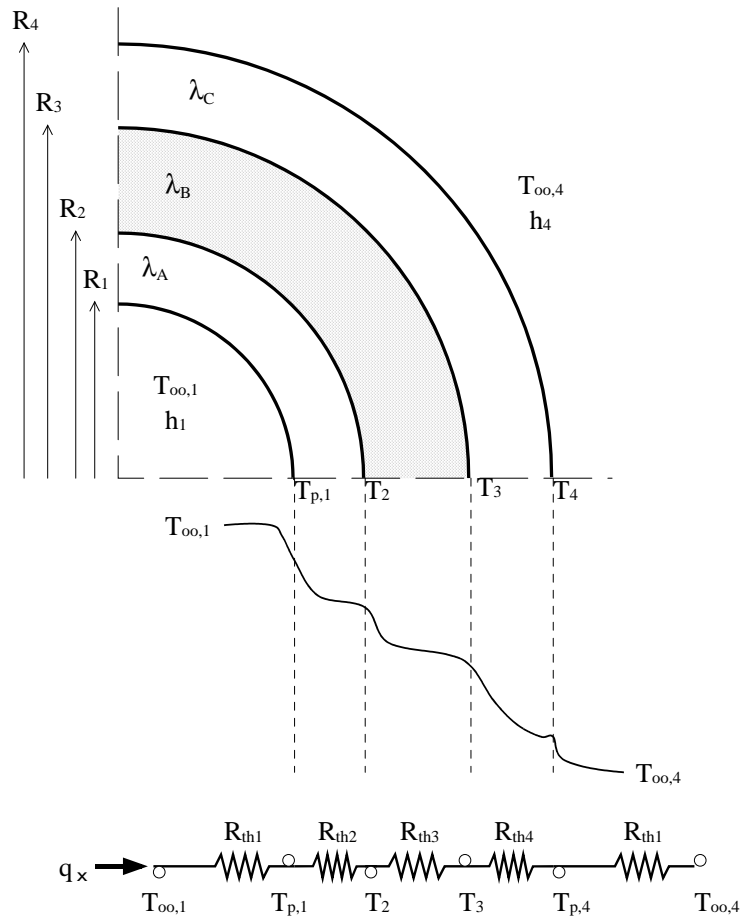


Fig.2.9- Echange thermique entre un fluide et une paroi cylindrique composée.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{th1} = \frac{l}{2\pi R_1 L h_1} \quad ; \quad R_{th2} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi L \lambda_A} \\ R_{th3} = \frac{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)}{2\pi L \lambda_B} \quad ; \quad R_{th4} = \frac{\ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right)}{2\pi L \lambda_C} \\ R_{th5} = \frac{l}{2\pi R_4 L h_4} \end{array} \right. \quad (2.56)$$

et le flux de chaleur traversant la paroi :

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{th, globale}} \quad (2.57)$$

Remarque :

La notion de résistance thermique n'est valable qu'en l'absence du terme source de chaleur interne (source ou puits).

Epaisseur de calorifuge :

La bonne maîtrise des notions de parois composées (bilan thermique et résistance thermique) permet de résoudre une multitude de problèmes pratiques qui tendent tous à minimiser les déperditions calorifiques en utilisant différents matériaux avec différentes épaisseurs. Cependant, l'épaisseur d'un calorifuge ne peut être choisie au hasard car du point de vue thermique, on a tendance à augmenter indéfiniment cette épaisseur pour économiser de l'énergie. Par contre, du point de vue économique, l'amortissement et l'entretien de l'installation augmentent avec l'épaisseur. Il existe donc une épaisseur optimale qui minimise les dépenses globales de l'installation (Fig.2.10).

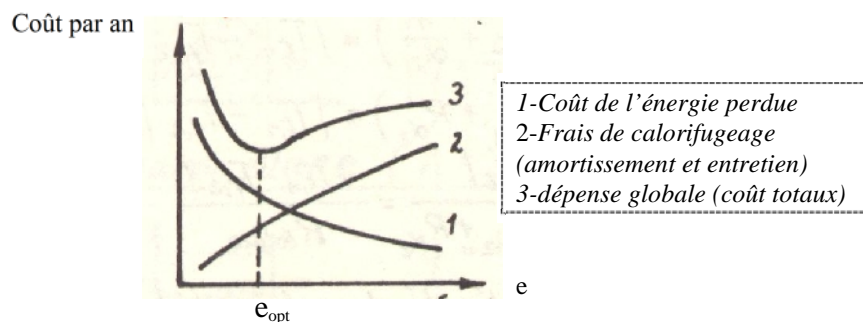


Fig.2.10- Epaisseur optimale d'un calorifuge.

Exemples d'applications :

1- Soit une vitre de 5 mm d'épaisseur ; les températures de l'air ambiant de part et d'autre de la vitre sont : $t_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ et $t_e = -10 \text{ }^\circ\text{C}$. On donne les coefficients de convection intérieur et extérieur : $h_i = 8.141 \text{ W/m}^2\text{K}$ et $h_e = 23.26 \text{ W/m}^2\text{K}$

Déterminer le coefficient global de transmission ainsi que les températures de surface de part et d'autre de la vitre.

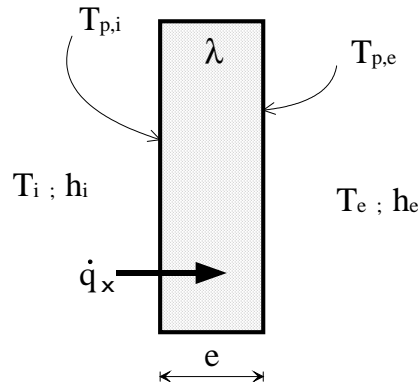


Fig.2.11- Exemple d'application : vitre simple.

$$\frac{1}{h_{global}} = \frac{1}{h_i} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_e} \Rightarrow h_{global} = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_e}} = \underline{5.81 \text{ W/m}^2\text{°K}}$$

$$\dot{q}_x = h_{global} \Delta T = h_{global} (T_i - T_e) = h_{global} (t_i - t_e) = \underline{174.3 \text{ W/m}^2}$$

$$\dot{q}_x = h_i (t_i - t_{p,i}) \Rightarrow t_{p,i} = t_i - \frac{\dot{q}_x}{h_i} = \underline{-1.41 \text{ °C}}$$

$$\dot{q}_x = h_e (t_{p,e} - t_e) \Rightarrow t_{p,e} = t_e + \frac{\dot{q}_x}{h_e} = \underline{-2.50 \text{ °C}}$$

Ce dernier peut aussi être calculé par la relation :

$$\dot{q}_x = \frac{\lambda}{e} (t_{p,i} - t_{p,e}) \Rightarrow t_{p,e} = t_{p,i} - \frac{e \dot{q}_x}{\lambda}$$

2- On considère maintenant les mêmes conditions que précédemment, mais avec un double vitrage composé de deux vitres de 3 mm séparées par un matelas d'air de 5 mm. On admettra pour la conductivité de l'air emprisonné la valeur $\lambda_a = 0.0242 \text{ W/m}^2\text{°K}$.

