Travaux Pratiques TP N°1

==

Dr. Laid MESSAOUDI

Département de Mécanique

Université de Batna

==============================

LMD : Génie Energétique

Matière : Outils Numériques

2009/2010

==

Approximations centrées

Dérivée d'ordre 1

restart : $N := 2$:

$Eq1 := f(x+h) = convert(taylor(f(x+h), h, N), polynom)$

$$f(x+h) = f(x) + \mathrm{D}(f)(x)\,h \tag{1.1.1}$$

$Eq2 := f(x-h) = convert(taylor(f(x-h), h, N), polynom)$

$$f(x-h) = f(x) - \mathrm{D}(f)(x)\,h \tag{1.1.2}$$

$Eq3 :=$ Eq1 - Eq2

$$f(x+h) - f(x-h) = 2\,\mathrm{D}(f)(x)\,h \tag{1.1.3}$$

$\mathrm{D}(f)(x) = solve(Eq3, \mathrm{D}(f)(x))$

$$\mathrm{D}(f)(x) = \frac{1}{2}\,\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \tag{1.1.4}$$

Dérivée d'ordre 2

restart : $N := 3$:

$Eq1 := f(x+h) = convert(taylor(f(x+h), h, N), polynom)$

$$f(x+h) = f(x) + \mathrm{D}(f)(x)\,h + \frac{1}{2}\,\mathrm{D}^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{1.2.1}$$

$Eq2 := f(x-h) = convert(taylor(f(x-h), h, N), polynom)$

$$f(x-h)=f(x)-D(f)(x)\,h+\frac{1}{2}\,D^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{1.2.2}$$

$Eq3 := Eq1 + Eq2$

$$f(x+h)+f(x-h)=2\,f(x)+D^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{1.2.3}$$

$D^{(2)}(f)(x)=solve\big(Eq3, D^{(2)}(f)(x)\big)$

$$D^{(2)}(f)(x)=-\frac{2\,f(x)-f(x+h)-f(x-h)}{h^2} \tag{1.2.4}$$

Approximations décentrées d'ordre 1

Approximation décentrée avant pour la dérivée première

$restart : N := 2 :$
$Eq1 := f(x+h)=convert(taylor(f(x+h), h, N), polynom)$

$$f(x+h)=f(x)+D(f)(x)\,h \tag{2.1.1}$$

$D(f)(x)=solve(Eq1, D(f)(x))$

$$D(f)(x)=-\frac{f(x)-f(x+h)}{h} \tag{2.1.2}$$

Approximation décentrée avant pour la dérivée seconde

$restart : N := 3 :$
$Eq1 := f(x+h)=convert(taylor(f(x+h), h, N), polynom)$

$$f(x+h)=f(x)+D(f)(x)\,h+\frac{1}{2}\,D^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{2.2.1}$$

$Eq2 := f(x+2\cdot h)=convert(taylor(f(x+2\cdot h), h, N), polynom)$

$$f(x+2\,h)=f(x)+2\,D(f)(x)\,h+2\,D^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{2.2.2}$$

$Eq3 := Eq2 - 2\cdot Eq1$

$$f(x+2\,h)-2\,f(x+h)=-f(x)+D^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{2.2.3}$$

$D^{(2)}(f)(x)=solve\big(Eq3, D^{(2)}(f)(x)\big)$

$$D^{(2)}(f)(x)=\frac{f(x)+f(x+2\,h)-2\,f(x+h)}{h^2} \tag{2.2.4}$$

Approximation décentrée arrière pour la dérivée première

$restart : N := 2 :$
$Eq1 := f(x-h)=convert(taylor(f(x-h), h, N), polynom)$

$$f(x-h)=f(x)-D(f)(x)\,h \tag{2.3.1}$$

$D(f)(x)=solve(Eq1, D(f)(x))$

$$D(f)(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \qquad \textbf{(2.3.2)}$$

Approximation décentrée arrière pour la dérivée seconde

$restart : N := 3 :$

$Eq1 := f(x-h) = convert(taylor(f(x-h), h, N), polynom)$

$$f(x-h) = f(x) - D(f)(x)\, h + \frac{1}{2} D^{(2)}(f)(x)\, h^2 \qquad \textbf{(2.4.1)}$$

$Eq2 := f(x-2\cdot h) = convert(taylor(f(x-2\cdot h), h, N), polynom)$

$$f(x-2h) = f(x) - 2\, D(f)(x)\, h + 2\, D^{(2)}(f)(x)\, h^2 \qquad \textbf{(2.4.2)}$$

$Eq3 := Eq2 - 2\cdot Eq1$

$$f(x-2h) - 2 f(x-h) = -f(x) + D^{(2)}(f)(x)\, h^2 \qquad \textbf{(2.4.3)}$$

$D^{(2)}(f)(x) = solve\left(Eq3, D^{(2)}(f)(x)\right)$

$$D^{(2)}(f)(x) = \frac{f(x) + f(x-2h) - 2 f(x-h)}{h^2} \qquad \textbf{(2.4.4)}$$

