# Notes d'analyse 4
# (2019-2020)
## La différentielle première

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\mathbb{R}, |.|)$ l'ensemble des nombres réelles muni de la fonction valeur absolue notée $|.|$, On définit $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ le produit de $\mathbb{R}$, $n$ fois où la fonction $\|.\|: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \|x\|$ vérifie pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, x=$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, y=$(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La fonction $\|.\|_2: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, appelée norme Euclidienne et $(\mathbb{R}^n, \|x\|_2)$ est appelé espace Euclidien.
*N'importe quelle définitions et résultats obtenus par $\|.\|_2$ est valable par n'importe quelle norme $\|.\|$ définie sur $\mathbb{R}^n$ (car toutes les normes définies sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes).

**Limite et continuité**

**Définition 1.** Un nombre $l \in \mathbb{R}$ est une limite au point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ de la fonction $f: (\mathbb{R}^n, \|.\|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \bar{x}$ et $\|x - \bar{x}\| \leq \delta(\varepsilon)$, alors $|f(x) - l| \leq \varepsilon$. On écrit $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l$ pour exprimer que $l \in \mathbb{R}$ est une limite au point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ de la fonction $f$. La limite quand elle existe elle est unique. Par conséquent une fonction qui admet plus d'une limite ou sa limite est infinie, n'a pas de limite.
*Les limites sont opérationnelles : si $g: (\mathbb{R}^n, \|.\|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$. alors : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ [ $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l$, $\lim_{x \to \bar{x}} g(x) = l'$] $\Longrightarrow \Big[ \lim_{x \to \bar{x}} \big(\alpha f(x) + g(x)\big) = \alpha l + l', \lim_{x \to \bar{x}} \big(f(x) g(x)\big) = l\, l'$ et si $g(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'} \Big]$
*Si $m \in \mathbb{N}^*$ et : $(\mathbb{R}^n, \|.\|) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, \|.\|)$, $x \longmapsto f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_j(x), \dots, f_m(x)\big)$, $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to \bar{x}} f_j(x) = l_j$, $\forall j \in \{1, \dots, m\}$ et $l == \big(l_1, \dots, l_j, \dots, l_m\big)$
Une suite $\{x^n\} \subset (\mathbb{R}^n, \|.\|)$ est convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, vérifiant $n \geq N(\varepsilon)$ on a : $\|x^n - x\| \leq \varepsilon$. On écrit alors : $\lim_{n \to +\infty} x^n = x$
*$\lim_{n \to +\infty} x^n = x \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} x_i^n = x_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, où $\{x_i^n\}$ est une suite numérique.
**Théorème 10.** $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l \Leftrightarrow$ pour toute suite $\{x^n\}$ convergente vers $\bar{x}$, $\lim_{n \to +\infty} f(x^n) = l$.
**Définition 2.** Une fonction est continue au point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, si $f$ est définie en $\bar{x}$ et $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$.
**Remarque 1.** Tous les résultats des limites sont valables pour la continuité, il suffit de prendre $l = f(\bar{x})$.
Pour simplifier, on considère une fonction à deux variables $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (fixé). Alors :

a) $\big[ \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = l \big] \Leftrightarrow [ \lim_{r \to 0} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) = l]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $r > 0$.
b) $\big[ \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = l \big] \Longrightarrow [ \lim_{x \to a} f(x, \varphi(x)) = l]$ où $\varphi: x \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}$ satisfait $\lim_{x \to a} \varphi(x) = b$.
c) $\big[ \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = l \big] \Longrightarrow \big[ \lim_{x \to a} \big(\lim_{y \to b} f(x, y)\big)\big) = \lim_{y \to b} (\lim_{x \to a} f(x, y)) = l \big]$

On déduit que $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$ n'existe pas si :

1) La limite à droite dans b) n'existe pas ou elle infinie.
2) Les deux limites dans c) existent mais elles sont différentes ou l'une d'elles n'existe pas.

