Equation de Diffusion 1D

==========================

Dr. Laïd MESSAOUDI

Département de Mécanique

Université de Batna

==========================

Master : Energétique

Matière : Méthodes Numériques Appliquées II

==========================

2011/2012

==

EXEMPLE 5

Détermination de la distribution de temperature $T(x)$ à travers une barre de section A, de conductivité thermique k et de longueur L dont les extrémités sont soumises aux (C.L.):

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{d}{dx}T(x)\right)=0$$

Conditions aux limites (C.L):

$$T(0)=T_A=50,$$
$$q(L)=q=0,$$

Solution

```
> Restart : Digits := 4 :
> L := 0.15; λ := 1000; S := 0.01; ndx := 3;
```

$$L := 0.15$$
$$\lambda := 1000$$
$$S := 0.01$$
$$ndx := 3 \qquad \textbf{(1.1)}$$

```
> δx := L/ndx ;
```

$$\delta x := 0.05000 \qquad \textbf{(1.2)}$$

> $i_{\max} := ndx;$

$$i_{max} := 3 \tag{1.3}$$

Nombre d'équations:

> $Ne := i_{\max}$

$$Ne := 3 \tag{1.4}$$

Abscisses des noeuds:

> $x[0] := 0;$
    for i **from** 1 **to** Ne **do**
        $x[i] := \frac{\delta x}{2} + (i-1)\cdot\delta x;$
    end do;
    $x[i_{\max}+1] := L;$

$$x_0 := 0$$
$$x_1 := 0.02500$$
$$x_2 := 0.07500$$
$$x_3 := 0.1250$$
$$x_4 := 0.15 \tag{1.5}$$

Conditions aux Limites:

> $q := 0;$
   $T[0] := 50;$

$$q := 0$$
$$T_0 := 50 \tag{1.6}$$

Noeuds internes:

> **for** i **from** 2 **to** $i_{\max} - 1$ **do**
        $Sp[i] := 0;$
        $Su[i] := 0;$
        $a_W[i] := \frac{\lambda\cdot S}{\delta x};$
        $a_E[i] := a_W[i];$
        $a_P[i] := a_W[i] + a_E[i] - Sp[i];$
    end do;

$$Sp_2 := 0$$
$$Su_2 := 0$$
$$a_{W_2} := 200.0$$
$$a_{E_2} := 200.0$$
$$a_{P_2} := 400.0 \tag{1.7}$$

Noeud gauche:

> $Sp[1] := -\frac{2\cdot\lambda\cdot S}{\delta x};$
    $Su[1] := \frac{2\cdot\lambda\cdot S}{\delta x}\cdot T[0];$
    $a_W[1] := 0;$
    $a_E[1] := \frac{\lambda\cdot S}{\delta x};$
    $a_P[1] := a_W[1] + a_E[1] - Sp[1];$

$$Sp_1 := -400.0$$
$$Su_1 := 20000.$$
$$a_{W_1} := 0$$
$$a_{E_1} := 200.0$$
$$a_{P_1} := 600.0 \tag{1.8}$$

Noeud droit:

$> Sp[i_{max}] := 0;$

$Su[\ i_{max}] := q \cdot S;$

$a_W[i_{max}] := \dfrac{\lambda \cdot S}{\delta x};$

$a_E[i_{max}] := 0;$

$a_P[i_{max}] := \ a_W[\ i_{max}] + \ a_E[i_{max}] - Sp[i_{max}];$

$$Sp_3 := 0$$
$$Su_3 := 0.$$
$$a_{W_3} := 200.0$$
$$a_{E_3} := 0$$
$$a_{P_3} := 200.0 \tag{1.9}$$

Equations:

$> k := 1$

$$k := 1 \tag{1.1.1}$$

Résolution pour les noeuds internes:

$>$ **for** i **from** 1 **to** i_{max} **do**

$\quad\quad Eq[\mathrm{k}] := a_P[\ i] \cdot T[\mathrm{i}] = a_W[\ i] \cdot T[\mathrm{i} - 1] + a_E[\ i] \cdot T[\mathrm{i} + 1] + Su[\ i];$

$\quad\quad k := k + 1;$

end do;

$$Eq_1 := 600.0\ T_1 = 20000. + 200.0\ T_2$$
$$k := 2$$
$$Eq_2 := 400.0\ T_2 = 200.0\ T_1 + 200.0\ T_3$$
$$k := 3$$
$$Eq_3 := 200.0\ T_3 = 200.0\ T_2$$
$$k := 4 \tag{1.1.2}$$

Ecriture du système d'équations:

$>$ **for** k **from** 1 **to** Ne **do** $Eq[\mathrm{k}]$ **end do**;

$$600.0\ T_1 = 20000. + 200.0\ T_2$$
$$400.0\ T_2 = 200.0\ T_1 + 200.0\ T_3$$
$$200.0\ T_3 = 200.0\ T_2 \tag{1.1.3}$$

$> Eqs := \{seq(Eq[k], k = 1 ..Ne)\};$

$$Eqs := \{600.0\ T_1 = 20000. + 200.0\ T_2, 400.0\ T_2 = 200.0\ T_1 + 200.0\ T_3, 200.0\ T_3 = 200.0\ T_2\} \tag{1.1.4}$$

$> Tmps := [seq(T[i], i = 1 ..Ne)];$

$$Tmps := [T_1, T_2, T_3] \tag{1.1.5}$$

> $SolT := solve(Eqs, Tmps);$

$$SolT := [[T_1 = 50., T_2 = 50., T_3 = 50.]] \tag{1.1.6}$$

> $with(LinearAlgebra):$

Forme matricielle:

> $A, b := GenerateMatrix(Eqs, Tmps)$

$$A, b := \begin{bmatrix} 600.0 & -200.0 & 0 \\ 0 & -200.0 & 200.0 \\ -200.0 & 400.0 & -200.0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20000. \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.7}$$