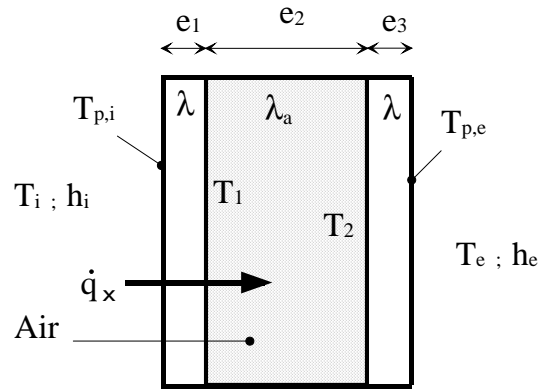


Fig.2.12- Exemple d'application : double vitrage.

$$\frac{1}{h_{global}} = \frac{1}{h_i} + \frac{e_1}{\lambda} + \frac{e_2}{\lambda_a} + \frac{e_3}{\lambda} + \frac{1}{h_e} \Rightarrow h_{global} = \underline{2.63 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\dot{q}_x = h_{global} (t_i - t_e) = \underline{78.9 \text{ W/m}^2}$$

L'emploi d'un double vitrage permet donc, dans ce cas, de diminuer de moitié le flux de chaleur par m^2 de surface c'est-à-dire les pertes vers l'extérieur.

$$\dot{q}_x = h_i (t_i - t_{p,i}) \Rightarrow t_{p,i} = t_i - \frac{\dot{q}_x}{h_i} = \underline{10.3 \text{ }^\circ\text{C}}$$

$$\dot{q}_x = \frac{\lambda}{e_1} (t_{p,i} - t_1) \Rightarrow t_1 = t_{p,i} - \frac{e_1 \dot{q}_x}{\lambda} = \underline{10.0 \text{ }^\circ\text{C}}$$

$$\dot{q}_x = \frac{\lambda}{e_2} (t_1 - t_2) \Rightarrow t_2 = t_1 - \frac{e_2 \dot{q}_x}{\lambda_a} = \underline{-6.3 \text{ }^\circ\text{C}}$$

$$\dot{q}_x = h_e (t_{p,e} - t_e) \Rightarrow t_{p,e} = t_e + \frac{\dot{q}_x}{h_e} = \underline{-6.6 \text{ }^\circ\text{C}}$$

La pose du double vitrage diminue donc l'écart de température entre l'air à l'intérieur et la vitre intérieure :

$$\Delta t = t_i - t_{p,i} = 20 - (-1.41) = \underline{21.41 \text{ }^\circ\text{C}} \quad \text{pour le simple vitrage.}$$

$$\Delta t = t_i - t_{p,i} = 20 - (10.3) = \underline{9.7 \text{ }^\circ\text{C}} \quad \text{pour le double vitrage.}$$

3- Un tube de cuivre recuit recouvert d'une gaine de chlorure de polyvinyle (P.V.C.) peut être utilisé dans les installations de chauffage domestique. Le coefficient de conductibilité thermique de l'ensemble (cuivre + gaine) est de 0.093 W/m °K.

Si la température de surface à l'intérieur est de 70 °C et celle à l'extérieure de 50 °C, déterminer la déperdition calorifique sachant que les diamètres extérieur et intérieur sont respectivement de 18 et 16 mm.

L'équation (2.39) nous donne directement la densité de flux :

$$\dot{q}_r = 2\pi\lambda \frac{T_{int} - T_{ext}}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} = 2\pi \frac{0.093(70 - 50)}{\ln\left(\frac{18}{16}\right)} = \underline{99.22 \text{ W / m.}}$$

La déperdition est donc d'environ 100 W par mètre de tube.

2.2.5.4- Surfaces auxiliaires et ailettes

On a souvent tendance à minimiser les déperditions de chaleur à travers une paroi en utilisant un calorifuge adéquat; mais il arrive que dans certains cas qu'on veut, au contraire, évacuer un flux maximal à travers une surface vers le milieu ambiant par exemple (cas du refroidissement). Quand ce transfert thermique est faible, on peut penser à augmenter la surface d'échange par des ailettes attachées à la paroi en question.

Considérons par exemple le mur plan de la figure (Fig.2.13). Si la température de paroi T_p est fixe, il existe deux moyens de faire augmenter le flux de chaleur. Soit en augmentant le coefficient de convection h par augmentation de la vitesse du fluide, soit en diminuant la température T_∞ . Le fait d'augmenter au maximum le coefficient h ne permet pas d'une part, d'avoir toujours le flux désiré et, d'autre part, les coûts associés peuvent être prohibitifs (pompe, ventilateur,...). La seconde solution de diminuer T_∞ est souvent impraticable.

Examinons maintenant la figure (Fig.2.14) sur laquelle se trouve la solution à ce problème. Dans cette configuration, le flux de chaleur devrait augmenter puisque la surface d'échange à travers laquelle se fait la convection a augmenté. Ceci est dû à l'utilisation d'ailette qui allonge la paroi depuis le mur vers le milieu fluide. La conductivité thermique de l'ailette a un effet négatif sur le transfert. Théoriquement, le matériau de l'ailette doit avoir une grande conductivité afin de minimiser les variations de température depuis sa base jusqu'à son bout. Dans la limite d'une

conductivité thermique infinie, l'ailette considérée sera à la température de la surface de base T_p , et ce en transférant le maximum de chaleur possible vers le milieu fluide.

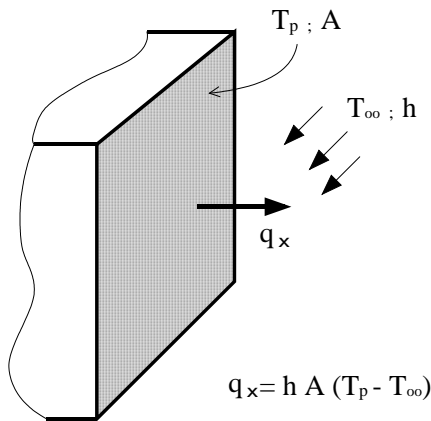


Fig.2.13.-Mur plan sans ailette.

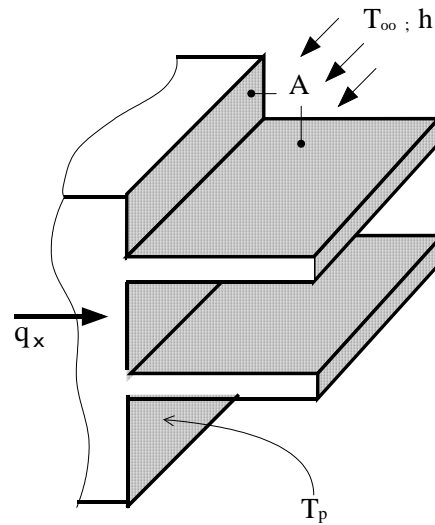


Fig.2.14.- Mur plan aileté.

Les ailettes sont beaucoup utilisées en industrie selon leur formes géométriques (Fig.2.15) et chaque type doit être soigneusement étudié afin de fournir le meilleur rendement possible. Il existe des abaques avec les différents rendements (Fig.2.16).

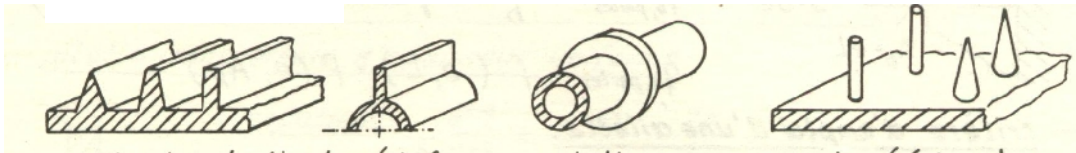


Fig.215.- Différentes formes d'ailettes.