**Remarque**. Il se peut que la fonction $f(x, y)$ n'a pas de limite au point $(x, y)$ dans les deux cas suivant :

a) Dans le cas où la limite dans b) existe.
b) Dans le cas où les deux limites dans c) existent et elles sont égales.

**Example 1**. Soit pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{si } (x, y) \neq (0,0); \\ 0, \quad \text{si } (x, y) \neq (0,0). \end{cases}$

L'étudie de la continuité de $f(x, y)$ sur $\mathbb{R}^2$, revient à étudier sa continuité en (0,0) car elle est évidement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
$f$ est bien définie en (0,0) et :
**Méthode 1.** $0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2 \Longrightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = f(0,0) = 0$ et donc $f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
**Méthode 2.** 0$\leq |f(r\cos\theta, r\sin\theta x)| \leq \frac{|r\cos\theta \times r\sin\theta|}{\sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}}$=$\frac{r^2 |\cos\theta| |\sin\theta|}{r\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}} \leq r \Longrightarrow \lim_{r \to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(0,0) = 0$ et donc $f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

**Example 2**. Soit pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2}, \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$

Comme dans l'exemple 1. L'étudie de la continuité de $f(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2$, revient à étudier sa continuité en $(0,0)$.

**Méthode 1**.

Soit par exemple, $\varphi(x) = x$. Alors $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$, donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas et $f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$ par conséquent elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

**Méthode 2**.

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \infty$ et $\lim_{y\to\beta}(\lim_{x\to\alpha} f(x,y)) = 0 \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas en $(0,0)$ et $f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$ par conséquent elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

**Méthode 3**. Utilisant le théorème 1. La suite $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \longrightarrow (0,0)$, mais $f\left(\frac{1}{n}, 0\right)$=n$\longrightarrow \infty$, donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas en $(0,0)$ et $f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$, donc elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

**Dérivabilité.** La fonction $f(x,y)$ est dérivable au point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si :

**.** Sa dérivée au point $(a,b)$ comme fonction à une seule variable $x$ existe, $y$ étant constante. Dans ce cas, cette dérivée est dite: la dérivée partielle par rapport à $x$, au point $(a,b)$ et elle est notée : $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, ou $f'_x(a,b)$ donc $f'_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$.

**.** Sa dérivée au point $(a,b)$, comme fonction à une seule variable $y$ existe, $x$ étant constante. Dans ce cas, cette dérivée est dite: la dérivée partielle par rapport à $y$ au point $(a,b)$ et elle est notée : $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, ou $f'_y(a,b)$ donc $f'_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$.

On dit que $f(x,y)$ est dérivable au point $(a,b)$, lorsque les deux dérivées partielles existent au point $(a,b)$. Dans ce cas, la dérivée de $f(x,y)$ est notée par $f'(a,b)$ ou bien $Jf(a,b)$et $f'(a,b)$=$\left(f'_x(a,b), f'_y(a,b)\right)$.

Si les dérivés partielles existent en tout point de $\mathbb{R}^2$. On dit que $f(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x,y)$=$\left(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right)$.

Comme la dérivée partielle quant elle existe en $(a,b)$, est la dérivée d'une fonction à une seule variable, elle oubie aux mêmes règles de calcul.

R**emarque 2.** La dérivabilité en un point n'implique pas la continuité en ce point, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 3**

Soit pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$

Calculons $f'(0,0)$, On doit calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h+0,0)-f(0,0)}{h}$=0=$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$=$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ donc $f'(0,0) = (0,0)$ existe. Alors que $f(x,x)$=$\frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) \Longrightarrow f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$.

