# Université de Batna

## $2^{\text{ème}}$ année Mathématiques

## (2014-2015)

## TD 1 Analyse 4

**Exercice 1 :**

1) Déterminer les boules unités dans $\mathbb{R}^2$ pour les distances $d_1$, $d_2$ *et* $d_\infty$.

2) Montrer que la distance discrète n'est induite d'aucune norme.

3) Montrer que, dans $\mathbb{R}^n$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *et* $\|\cdot\|_\infty$. sont équivalentes.

**Exercice 2 :** Déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions suivantes:

1) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ ; 2) $f(x,y)=\sqrt{x+y}$; 3) $f(x,y)=\dfrac{\ln y}{\sqrt{x-y}}$ ; 4) $f(x,y)=\dfrac{x\cos y}{x^2-4y}$.

**Exercice 3 :** Représenter, pour chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$, les courbes de niveaux:

1) $f(x,y)=x+y-1$ ; 2) $f(x,y)=e^{y-x^2}$; 3) $f(x,y)=y-\cos x$

**Exercice 4:** Calculer, si elles existent, les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{1}{x-y}$ ; 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x\ln(1+x^2)}{y(x^2+y^2)}$; 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,-a)}\dfrac{\sin(x+y)}{x+y}/a\in\mathbb{R}$ .

**Exercice 5 :** Etudier la continuité et la bornétude des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$ :

$$1)\, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}\\ 0\, si\,(x,y)=(0,0)\end{cases} ;\quad 2)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}\\ 0\, si\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**Exercice 6 :** Soit la fonction définie par:

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

1) Déterminer le domaine de définition de cette fonction et étudier sa continuité.

2) Cette fonction est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$ ?

# TD N°1 (Analyse 4)
## (2014/2015. $S_2$)

**Ex1.** $\forall x,y\in\mathbb{R}^2$, $x=(x_1,x_2)$ ; $y=(y_1,y_2)$.

1) $d_1(x,y)=\|x-y\|_1=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$

$d_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=\|x-y\|_2$

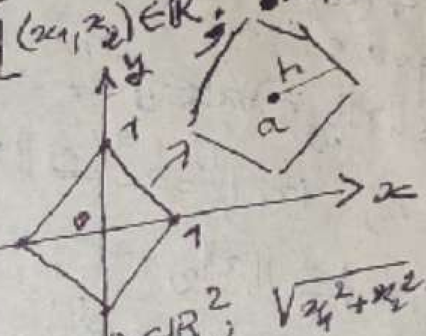
$d_\infty(x,y)=\sup(|x_1-y_1|;|x_2-y_2|)=\|x-y\|_\infty$

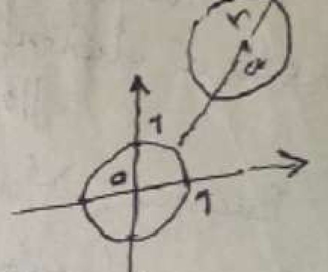
**Remarque.** soit $a\in\mathbb{R}^2$ (evn) et $r>0$.

$B(a,r)=a+rB(0,1)$ ; une translation d'un point $a$ et une homothétie de rapport $r>0$, ramènent la boule unité de centre $0$ et de rayon $r$ à une boule de centre $a$ et de rayon $r$. Il suffit donc de Tracer les boules de centre $0$ et de rayon $1$.

$y=(y_1,y_2)=(0,0)$

$B_1(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^2;\ \|x\|_1<1\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ |x_1|+|x_2|<1\}$




$B_2(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^2;\ \|x\|_2<1\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}<1\}$


$B_\infty(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^2;\ \|x\|_\infty<1\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ \sup(|x_1|,|x_2|)<1\}$

2) $\delta(x,y)=\min(1,d(x,y))$

$\delta(x,y)$ est induite d'une norme de $\mathbb{R}^2$ alors : $\underline{\forall\lambda\in\mathbb{R}}$

$\delta(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\,\delta(x,y)$ si $\inf(1,d(x,y))=1$ et si $|\lambda|\neq1$