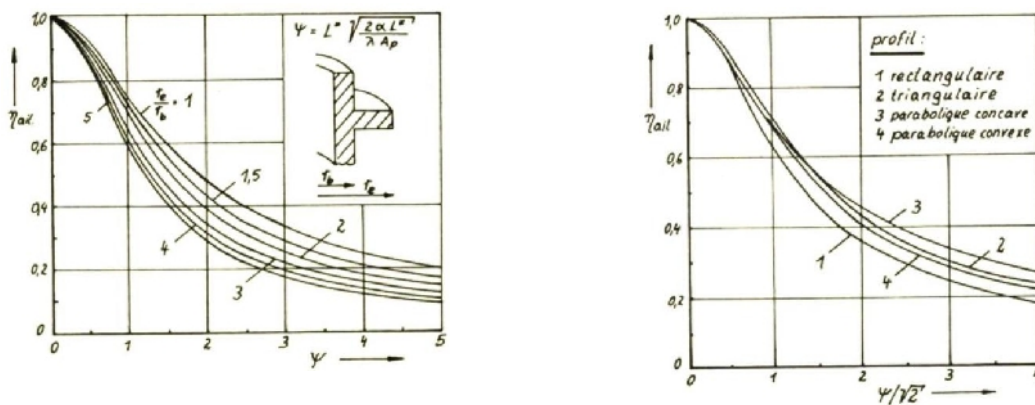


Fig.216.- Rendement des différents types d'ailettes.

Remarque :

L'ailette est toujours placée du côté de la paroi où correspond la plus grande résistance thermique (le plus faible coefficient d'échange).

2.2.5.5- Régime instationnaire

L'équation de la chaleur (2.20) est une équation aux dérivées partielles linéaires du type parabolique. On pourra obtenir la solution générale d'un problème thermique en superposant linéairement des solutions particulières.

On peut obtenir des solutions analytiques lorsque la température ne dépend que d'une seule variable d'espace (x , y ou z). Dans le cas d'un problème unidimensionnel, il est facile de remarquer que, pour un mur d'épaisseur double par exemple soumis aux mêmes conditions thermiques sur les deux faces, le champ de température mettra quatre fois plus de temps pour y pénétrer. La chaleur ne se propage donc pas à une vitesse constante, comme le son ou la lumière.

L'étude des phénomènes instationnaires est extrêmement importante dans la pratique, et il est difficile de trouver une activité humaine où ils n'interviennent pas. En outre, il convient d'ajouter que dans un grand nombre de problèmes thermiques, le régime permanent n'est jamais atteint; d'ailleurs théoriquement, la durée d'établissement d'un régime permanent est infinie mais en pratique, on considère que ce régime est établi quand la température en chaque point du système ne diffère de la température de régime que d'une certaine valeur choisie.

On peut dire que l'instationnaire constitue le cas général et le permanent le cas particulier. Et comme les gradients de température sont souvent beaucoup plus importants en transitoire qu'en permanent, il s'ensuit des dilatations thermiques et des tensions internes d'origine thermique "contraintes thermiques" qui peuvent être beaucoup plus importantes que celles qui existent en régime permanent.

Il existe plusieurs méthodes de résolution de l'équation de la chaleur en particulier ou de l'équation générale de la conduction. Ces méthodes sont choisies selon les conditions aux limites, la géométrie du corps, le type d'équation (dimension, stationnaire ou non, linéaire ou non...). On peut citer parmi ces méthodes: séparation des variables, transformées de Laplace, intégrales, sources et puits, différences finis, volumes finis, éléments finis ainsi que les méthodes graphiques (Binder-Schmidt...), ...etc.

Le but commun à toutes ces méthodes de résolution est de déterminer la distribution de température à l'intérieur du corps ainsi que le flux thermique qui le traverse.

2.3- Transfert de chaleur par convection

Dans un transfert de chaleur par convection, la chaleur est transportée directement par le mouvement macroscopique du fluide, appelé *fluide caloporteur*. Comme nous l'avons déjà mentionné, la convection est un mode de transfert plus rapide que la conduction.

On distingue deux types de convection :

- ◆ Convection forcée : provoquée par la différence de pression sous l'action d'un organe mécanique extérieur (exp : pompe, ventilateur, ...etc).
- ◆ Convection libre (ou naturelle) : provoquée par la différence de densité sous l'effet d'une différence de température (exp : thermosiphon).

La densité de flux de chaleur échangée entre une paroi solide d'aire A et de température T_p et un fluide en mouvement de température T_f (Fig.2.17:) est donnée par la loi de Newton :

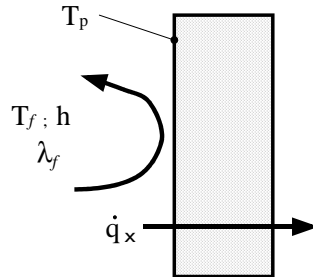


Fig.2.17- Echange de chaleur entre un fluide et une paroi.

$$\dot{q} = \frac{q}{A} = h |T_p - T_f| \quad (2.58)$$

h étant le coefficient de convection en $[W/m^2 \cdot K]$ dont la valeur dépend de nombreux paramètres dont les principaux sont :

- Les caractéristiques du fluide ($\lambda, \rho, C_p, \mu, \beta$) qui sont fonction de la température.
- La température.
- Les caractéristiques géométriques (dimension, forme, rugosité de la surface).
- L'écoulement du fluide (vitesse, régime : laminaire ou turbulent, cause : forcée ou naturelle).

Ordre de grandeur du coefficient de convection h en $[W/m^2 \cdot K]$:

- Convection naturelle : gaz (air) 2 à 50
liquides 80 à 800
- Convection forcée : gaz (0.1 MPa) 10 à 100
gaz (2.5 MPa) 500 à 900
eau 600 à 15000
liquides très visqueux ($10^{-3} \dots 10^{-2}$ N.s/m²) 50 à 500
métaux liquides 4000 à 250000
- Condensation : vapeur d'eau 2000 à 100000
vapeur organique 800 à 2500
vapeur quelconque
- condensation en gouttes 50000 à 400000
- condensation en film 400 à 10000
- Ebullition : eau 1000 à 50000
Liquides organique 1000 à 2500.

2.3.1- Détermination du coefficient de convection

Le coefficient de convection a les mêmes unités que le coefficient de transfert de la chaleur à travers une plaque d'épaisseur finie que nous avons déjà introduit. En fait, on peut comprendre le coefficient h en postulant l'existence d'une couche limite de fluide immobile adhérent à la surface du solide et dont l'épaisseur δ_{th} est très faible et peut être estimée par:

$$\delta_{th} = \frac{\lambda_f}{h} \quad (2.59)$$

où λ_f est la conductibilité thermique du fluide caloporteur.

Il est alors clair que pour augmenter l'échange il faut soit choisir un fluide caloporteur de conductivité élevée ou alors essayer de minimiser l'épaisseur de la couche limite thermique δ_{th} .