Approximations décentrées d'ordre 2

Approximation décentrée avant pour la dérivée première

$restart : N := 3 :$

$Eq1 := f(x+h) = convert(taylor(f(x+h), h, N), polynom)$

$$f(x+h) = f(x) + D(f)(x)\, h + \frac{1}{2} D^{(2)}(f)(x)\, h^2 \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

$Eq2 := f(x+2\cdot h) = convert(taylor(f(x+2\cdot h), h, N), polynom)$

$$f(x+2h) = f(x) + 2\, D(f)(x)\, h + 2\, D^{(2)}(f)(x)\, h^2 \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

$Eq3 := \mathrm{Eq2} - 4\cdot Eq1$

$$f(x+2h) - 4 f(x+h) = -3 f(x) - 2\, D(f)(x)\, h \qquad \textbf{(3.1.3)}$$

$D(f)(x) = solve(Eq3, D(f)(x))$

$$D(f)(x) = -\frac{1}{2}\, \frac{3 f(x) + f(x+2h) - 4 f(x+h)}{h} \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

Approximation décentrée arrière pour la dérivée première

$restart : N := 3 :$

$Eq1 := f(x-h) = convert(taylor(f(x-h), h, N), polynom)$

$$f(x-h) = f(x) - D(f)(x)\, h + \frac{1}{2} D^{(2)}(f)(x)\, h^2 \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

$Eq2 := f(x-2\cdot h) = convert(taylor(f(x-2\cdot h), h, N), polynom)$

$$f(x-2h) = f(x) - 2\, D(f)(x)\, h + 2\, D^{(2)}(f)(x)\, h^2 \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

$Eq3 := \mathrm{Eq2} - 4 \cdot Eq1$

$$f(x-2h) - 4f(x-h) = -3f(x) + 2\,\mathrm{D}(f)(x)\,h \tag{3.2.3}$$

$\mathrm{D}(f)(x) = solve(Eq3, \mathrm{D}(f)(x))$

$$\mathrm{D}(f)(x) = \frac{1}{2}\,\frac{3f(x) + f(x-2h) - 4f(x-h)}{h} \tag{3.2.4}$$

Approximation décentrée avant pour la dérivée seconde

$restart : N := 3 :$

$Eq1 := f(x+h) = convert(taylor(f(x+h), h, N), polynom)$

$$f(x+h) = f(x) + \mathrm{D}(f)(x)\,h + \frac{1}{2}\,\mathrm{D}^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{3.3.1}$$

$Eq2 := f(x+2\cdot h) = convert(taylor(f(x+2\cdot h), h, N), polynom)$

$$f(x+2h) = f(x) + 2\,\mathrm{D}(f)(x)\,h + 2\,\mathrm{D}^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{3.3.2}$$

$Eq3 := f(x+3\cdot h) = convert(taylor(f(x+3\cdot h), h, N), polynom)$

$$f(x+3h) = f(x) + 3\,\mathrm{D}(f)(x)\,h + \frac{9}{2}\,\mathrm{D}^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{3.3.3}$$

$Eq4 := Eq3 - 4\cdot Eq2 + 5\cdot Eq1$

$$f(x+3h) - 4f(x+2h) + 5f(x+h) = 2f(x) - \mathrm{D}^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{3.3.4}$$

$\mathrm{D}^{(2)}(f)(x) = solve\left(Eq4, \mathrm{D}^{(2)}(f)(x)\right)$

$$\mathrm{D}^{(2)}(f)(x) = \frac{2f(x) - f(x+3h) + 4f(x+2h) - 5f(x+h)}{h^2} \tag{3.3.5}$$

Approximation décentrée arrière pour la dérivée seconde

$restart : N := 3 :$

$Eq1 := f(x-h) = convert(taylor(f(x-h), h, N), polynom)$

$$f(x-h) = f(x) - \mathrm{D}(f)(x)\,h + \frac{1}{2}\,\mathrm{D}^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{3.4.1}$$

$Eq2 := f(x-2\cdot h) = convert(taylor(f(x-2\cdot h), h, N), polynom)$

$$f(x-2h) = f(x) - 2\,\mathrm{D}(f)(x)\,h + 2\,\mathrm{D}^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{3.4.2}$$

$Eq3 := f(x-3\cdot h) = convert(taylor(f(x-3\cdot h), h, N), polynom)$

$$f(x-3h) = f(x) - 3\,\mathrm{D}(f)(x)\,h + \frac{9}{2}\,\mathrm{D}^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{3.4.3}$$

$Eq4 := Eq3 - 4\cdot Eq2 + 5\cdot Eq1$

$$f(x-3h) - 4f(x-2h) + 5f(x-h) = 2f(x) - \mathrm{D}^{(2)}(f)(x)\,h^2 \tag{3.4.4}$$

$\mathrm{D}^{(2)}(f)(x) = solve\left(Eq4, \mathrm{D}^{(2)}(f)(x)\right)$

$$\mathrm{D}^{(2)}(f)(x) = \frac{2f(x) - f(x-3h) + 4f(x-2h) - 5f(x-h)}{h^2} \tag{3.4.5}$$