Equation de Diffusion 1D

==========================

Dr. Laïd MESSAOUDI

Département de Mécanique

Université de Batna

==========================

Master : Energétique

Matière : Méthodes Numériques Appliquées II

==========================

2011/2012

==

EXEMPLE 5

Détermination de la distribution de temperature $T(\mathrm{x})$ à travers une barre de section A, de conductivité thermique k et de longueur L dont les extrémités sont soumises aux (C.L.):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}T(\mathrm{x})\right)=0$$

Conditions aux limites (C.L):

$$T(0)=T_A=10,$$
$$T(\mathrm{L})=T_B=50$$

Solution

```
> Restart : Digits := 4 :
> L := 0.15; λ := 1000; S := 0.01; ndx := 3;
```

$$L := 0.15$$
$$\lambda := 1000$$
$$S := 0.01$$
$$ndx := 3 \quad \textbf{(1.1)}$$

$$> \ \delta x := \frac{L}{ndx};$$

$$\delta x := 0.05000 \quad \textbf{(1.2)}$$

> $i_{\max} := ndx;$

$$i_{max} := 3 \quad (1.3)$$

Nombre d'équations:

> $Ne := i_{\max}$

$$Ne := 3 \quad (1.4)$$

Abscisses des noeuds:

```
> x[0] := 0;
  for i from 1 to Ne do
      x[i] := δx/2 + (i − 1)·δx ;
  end do;
  x[i_max + 1] := L;
```

$$x_0 := 0$$
$$x_1 := 0.02500$$
$$x_2 := 0.07500$$
$$x_3 := 0.1250$$
$$x_4 := 0.15 \quad (1.5)$$

Conditions aux Limites:

```
> T[0] := 10;
  T[i_max + 1] := 50;
```

$$T_0 := 10$$
$$T_4 := 50 \quad (1.6)$$

Noeuds internes:

```
> for i from 2 to i_max − 1 do
      Sp[i] := 0;
      Su[i] := 0;
      a_W[i] := λ·S/δx;
      a_E[i] := a_W[i];
      a_P[i] := a_W[i] + a_E[i] − Sp[i];
  end do;
```

$$Sp_2 := 0$$
$$Su_2 := 0$$
$$a_{W_2} := 200.0$$
$$a_{E_2} := 200.0$$
$$a_{P_2} := 400.0 \quad (1.7)$$

Noeud gauche:

```
> Sp[1] := - 2·λ·S/δx;
  Su[1] := 2·λ·S/δx·T[0];
  a_W[1] := 0;
  a_E[1] := λ·S/δx;
  a_P[1] := a_W[1] + a_E[1] − Sp[1];
```

$$Sp_1 := -400.0$$
$$Su_1 := 4000.$$
$$a_{W_1} := 0$$
$$a_{E_1} := 200.0$$
$$a_{P_1} := 600.0 \quad \textbf{(1.8)}$$

Noeud droit:

$$> Sp[i_{max}] := -\frac{2\cdot\lambda\cdot S}{\delta x};$$
$$Su[i_{max}] := \frac{2\cdot\lambda\cdot S}{\delta x}\cdot T[i_{max}+1];$$
$$a_W[i_{max}] := \frac{\lambda\cdot S}{\delta x};$$
$$a_E[i_{max}] := 0;$$
$$a_P[i_{max}] := a_W[i_{max}] + a_E[i_{max}] - Sp[i_{max}];$$

$$Sp_3 := -400.0$$
$$Su_3 := 20000.$$
$$a_{W_3} := 200.0$$
$$a_{E_3} := 0$$
$$a_{P_3} := 600.0 \quad \textbf{(1.9)}$$

Equations:

$$> k := 1$$
$$k := 1 \quad \textbf{(1.1.1)}$$

Résolution pour les noeuds internes:

```
> for i from 1 to i_max do
      Eq[k] := a_P[i]·T[i] = a_W[i]·T[i − 1] + a_E[i]·T[i + 1] + Su[i];
      k := k + 1;
  end do;
```

$$Eq_1 := 600.0\ T_1 = 4000. + 200.0\ T_2$$
$$k := 2$$
$$Eq_2 := 400.0\ T_2 = 200.0\ T_1 + 200.0\ T_3$$
$$k := 3$$
$$Eq_3 := 600.0\ T_3 = 200.0\ T_2 + 20000.$$
$$k := 4 \quad \textbf{(1.1.2)}$$

Ecriture du système d'équations:

```
> for k from 1 to Ne do Eq[k] end do;
```

$$600.0\ T_1 = 4000. + 200.0\ T_2$$
$$400.0\ T_2 = 200.0\ T_1 + 200.0\ T_3$$
$$600.0\ T_3 = 200.0\ T_2 + 20000. \quad \textbf{(1.1.3)}$$

```
> Eqs := {seq(Eq[k], k = 1 ..Ne)};
```

$$Eqs := \{600.0\ T_1 = 4000. + 200.0\ T_2,\ 400.0\ T_2 = 200.0\ T_1 + 200.0\ T_3,\ 600.0\ T_3 = 200.0\ T_2 + 20000.\} \quad \textbf{(1.1.4)}$$

> $Tmps := [seq(T[i], i = 1..Ne)];$

$$Tmps := [T_1, T_2, T_3] \tag{1.1.5}$$

> $SolT := solve(Eqs, Tmps);$

$$SolT := [[T_1 = 16.67, T_2 = 30., T_3 = 43.33]] \tag{1.1.6}$$

> $with(LinearAlgebra):$

Forme matricielle:

> $A, b := GenerateMatrix(Eqs, Tmps)$

$$A, b := \begin{bmatrix} 600.0 & -200.0 & 0 \\ 0 & -200.0 & 600.0 \\ -200.0 & 400.0 & -200.0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4000. \\ 20000. \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.7}$$