**alors :** $1=|\lambda|\cdot1$ et donc $|\lambda|=1$ contradiction.

. si $\delta$ est induite par une norme elle est positivement homogène et invariante par translation $\left|\begin{array}{l}\delta(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\,\delta(x,y)\\ \delta(x+a,y+a)=\delta(x,y);\end{array}\right.$

3- ds $\mathbb{R}^n$; $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes ; $\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ ; $\|x\|_2=\sqrt{(x_1)^2+\dots+(x_n)^2}$ ; $\|x\|_\infty=\sup_{1\le i\le n}|x_i|$

(a) $\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le\sqrt{n}\,\|x\|_\infty$ ; $\forall x\in\mathbb{R}^n$ ?

Puisque : $\forall 1\le i\le n$, $|x_i|\le\|x\|_1$ donc : $\|x\|_\infty\le\|x\|_1$ (1)

et $\forall 1\le i\le n$ ; $|x_i|\le\|x\|_\infty \Leftrightarrow \forall 1\le i\le n$ ; $|x_i|^2\le\|x\|_\infty^2$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\le n\,\|x\|_\infty^2 \Leftrightarrow \|x\|\le\sqrt{n}\,\|x\|_\infty$ (2)

et $\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\|x\|_1\le n\,\|x\|_\infty$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$

de (1) et (2), on déduit : $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$

$\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le n\,\|x\|_\infty$

$\forall x\in\mathbb{R}^n$.

(b) $\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\sqrt{n}\,\|x\|_\infty$ ; $\forall x\in\mathbb{R}^n$

Puisque d'après (a) $\|x\|_2\le\sqrt{n}\,\|x\|_\infty$ ; $\forall x\in\mathbb{R}^n$ (3)

reste à démontrer que : $\|x\|_\infty\le\|x\|_2$ ; $\forall x\in\mathbb{R}^n$.

Puisque : $\forall 1\le i\le n$ ; $|x_i|^2=x_i^2\le\|x\|_2^2=x_1^2+\dots+x_i^2+\dots+x_n^2$

donc : $\forall 1\le i\le n$ ; $|x_i|\le\|x\|_2$ et donc $\sup_{1\le i\le n}|x_i|=\|x\|_\infty\le\|x\|_2$ (4)

de (3) et (4) on déduit que : $\forall x\in\mathbb{R}^n$ ; $\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\sqrt{n}\,\|x\|_\infty \Leftrightarrow \|\ \|_\infty\sim\|\ \|_2$

de (a) et (b) on déduit que : $\|\ \|_1\sim\|\ \|_2$

les 3 normes sont donc équivalentes.

**Exercice 3** les courbes de niveaux de :

1) $f(x,y)=x+y-1$ ; $g(x,y)$ est une courbe de niveau s'il existe

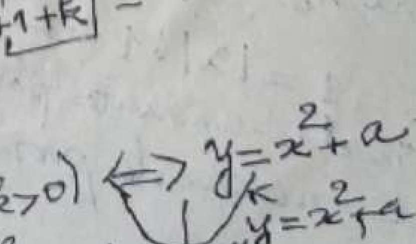
$k\in\mathbb{R}$ t.q : $g(x,y)=k$.

$f(x,y)=k \Leftrightarrow x+y-1=k \Leftrightarrow y=-x+\boxed{1+k}=-x+b$

c'est une droite.

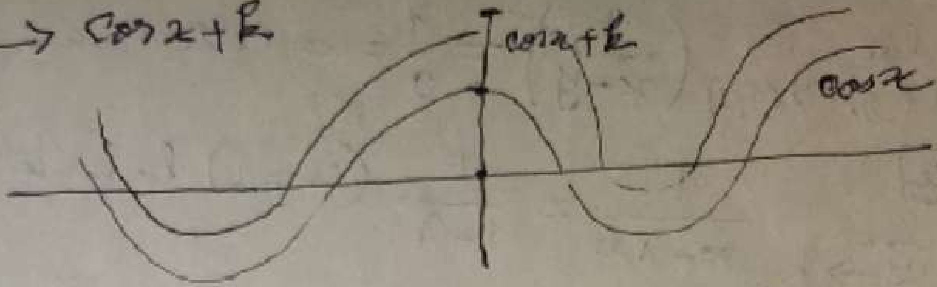
2) $f(x,y)=e^{y-x^2}=k \Leftrightarrow y-x^2=\ln k$ $(k>0)$ $\Leftrightarrow y=x^2+a$

$x^2\longrightarrow x^2+a$ c'est une parabole.