2.3.2- Formulation générale du problème de convection

La représentation exacte des processus de transfert par convection pose des problèmes de mécanique des fluides extrêmement difficiles qu'il n'est pas, dans la plupart des cas, possible de

résoudre directement. En effet, d'une part la détermination du coefficient h nécessaire à tout calcul d'échange thermique est souvent basée sur des lois empiriques obtenues dans des conditions particulières puis généralisées et comparées aux résultats expérimentaux par l'analyse dimensionnelle. D'autre part, la solution complète du problème de convection revient à déterminer en tous points et à tout instant les grandeurs caractéristiques du fluide, à savoir:

- La vitesse du fluide définie par ces trois composantes (équation de quantité de mouvement).
- La masse volumique (équation de conservation de la masse).
- La pression (équation d'état).
- La température (équation de conservation de l'énergie).

En associant à ces 6 équations un nombre suffisant de conditions aux limites et initiales, on peut évaluer la quantité de chaleur transférée.

Certains cas particuliers peuvent être résolus en raison de leur relative simplicité ou de leur importance dans les applications pratiques. Mais, dans la majorité des cas, la résolution du système d'équations gouvernantes est très difficile et le recours au moyens de calcul numérique sur ordinateur où à l'expérimentation sont les seules moyens.

Equations de conservation :

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = 0 \quad (2.60)$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{q} \quad (2.61)$$

- Equation de conservation de l'énergie :

$$\operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) = -\frac{dp}{dt} + \rho \frac{d\left(E + \frac{p}{\rho}\right)}{dt} - \Phi \quad (2.62)$$

avec :

Φ étant la fonction de dissipation dont l'expression est donnée dans les ouvrages spécialisés.

E est l'énergie interne.

- Equation d'état :

$$p = \rho R T \quad (2.63)$$

où R est la constante des gaz parfait.

2.3.3- Nombres sans dimension et coefficient de convection

La complexité des phénomènes de convection exige l'utilisation de méthodes permettant de limiter le nombre de paramètres intervenant dans ces phénomènes. En utilisant ces grandeurs physiques et/ou les équations régissantes, on arrive à établir des groupements sans dimension à partir de l'analyse dimensionnelle et la similitude.

Les nombres sans dimension qui interviennent le plus souvent en transfert de chaleur par convection sont :

□ Nombre de Nusselt :

$$N_u = \frac{h L}{\lambda} \quad (2.64)$$

où : h : coefficient de transfert par convection.

L : grandeur caractéristique du solide (longueur ou diamètre).

λ : conductibilité thermique du fluide.

Le nombre de Nusselt permet de comparer le transfert convectif entre le fluide et la surface de la paroi en question au transfert conductif de la couche limite associée.

□ Nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{v L}{\nu} \quad (2.65)$$

où : v : vitesse du fluide.

ν : viscosité cinématique du fluide [m^2/s] avec $\nu = \mu/\rho$

Le nombre de Reynolds permet de comparer les forces d'inertie aux forces visqueuses. Il caractérise le régime d'écoulement (laminaire, mixte ou turbulent).

□ Nombre de Prandtl :

$$P_r = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.66)$$

où : α : diffusivité thermique.

Le nombre de Prandtl permet de comparer la diffusivité de la matière à la diffusivité thermique.

□ Nombre de Grashof :

$$G_r = \frac{\alpha g \rho^2 L^3 \Delta T}{\mu} = \frac{g \beta L^3 \Delta T}{\nu^2} \quad (2.67)$$

où : g : accélération de la pesanteur.

β : coefficient de dilatation volumique du fluide.

ΔT : écart de température caractéristique.

Le nombre de Grashof permet de comparer les forces ascensionnelle multipliées par les forces d'inertie au carré aux forces visqueuses.

L'analyse dimensionnelle permet d'établir une relation de type:

$$N_u = f(R_e, P_r, G_r) \quad (2.68)$$

Nous avons par exemple en régime stationnaire :

- Pour une convection forcée : $N_u = f(P_r, R_e, \text{caractéristiques géométriques})$.
- Pour une convection libre pure : $N_u = f(P_r, G_r, \text{caractéristiques géométriques})$.
- Pour une convection mixte : $N_u = f(P_r, R_e, G_r, \text{caractéristiques géométriques})$.

Ces corrélations expérimentales dépendent de chaque configuration (tubes, parois, objets immergés) et chaque type de convection (naturelle, mixte ou forcée). Elles permettent tous de trouver le nombre de Nusselt à partir duquel il est possible de déterminer le coefficient de transfert par convection h :

$$h = \frac{N_u \lambda}{L} \quad (2.69)$$

2.3.4- Choix du coefficient de convection et calcul du flux de chaleur

La démarche à suivre pour déterminer le coefficient h dans les différentes situations est la suivante:

- Si $\frac{G_r}{R_e^2} \geq 16$: la convection est dite *naturelle*. On calcul alors N_u avec la corrélation expérimentale correspondante puis le coefficient h à partir de la définition de N_u .

- Si $\frac{G_r}{R_e^2} \leq 0.1$: la convection est dite *forcée*. On détermine alors le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent) puis on calcule N_u avec la corrélation adaptée au régime et enfin le coefficient h à partir de la définition de N_u .
- Si $0.1 \leq \frac{G_r}{R_e^2} \leq 16$: la convection est dite *mixte*. On calcule alors N_u comme si la convection était naturelle puis un deuxième N_u comme si la convection était forcée avec les corrélations adaptées à chaque régime d'écoulement. En choisissant le N_u le plus grand, on détermine ainsi le coefficient h à partir de la définition de N_u utilisée.

Remarques :

1. Si la valeur du R_e conduit à une ambiguïté sur la nature du régime d'écoulement, l'ingénieur doit faire intervenir sa propre expérience du problème pour faire son choix.
2. Quand on utilise les corrélations empiriques, il faut faire attention à la température à laquelle les propriétés du fluide sont à évaluer (T_∞ , T_p ou leur moyenne T_m).
3. Les lois d'échange ne dépendent pas seulement du régime d'écoulement mais également de la configuration géométrique. En effet, on trouve dans la littérature beaucoup de corrélations spécifiques aux plaques, tube seul, faisceaux de tubes...etc).
4. Comme le coefficient h est fonction de la température de la paroi T_p , on se trouve souvent dans des cas où cette dernière est inconnue. Il faudra alors estimer une température initiale de la paroi puis procéder par itérations jusqu'à obtenir la précision désirée.

Exemples :

1. De l'air à 477.4 °K et 2 bar est réchauffé durant son passage dans une conduite de 25.4 mm de diamètre à la vitesse de 7.62 m/s. L'apport calorifique est assuré par la condensation de vapeur d'eau sur la paroi extérieure du tube. Le transfert de chaleur est tel que la paroi interne du tube est à une température de 488.7 °K. Calculer le coefficient de convection h ainsi que le flux de chaleur par unité de longueur.

- Caractéristiques du fluide :

température moyenne de l'air : $T_m = 0.5 (488.7 + 477.4) = 483.05 \text{ }^\circ\text{K}$

Pour $T = T_m$, $p = 2 \text{ bar}$ on a $\rho = \frac{p m}{RT} = 1.44 \text{ kg/m}^3$

A partir de tables : $C_p = 1025.9 \text{ J/kg }^\circ\text{K}$, $\mu = 2.615 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m.s}$ $\lambda = 0.0384 \text{ W/m}^\circ\text{K}$
 $P_r = 0.699$, et $\beta = 2.07 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$

$R_e = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{1,44 \cdot 7,62 \cdot 0,0254}{2,615 \cdot 10^{-5}} = 10658$ donc le régime d'écoulement est turbulent ($R_e > 2300$).