**La différentielle.** La fonction $f(x,y)$ est différentiable au point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si il existe une fonction $\varphi: (h,k) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \varphi(h,k) \in \mathbb{R}$ vérifiant, $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varphi(h,k) = 0$, et il existe une forme linéaire $df_{(a,b)}: (h,k) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto df_{(a,b)}(h,k) \in \mathbb{R}$, tel que :

$f(a+h,b+k) - f(a,b)$= $df_{(a,b)}(h,k) + \varphi(h,k)\|(h,k)\|$ ou bien

$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-df_{(a,b)}(h,k)}{\|(h,k)\|}$=0. Comme

$df_{(a,b)}(h,k) = df_{(a,b)}[h(1,0) + k(0,1)] = h\, df_{(a,b)}(1,0) + k\, df_{(a,b)}(0,1)$, alors $df_{(a,b)}(h,k) = Ah + Bk$ où $A = df_{(a,b)}(1,0)$ et $B$= $df_{(a,b)}(0,1)$ sont deux constantes réelles. En posant $h = x - a = dx$ et $k = y - b = dy$ on a donc $df_{(a,b)}(x,y) = Adx + Bdy$.

*La différentielle quand elle existe est unique.

* la différentiabilété est opérationnelle.

*la différentiabilété implique la continuité.

*si $f(x,y)$ est différentiable en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors la dérivée $f'(a,b)$ existe et on a : $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, donc $df_{(a,b)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy = f'(a,b)(dx,dy)^T$, où $(dx,dy)^T = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$.

* La dérivabilité ne donne pas la différentiabilité comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 4**

Soit pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ \quad 0, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$

Au point $(0,0)$, $f'(0,0)$=$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (1,0)$. si $f(x,y)$ est différentiable en $(0,0)$.on aura :

$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-h}{\|(h,k)\|}$=0, or $\frac{f(h,k)-f(0,0)-h}{\|(h,k)\|} = \frac{hk}{h^2+k^2}$ n'a pas de limite en $(0,0)$.

**Théorème 2**. Quand les dérivées partielles de $f(x,y)$ au point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ existent et sont continues en$(a,b)$. Alors $f(x,y)$ est différentiable en $(a,b)$.

**Exemple 5.** La fonction $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,y) = xe^y \in \mathbb{R}$ est tel que : $f'(x,y)$=$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) =$ $(e^y, xe^y)$ pou tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il est claire que $f'(x,y)$ est continue partout et donc elle est différentiable et $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = e^y dx + xe^y dy$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Dans le cas par exemple, où l'ensemble d'arrivé est $\mathbb{R}^3$.

$f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y)) \in \mathbb{R}^3$ où pour tout 1$\leq i \leq 3$, $f_i: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f_i(x,y) \in \mathbb{R}$.:

$*$ $f(x,y)$ est continue en $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow f_i(x,y)$ est continue en $(a,b)$ .

$*$ $f(x,y)$ est dérivable en $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow f_i(x,y)$ est dérivable en $(a,b)$ . Et, on a :

$$f'(a,b) = \begin{pmatrix} f_1'(a,b) \\ f_2'(a,b) \\ f_3'(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_3}{\partial x}(a,b) \end{pmatrix}.$$

* $f(x,y)$ est différentiable en $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow f_i(x,y)$ est dérivable en $(a,b)$ et

$df_{(a,b)}(x,y) = \left(df_{1(a,b)}(x,y), df_{2(a,b)}(x,y), df_{3(a,b)}(x,y)\right)$

**Exemple 6.**

Soit $f(x,y) = \left(f_1(x,y), f_2(x,y)\ \ f_3(x,y)\right) = (x+y, xy\ \ x-y)$, alors :

$$f'(a,b) = \begin{pmatrix} f_1'(a,b) \\ f_2'(a,b) \\ f_3'(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Et

$$df(x,y) = (df_1(x,y), df_2(x,y), df_3(x,y)) = f'(a,b)(dx,dy)^T = \begin{pmatrix} f_1'(a,b) \\ f_2'(a,b) \\ f_3'(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} =$$

$(dx+dy, ydx+xdy, dx-dy)$.

Prf. K. Messaoudi