3). $f(x,y) = y - \cos x = k \iff y = \cos x + k$

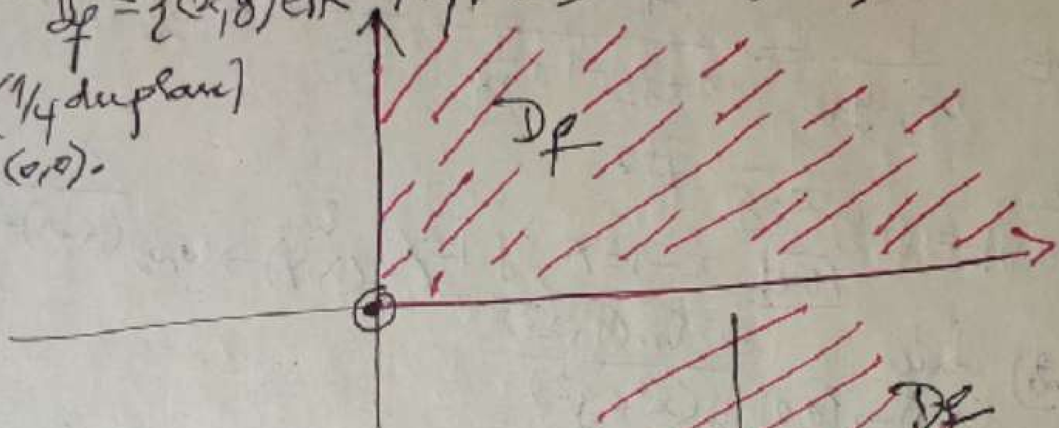
$\cos x \longmapsto \cos x + k$

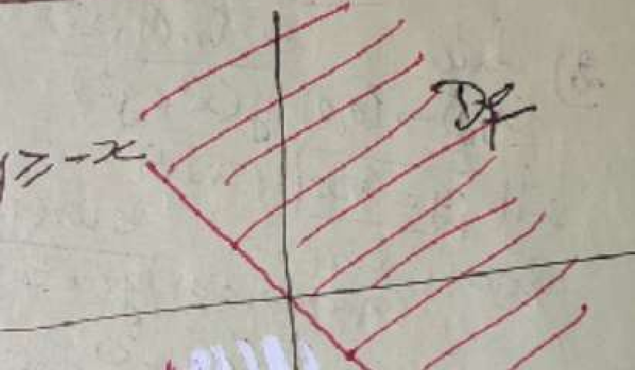



**Ex 2.** Déterminer et présenter le domaine de définition de :

1) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q: } x \geq 0 \text{ et } y > 0\}$

Demi-plan positif (1/4 du plan) ne contenant pas (0,0).



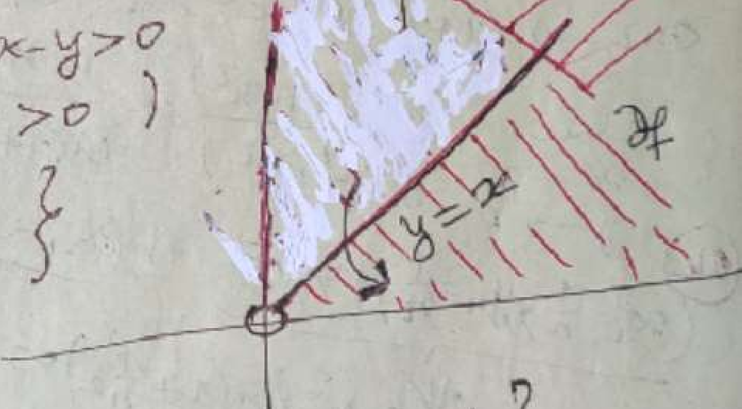




2) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$, $y + x \geq 0 \iff y \geq -x$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y \geq -x\}$