$G_r = \frac{\beta g \rho^2 L^3 \Delta T}{\mu^2} = 11402$ $\Delta T = 11.3 \text{ }^\circ\text{K}$ et $L = D$

$\frac{G_r}{R_e^2} = 1 \cdot 10^{-4} \ll 0.1$ donc la convection est forcée.

$N_u = 0.023 R_e^{0.8} P_r^{0.4} = 33.23$ $n=0.4$ car l'air est réchauffé.

$h = \frac{N_u \lambda}{L} = \underline{50.25 \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{K}}$

$q = A h \Delta T = (2 \pi R L) h (T_p - T_f) \Rightarrow \frac{q}{L} = 2 \pi R h (T_p - T_f) = \underline{43.7 \text{ W/m}}$

2. Une paroi verticale d'un four de cuisson d'une hauteur de 0.305 m et en contact avec de l'air à 311 °K. Calculer le coefficient de convection h si la température de surface est de 505,4 °K.

- Caractéristiques du fluide :

température moyenne de l'air : $T_m = 0.5 (311 + 505.4) = 408.2 \text{ }^\circ\text{K}$

Pour $T = T_m$, $p = 1 \text{ bar}$ on a $\rho = \frac{p m}{RT} = 0.865 \text{ kg/m}^3$

A partir de tables : $\mu = 2.331 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m.s}$ $\lambda = 0.0336 \text{ W/m}^\circ\text{K}$
 $P_r = 0.7008$, et $\beta = 2.45 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$

$G_r = \frac{\beta g \rho^2 L^3 \Delta T}{\mu^2} = 1.76 \cdot 10^8$ $\Delta T = 194.4 \text{ }^\circ\text{K}$ et $L = 0.305 \text{ m}$

convection naturelle sur une plaque plane donc :

$$\bar{N}_u = \left[0.825 + \frac{0.387 R_a^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right]^2 \quad \text{avec } R_a : \text{ nombre de Rayleigh}$$

$$R_a = G_r Pr = 1.23 \cdot 10^8 \quad \Rightarrow \quad \bar{N}_u = 64.84$$

et en fin le coefficient de transfert par convection :

$$h = \frac{N_u \lambda}{L} = \underline{7.14 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}}$$

2.4- Transfert de chaleur par rayonnement

Contrairement aux deux autres modes de transfert, le transfert de chaleur par rayonnement ne nécessite aucun support matériel solide ou fluide pour sa propagation. Un exemple très caractéristique de ce mécanisme nous est fourni par le rayonnement solaire qui nous parvient après avoir parcouru une distance considérable dans le vide spatial. Aussi, si l'on ouvre par exemple la porte d'un four très chaud, nous percevons instantanément, même à une certaine distance, une sensation de chaleur sur la peau. Ce phénomène ne saurait être attribué uniquement à un transfert convectif entre le four et notre corps, car on conçoit que les masses d'air ambiant échauffée au voisinage de l'ouverture du four mettent un certains temps à parcourir la distance nous séparant de celle-ci. Ce transfert fait donc intervenir un autre mécanisme physique, qui est le rayonnement électromagnétique, dont la propagation est quasi instantanée.

Rayonnement électromagnétique :

La matière émet des ondes électromagnétiques sous l'effet de diverses excitations. On réunit sous l'appellation de *rayonnement* l'ensemble des échanges d'énergie à distance entre les corps par ondes électromagnétiques. Ces échanges peuvent avoir lieu lorsque les corps sont séparés par le vide ou par n'importe quel milieu intermédiaire suffisamment transparent pour les ondes électromagnétiques.

Le phénomène se manifeste sous divers aspects: ondes hertziennes, lumineuses, thermiques, rayons X, gamma ou cosmiques. Ces rayonnements peuvent être décomposés en un *spectre* constitué de radiations périodiques simples, les radiations *monochromatiques*, caractérisées par leur fréquence ν ou leur longueur d'onde λ .

La figure (Fig2.18) ci-dessous représente le spectre des ondes électromagnétiques depuis les ondes électriques caractérisées par une basse fréquence et une grande longueur d'onde, jusqu'aux rayons cosmiques de haute fréquences et très courtes longueurs d'onde.

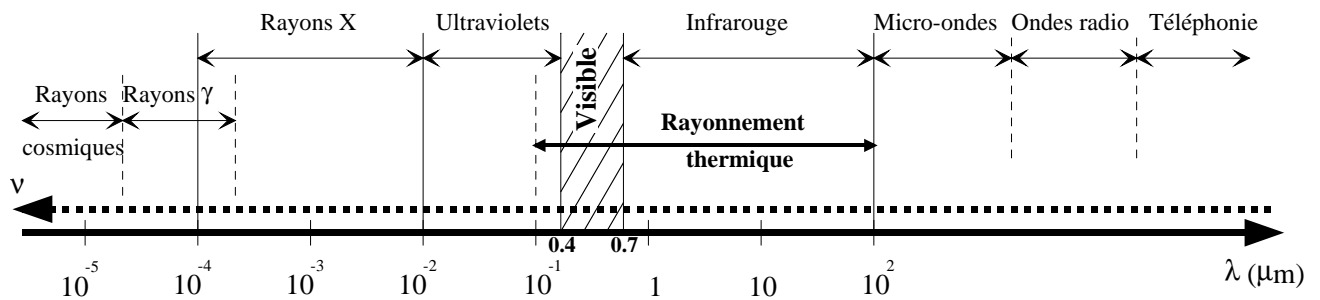


Fig.2.18 - Spectre des radiations électromagnétiques.

- Rayonnement thermique:

Dans ce contexte, nous nous intéressons uniquement au rayonnement thermique ($\lambda=0.1\mu\text{m} \div 100 \mu\text{m}$) qui est celui émis par la matière du fait de sa température. Dans ce domaine nos sens sont capables de percevoir le rayonnement sous forme d'une sensation de chaleur.

2.4.1- Réception du rayonnement par un corps

Lorsque un rayonnement atteint la surface d'un corps, une fraction ρ de la puissance totale incidente est réfléchi, c'est-à-dire renvoyé sans avoir pénétré dans le matériau, une autre fraction α est absorbée dans la masse du corps constituant un apport énergétique pour ce dernier, et une 3^{ème} fraction τ peut être transmise (traverse le corps et ressort de l'autre coté), (Fig.2.19).

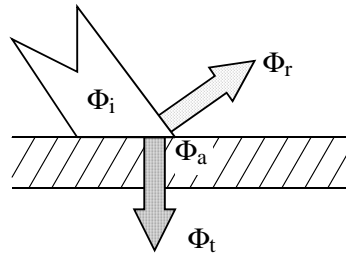


Fig.2.19- Réception du rayonnement par un corps.

Si ϕ_i , ϕ_a , ϕ_r , ϕ_t sont respectivement les flux totaux *incident*, *absorbé*, *réfléchi* et *transmis*, on désigne sous le nom de:

- *Absorptivité* (totale) la quantité :

$$\alpha = \frac{\phi_a}{\phi_i} \quad (2.70)$$

- *Réfectivité* (totale) la quantité :

$$\rho = \frac{\phi_r}{\phi_i} \quad (2.71)$$

- *Transmittivité* (totale) la quantité :

$$\tau = \frac{\phi_t}{\phi_i} \quad (2.72)$$

Ces trois grandeurs sont donc liées par la relation:

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (2.73)$$

Les paramètres α , ρ et τ caractérisent de manière globale le comportement d'un corps vis-à-vis du rayonnement qu'il reçoit. Ce sont donc des grandeurs totales hémisphériques.

- **Remarques:**

- * Les grandeurs *totales* sont indépendantes de λ (sinon: grandeurs monochromatiques).
- * Les grandeurs *hémisphériques* sont indépendantes de la direction (sinon: grandeurs directionnelles).

- **Cas particuliers:**

- * Pour les corps opaques on a: $\tau = 0$ donc $\alpha + \rho = 1$.

* Pour les corps transparents on a: $\alpha = 0$ et $\tau = 1$ donc $\rho = 0$ (par exemple pour le verre).

Or, dans bien des cas, les propriétés radiatives des corps varient avec la longueur d'onde, la direction du rayonnement et aussi l'état de surface. Les surfaces très rugueuses, parfaitement dépolies, réfléchissent le rayonnement de manière assez diffuse. Un diffuseur parfait répartirait dans l'espace le rayonnement réfléchi de manière identique dans toutes les directions. Les surfaces que l'on rencontre dans la pratique ont généralement un comportement intermédiaire entre ces deux cas extrêmes, et leur évolution par vieillissement les rapproche plutôt de la réflexion diffuse. En l'absence de données plus précises sur les propriétés radiatives des matériaux et aussi pour ne pas rendre l'analyse trop difficile, on se limite à effectuer les calculs d'échanges radiatifs, dans l'une ou l'autre de ces deux hypothèses extrêmes, ou avec les deux successivement, afin de situer la marge d'incertitude correspondant sur le résultat final.

En ce qui concerne l'influence de la composition spectrale du rayonnement incident: chaque fois que c'est possible, dans les calculs d'échanges radiatifs, on fait l'hypothèse que tous les matériaux en présence sont *gris*, c'est-à-dire non sélectifs vis-à-vis de la longueur d'onde du rayonnement. Dans ces conditions, pour chaque corps on a:

$$\alpha_\lambda = \alpha ; \rho_\lambda = \rho ; \tau_\lambda = \tau \quad (2.74)$$

La figure (Fig.2.20) nous donne la courbe de transmission $\tau_\lambda(\lambda)$ d'un verre avec diverses épaisseurs. On constate que le verre est pratiquement transparent pour le rayonnement visible; $\tau_{visible}=0.90$, tandis qu'il est totalement opaque à l'infrarouge $\tau_{IR} \approx 0$. Cette propriété justifie d'ailleurs son utilisation comme couverture dans les serres et les capteurs solaires: le verre transmet le rayonnement solaire, qui pénètre dans l'enceinte (courtes longueurs d'ondes), mais "barre", par absorption, le passage au rayonnement infrarouge des corps qui se trouvent à l'intérieur de l'enceinte.

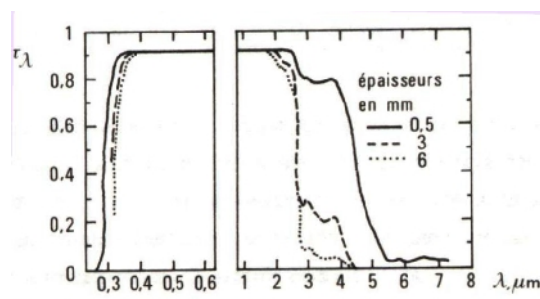


Fig.2.20- Exemple de courbe de transmission du verre.

2.4.2- Loi de Stefan-Boltzmann

L'énergie rayonnée par une surface est proportionnelle à sa température élevée à la puissance 4. Elle exprime le flux de chaleur émis ou émittance en $[W/m^2]$:

$$M = \varepsilon(T) \sigma T^4 \quad (2.75)$$

ε : émissivité de la surface.

σ : constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$.

Le corps noir est un corps idéal qui absorbe toutes les radiations et émet le maximum d'énergie: l'émissivité d'un corps noir est égale à 1. Les corps réels ont une émissivité inférieure à 1. Les produits alimentaires tout comme les corps organiques en général ont une émissivité assez élevée, de l'ordre de 0.8 à 0.95. Les corps métalliques peuvent avoir une émissivité très faible, selon leur état de surface et leur température.

ε représente en fait la valeur moyenne des émissivités monochromatiques et directionnelles, prises sur l'ensemble du domaine de variation de ces grandeurs (Fig.2.21). Cette émissivité grise et diffuse (ou isotrope) pourra dépendre par contre de la température du corps.

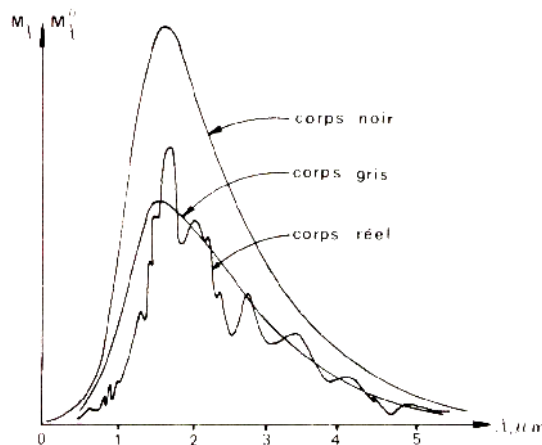


Fig.2.21.- Comparaison entre les émittances de corps noir, réel de même température et gris.

2.4.3- Loi de Kirchhoff

Le calcul du transfert de chaleur par rayonnement entre deux corps est assez complexe car la position et la géométrie des corps influence largement cet échange. Dans le cas d'un corps

convexe placé dans une enceinte concave d'émissivité 1, la puissance de chauffe nette transférée au corps convexe est égale à:

$$q = \varepsilon_{corps} A_{corps} \sigma (T_{enceinte}^4 - T_{corps}^4) \quad (2.76)$$

Cette relation est basée sur une propriété importante des corps gris (corps dont l'émissivité ε est indépendante de la longueur d'onde λ): le facteur d'absorption α est égal à l'émissivité:

$$\alpha(T) = \varepsilon(T) \quad (2.77)$$

Elle relie donc les propriétés émissives et absorbantes.

En général $\alpha \neq \varepsilon$ sauf pour les corps noirs ($\alpha = \varepsilon = 1$).