3) $f(x,y) = \dfrac{\ln y}{\sqrt{x-y}}$ $\left( \begin{array}{l} y > 0 \text{ et } x - y > 0 \\ \iff x > y > 0 \end{array} \right)$

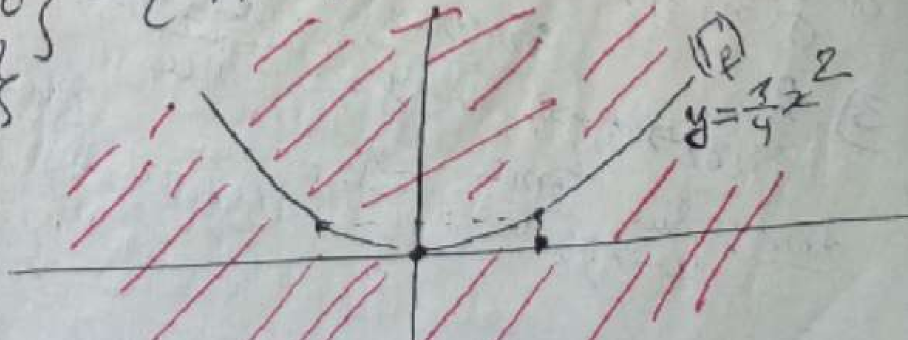
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 < y < x\}$




4) $f(x,y) = \dfrac{x \cos y}{x^2 - 4y}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 - 4y \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ y \neq \frac{1}{4}x^2\}$

$= \mathbb{R}^2 \setminus \{\Gamma_f = \text{la parabole}\}$



**Ex 4.** Calculons si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{1}{x-y}\right) = \frac{1}{0} = \infty$ (elle n'existe pas)

ou $(y=\lambda x)$ ; $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-\lambda x} = \frac{1}{1-\lambda}$ $(\lambda \neq 1)$ la limite dépend de $\lambda$

donc elle n'existe pas.

ou $\left(x_n = 1+\frac{1}{n} ; y_n = 1-\frac{1}{n}\right) \longrightarrow (1,1)$

et $\frac{1}{x_n-y_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}-1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{2}{n}} = \frac{n}{2} \longrightarrow +\infty$ donc

$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y} \nexists$.

ou $x-1 = X$ ; $y-1 = Y$ $\lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{1}{(X+1)-(Y+1)} = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{1}{X-Y} = \frac{1}{0} = +\infty$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ln(1+x^2)}{y(x^2+y^2)}$

soit $\boxed{y=\lambda x}$ $(\lambda \neq 0)$

alors : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ln(1+x^2)}{y(x^2+y^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x^2)}{x^3\lambda(1+\lambda^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3\lambda(1+\lambda^2)}$

car $\ln(1+x^2) \sim x^2$ au $V(0)$ et donc :

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\ln(1+x^2)}{y(x^2+y^2)} = \frac{1}{\lambda(1+\lambda^2)}$ dépend de $\lambda$, elle $\nexists$.

ou $\left(x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ et $\left(x_n = \frac{1}{n}, y_n = -\frac{1}{n}\right) \longrightarrow (0,0)$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Big\} \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$.

$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2}$

et $f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2} n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim -1/2$.

3) $\lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$ ; $\underbrace{x+y}_{u} \to 0$ qd $(x,y)\to(a,-a)$ | $a\in\mathbb{R}$.

donc : $\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1 = \lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$.

Ex5, Continuité des fcts suivantes:

1- $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0); \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Continuité.

• Pour $y=\lambda x$ ; $f(x,\lambda x)=\frac{x}{|x|\sqrt{1+3\lambda^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+3\lambda^2}}\nexists$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,\lambda x)\nexists$ et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\nexists$

et f non continue en (0,0).

• $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0\neq\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\pm 1 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\nexists$.

bornétude.

$|f(x,y)|=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+3y^2}}\leq\frac{|x|}{|x|}=1$ ; $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, donc

f(x,y) est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

2- $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Continuité.

$0\leq|f(x,y)|\leq\frac{\|(x,y)\|_2^2}{\|(x,y)\|_2}=\|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow$

qd $(x,y)\to(0,0)$ ; $f(x,y)\to 0=f(0,0)\Rightarrow$ f est continue

en (0,0). On a aussi: $0\leq|f(x,y)|\leq\frac{|x||y|}{|x|}=|y|\to 0$

$0\leq|f(x,y)|\leq\frac{|x||y|}{\sqrt{3}\,|y|}=\frac{1}{\sqrt{3}}|x|\to 0$

~~bornétude~~.

bornétude: f(x,y) n'est pas bornée en effet:

si on suppose $\exists M>0$ tq: $|f(x,y)|\leq M$; $\forall x,y\in\mathbb{R}$

on aura: pour $\boxed{x=2M\sqrt{6} \text{ et } y=\frac{1}{\sqrt{3}}x}$

$$|f(x,y)| = f(x,y) = f\left(x, \frac{1}{\sqrt3}x\right) = \frac{1}{\sqrt3}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt3}\cdot\frac{x^2}{\sqrt2\cdot|x|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt2\cdot\sqrt3}\cdot x = \frac{1}{\sqrt2\cdot\sqrt3}\cdot 2M\cdot\sqrt6 = 2M \leq M$$

$2 \leq 1$ contradiction (o.k)

ou bien $f(x,y)$ non bornée $\Longleftrightarrow$ $\forall M>0$ ; $\exists x_M, y_M \in \mathbb{R}$ t.q : $|f(x_M,y_M)| > M$

par exemple : $\left(x_M = 2M+1,\ y_M = 2M+1 \Rightarrow |f(x_M,y_M)| = \frac{(2M+1)^2}{2\,(2M+1)} = \frac{1}{2}(2M+1) = M + 1/2 > M\right)$ (o.k)

$|f(x,y)| = 2M \Longleftrightarrow$

$$\frac{x^2y^2}{x^2+3y^2} = 4M^2 \Longleftrightarrow x^2y^2 = 4M^2(x^2+3y^2) \Longleftrightarrow$$

$$x^2y^2 = 4M^2x^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2y^2 - 12M^2y^2 = 4M^2x^2 \Longleftrightarrow$$

$$y^2(x^2-12M^2) = 4M^2x^2 \quad \text{avec : } x^2 - 12M^2 > 0$$

$$y^2 = \frac{4M^2x^2}{x^2-12M^2}$$

$\Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, -2\sqrt3 M\right[ \cup \left]2\sqrt3 M, +\infty\right[$ (!)

$x = 2M\sqrt6$ est acceptable et donc : $y = 2M\sqrt2$

alors : $f(x,y) = \frac{4M^2\sqrt{12}}{\sqrt{4M^2 6 + 3(4M^2 2)}} = \frac{4M^2\cdot 2\cdot\sqrt3}{\sqrt{48M^2}} = \frac{8M^2\sqrt3}{4M\sqrt3}$ (Non ?)

$= 2M > M$.

## Ex 6. $D_f$ et prolongement par continuité de


$$f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2+y^2 > 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0\}$

f n'est pas continue en $(0,0)$ car elle n'est pas définie en $(0,0)$.

lim $f(x,y)$ en $(0,0)$.

$u = x^2+y^2$ ; $u \to 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$

$$\lim_{u\to 0} u \ln u = \lim_{u\to 0} \frac{\frac{1}{u}}{\left(-\frac{1}{u^2}\right)} = \lim_{u\to 0} (-u) = 0$$

et donc f est prolongeable par continuité en $(0,0)$

par :

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$