2.4.4- Loi de Planck et de Wien

La loi de Stefan-Boltzmann donne l'émittance globale de rayonnement. La répartition spectrale de ce rayonnement pour un corps noir est donnée par la loi de Planck représentée graphiquement par la figure (Fig.2.22) ci-dessous et donnée par la relation:

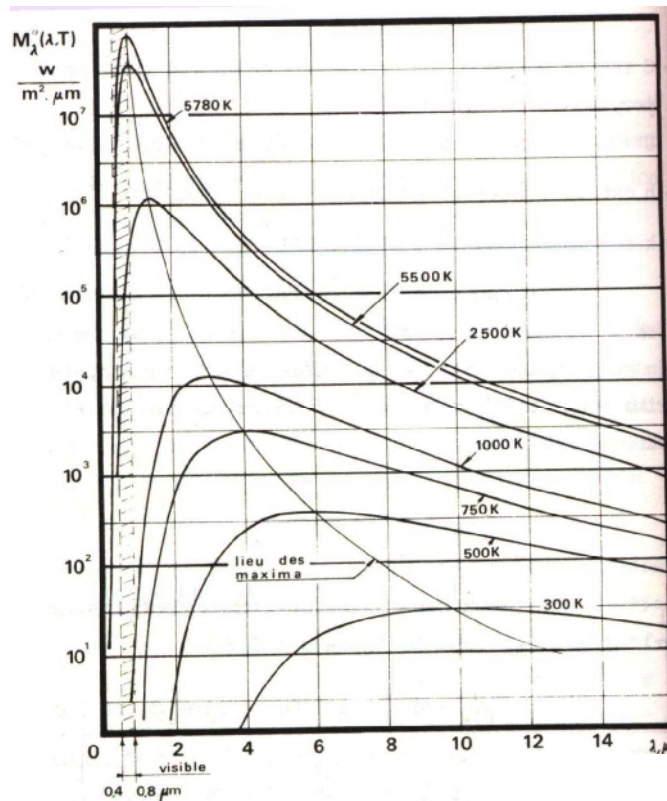


Fig.2.22- Distribution d'énergie du rayonnement émis par le corps noir selon la loi de Planck.

$$M_{\lambda}^0 = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (2.78)$$

où : $C_1 = 3.741 \cdot 10^{-16} \text{ Wm}^2$,

$C_2 = 0.014388 \text{ m}^\circ\text{K}$,

M_{λ}^0 en $[\text{W}/\text{m}^3]$, λ en $[\text{m}]$ et T en $[\text{K}]$.

On remarque qu'à toute température, l'émittance monochromatique (partie de l'émittance globale émise à une longueur d'onde donnée) suit une courbe de distribution admettant un maximum pour une certaine longueur d'onde maximale λ_{max} . La loi de Wien (dérivée de la loi de Planck) permet de calculer aisément ce maximum en $[\mu\text{m}]$:

$$\lambda_{max} = \frac{2896}{T}$$

(2.79) □

2.5.5- Echange d'énergie entre deux surfaces grises

Considérons l'échange de chaleur par rayonnement entre deux surfaces grises séparées par un milieu non absorbant (Fig.2.23). Le flux de chaleur émis par rayonnement de S_1 vers S_2 est donné par:

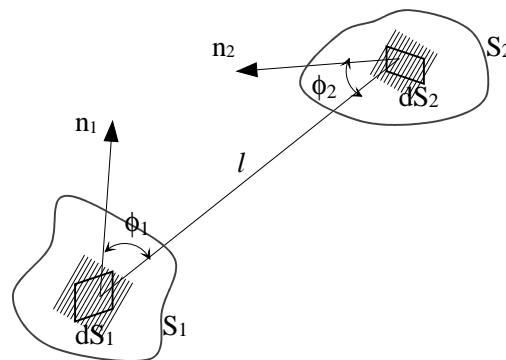


Fig.2.23- Echange entre deux surfaces grises.

$$\phi_{12} = F_{12} S_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma |T_1^4 - T_2^4| \quad (2.80)$$

F_{12} : facteur d'angle (de forme ou de position) de S_1 vers S_2 . Il se calcul par la relation:

$$F_{12} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 ds_1 ds_2}{\pi l^2} \quad (2.81)$$

F_{12} est un facteur sans dimension qui représente la fraction du flux total hémisphérique de S_1 qui atteint S_2 .

- Cas où l'un des corps entoure complètement l'autre:

Le schéma est donné par la figure (Fig.2.24) ci-dessous :

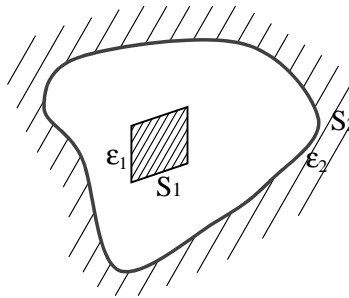


Fig.2.24- Corps entouré complètement par un autre.

$$\phi_{12} = S_1 \varepsilon_{12} \sigma |T_1^4 - T_2^4| \quad (2.82)$$

avec :

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (2.83)$$

Pour évaluer le facteur de forme d'un système radiatif, on décompose le système en surfaces simples dont on détermine les facteurs de forme soit par calcul (relations 2.81) soit par abaque (Fig.2.25), soit immédiatement dans les cas simples.

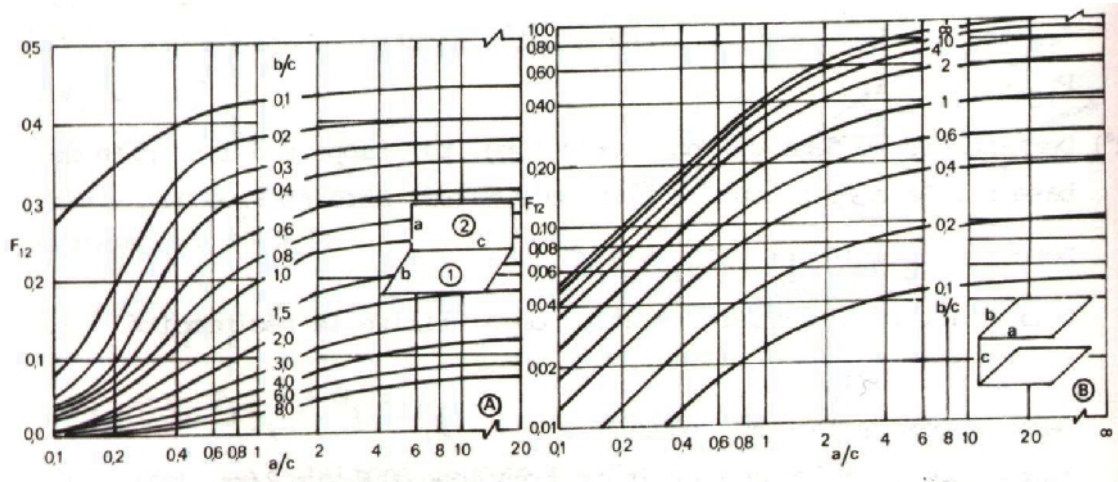


Fig.2.25- Abaques pour le calcul du facteurs de forme.

Remarque:

Le facteur de forme est *purement géométrique*, il ne dépend pas de la nature de la surface.

2.4.6- Coefficient d'échange thermique par rayonnement

Le flux de chaleur échangé par rayonnement entre S_1 et S_2 est donnée par:

$$\phi_{12} = S_1 h_r (T_1 - T_2) \tag{2.84}$$

En comparant les relations (2.82) et (2.80) on en déduit la valeur de h_r soit:

$$h_r = \sigma \varepsilon_{12} (T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2) \tag{2.85}$$

Si $|T_1 - T_2| \leq 100^\circ K$, on peut utiliser la formulation approchée de (2.85) et qui facilite les calculs :

$$h_r \approx 4 \varepsilon_1 \sigma T_m^4 \tag{2.86}$$

où T_m est la température moyenne donnée par : $T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$

Cette formule est valable dans la majorité des cas, très fréquents en pratique, où S_1 est un corps convexe gris et diffusant placé dans une enceinte de grandes dimensions ($\varepsilon_{12} = \varepsilon_1$).

Comme dans de nombreux cas, l'une des températures T_1 ou T_2 est généralement inconnue. Il faut alors se donner au départ une estimation de sa valeur pour évaluer h_r , quitte à reprendre cette estimation par la suite, au cours d'un calcul itératif.

Exemple d'application: Bilan d'un capteur solaire plan.

Un capteur plan destiné au chauffage des habitations ou à la production d'eau chaude sanitaire est essentiellement constitué (Fig.2.26):

- d'un panneau "noir" appelé *absorbeur*, pourvu d'un réseau de tubulures dans lesquelles circule un fluide caloporteur drainant les calories absorbées vers leur lieu d'utilisation ou stockage.
- d'une *couverture* généralement en verre, simple ou double, destinée à réduire les pertes vers l'avant de l'absorbeur, par rayonnement (effet de serre) et par convection (effet de la lame d'air immobile).
- d'un boîtier contenant le tout et dont les parois sont tapissées d'une couche isolante destinée à réduire les pertes de l'absorbeur vers l'arrière ou les côtés.

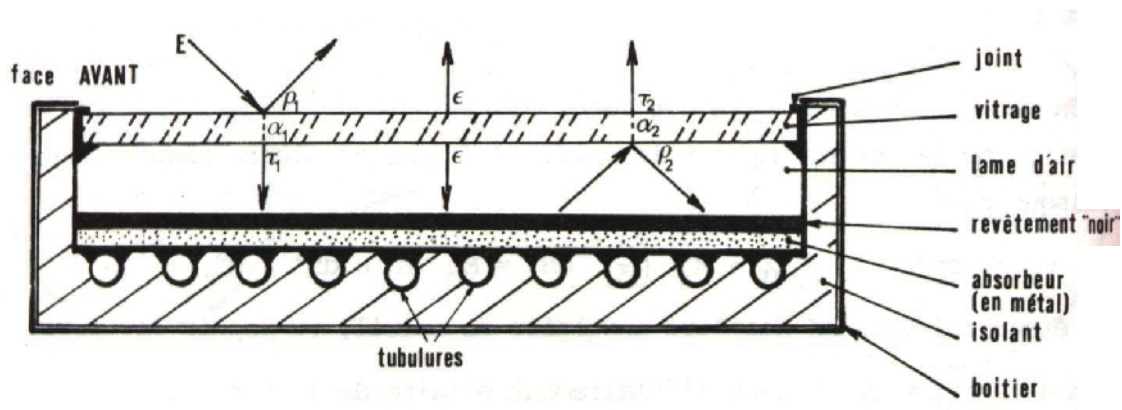


Fig.2.26- Schéma d'un capteur solaire. Bilan énergétique simplifié.

Simplifions le problème en ne tenant compte que des échanges radiatifs et proposons nous dévaluer les températures d'équilibre atteintes par l'absorbeur et par le vitrage lorsque la circulation du fluide caloporteur a été interrompue (il n'y a donc plus d'évacuation de calories par le fluide). On supposera, de plus, qu'il n'y a pas de pertes thermiques par le fond du boîtier.

On donne les propriétés radiatives moyennes du vitrage dans deux bandes spectrales différentes, celle du rayonnement solaire, $\lambda < 2.5 \mu\text{m}$, et celle des rayonnements de "basse température", $\lambda > 2.5 \mu\text{m}$.

bande spectrale	absorptivité	réflectivité	Transmittivité
$0.5 \leq \lambda \leq 2.5 \mu\text{m}$	$\alpha_1 = 0$	$\rho_1 = 0.05$	$\tau_1 = 0.95$
$\lambda > 2.5 \mu\text{m}$	$\alpha_2 = 0.65$	$\rho_2 = 0.30$	$\tau_2 = 0.05$

On appellera E l'éclairement solaire du vitrage, d'environ 1000 W/m^2 . T et T_1 seront les températures respectives de l'absorbeur et de la vitre, supposés isothermes (la circulation du fluide étant arrêtée).

Etablissons les bilans thermiques en régime permanent de l'absorbeur et de la vitre. Ces bilans porteront sur l'unité de surface ($S = 1 \text{ m}^2$).

- Bilan de la surface noire de l'absorbeur:

L'équilibre thermique se traduit par ce que cette surface absorbe et ce qu'elle émet comme énergie:

$$\phi_e = \phi_{a1} + \phi_{a2} + \phi_{a3} \quad \square \square$$

(2.87) \square

Avec :

$$\phi_e = \sigma T^4 \quad ; \quad \phi_{a1} = \tau_1 E \quad ; \quad \phi_{a2} = \rho_2 \sigma T^4 \quad ; \quad \phi_{a3} = \varepsilon \sigma T_1^4 \quad (2.88)$$

ϕ_{a1} étant la fraction de l'éclairement solaire E de la vitre transmise par celle-ci. Cette quantité est entièrement absorbée par la surface.

ϕ_{a2} est la fraction réfléchiée par la vitre du rayonnement émis par la surface noire (et qui revient donc sur celle-ci).

ϕ_{a3} est le rayonnement émis par la vitre, du fait de sa température T_1 , vers la surface.

ϕ_e est le rayonnement émis par la face noire en direction de la vitre.

- Bilan de la vitre:

De même que pour l'absorbeur, nous avons à l'équilibre pour la vitre:

$$\phi_e = \phi_{a1} + \phi_{a2} + \phi_{a3} \quad \square \square$$

(2.89) \square

Avec :

$$\phi_e = 2 \varepsilon \sigma T_l^4 \quad ; \quad \phi_{a1} = \alpha_1 E \quad ; \quad \phi_{a2} = \alpha_2 \sigma T^4 \quad ; \quad \phi_{a3} = \alpha_3 \sigma T_a^4 \quad (2.90)$$

ϕ_{a1} étant la fraction absorbée du rayonnement solaire.

ϕ_{a2} est la fraction absorbée du rayonnement émis par la surface noire.

ϕ_{a3} est la fraction absorbée du rayonnement de l'environnement, de température T_a , au prorata d'une absorptivité α_3 .

ϕ_e est la puissance émise par les deux faces de la vitre, de température T_l et d'émissivité ε .

En combinant les deux équations (2.87) et (2.89) et avec les valeurs numériques adoptées, on trouve la température de l'absorbeur $T = 460 \text{ °K}$ ($t = 187 \text{ °C}$). La température de la vitre T_l peut être calculée par la relation (2.89) à condition de connaître l'émissivité ε de la vitre à cette température.

Remarques:

- 1- Cette application repose sur les propriétés de la courbe de transmission du verre. Ce matériau est pratiquement transparent pour le rayonnement solaire ($\tau_1 = 0.95$) presque entièrement situé dans le visible, mais transmet peu de rayonnement au-delà de $2.5 \mu\text{m}$ ($\tau_2 = 0.05$) et absorbe pratiquement tout le rayonnement de température ambiante ($\alpha_3 \approx 1$) dont le maximum se situe aux environs de $10 \mu\text{m}$ de longueur d'onde. Le capteur solaire utilise donc le principe de ce que l'on appelle l'*effet de serre*.
- 2- En toute rigueur il aurait fallu, dans le bilan de la surface noire de l'absorbeur, tenir compte de la fraction du rayonnement ambiant transmise par la vitre en direction du panneau noir. Mais comme $\alpha_3 \approx 1$, ce terme serait alors négligeable.

