Analyse Combinatoire

INTRODUCTION:

- Les problèmes de dénombrements, encore appelés analyse-combinatoire, comprend un ensemble de méthodes, permettant de calculer le nombre de résultats possibles d'une certain expérience.
- La connaissance de la méthode de dénombrements constitue le fondement du calcul de probabilités

ARRANGEMENTS :

On appelle arrangement de p éléments parmi n éléments distincts ($p \leq n$) une disposition ordonnée de p éléments parmi les n.

On note A_n^P

On peut considérer que tout arrangements s'obtient en plaçant p objets pris parmi n objets dans p cases en mettant au plus un objets dans chaque case

□ □ □ ……… □ p cases

♣ ♣ ♣ ……… ♣ n objets

ARRANGEMENTS SANS RÉPÉTITION:

- En utilisant le placement d'objets dans des cases, on voit que tous les arrangements (sans répétition) s'obtient en plaçant :
  - Dans la 1ère case :un des n objets *(n choix possibles)*
  - Dans la 2ème case : un des (n-1) objets *(n-1 choix possibles)*
  - Dans la 3ème case :un des (n-2) objets (*n-2 choix possibles)*
  - Dans la p ème case :un des n-(p-1)objets *(n-(p-1) choix possibles*)

Arrangements sans répétition:

Donc : $$A_n^p = n(n-1)(n-2)....(n-p+1)$$

Notion factorielle :

Soit $n \in N$: $n! = n(n\text{-}1)\ldots\ldots 2.1$, on lire n factorielle

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n(n-1).....(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}$$

Arrangement avec répétition :

- On appelle arrangement avec répétition de p éléments parmi n éléments distincts, une disposition ordonnée de p éléments parmi les n avec répétition possible d'un ou plusieurs éléments.
- Le nombre total de tels arrangements est donc : $n^p = n.n.n........n$

EXEMPLE:

- Ecrire un mot , c'est former un arrangement de l'ensemble des lettres de l'alphabet , avec répétition (nous appelons « mot » une suite de lettres)
- Nombre de mots d'une lettre : 26
- Nombre de mots de deux lettres : il y a 26 choix possible pour répétition pour la 1er lettre et puisqu'on admet les répétition, encore 26 choix possible pour la 2ème lettre : 26^2
- Nombre de mots de trois lettres : 26^3

PERMUTATION :

on appelle permutation de n éléments pris parmi n éléments .Les permutations sont un cas particulier des arrangements c'est le cas ou $n = p$

Calcul de P_n :

P_n désigne le nombre de permutation possible de n objets pris parmi n objets $n = p$,

$$A_n^n = P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Donc: $P_n = n!$

EXEMPLE:

- Le nombre de manières de placer cinq personnes sur un banc est 5 !
- S'il y a 25 livres à ranger dans bibliothèque il y a 25 ! manière de les disposer.

PERMUTATION AVEC RÉPÉTITION :

Il arrive que , parmi les n objets dont ont cherche le nombre de permutation, certain d'entre-eux, le nombre de r , soient tous identiques .

Le calcul du nombre de permutation avec répétition est comme suit :

$$P_n\,(\text{avec répétition } r\,) = \frac{n!}{r!}$$

<u>Exemple:</u>

Le nombre de permutation avec répétition du mot BATNA est :

- P_5 (avec répétition 2)=((5!)/(2!))=5.4.3=60

Généralisation à la plusieurs répétition :

Si on considère n objets, parmi les quels r_1 sont semblables entre-eux, r_2 sont semblables entre-eux, r_k sont semblables entre-eux,

avec $r_1+r_2+....+r_k= n$

Le nombre de permutation des n objets avec répétition $(r_1,\ldots,r_k)$ est :

$$P_n(r_1, r_2, \ldots\ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots\ldots r_k!}$$

Exemple:

1) Le nombre de permutation avec répétition avec les lettres du mot CONSTANTINE on a :

$n = 11 \quad r_1 = 3,\ r_2 = 2 \qquad P_{11}(3,2) = ((11!)/(3!2!))$

2) Le nombre de permutations sans répétition de 25 livres est 25 ! .

Ces livres appartiennent à 4 collections différentes, une de 10, une de 6, une de 4 et une de 5 livres, on distingue pas deux livres de la même collection. Il y a 10! manières de ranger les livres de la 1ére collection, De même pour les autres collections = ((25!)/(10!6!4!5!))

COMBINAISON:

- on appelle combinaison de *p* éléments pris parmi *n* éléments, tout ensemble que l'on peut former en choisissant *p* de ces éléments sans considération d'ordre.
- Calcul C_n^p : C_n^p désigne le nombre de combinaison de *p* éléments pris parmi *n* éléments.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

EXEMPLE:

Vous êtes 5 personnes ; vous voulez que deux d'entre vous mettent à l'avant de votre voiture. Le nombre de choix possible est C_5^2

Si parmi les 2 personnes qui sont à l'avant de la voiture, on distingue le chauffeur de l'autre , il y a A_5^2 manière de choisir les 2 personnes .

Donc : C_5^2 manière de choisir les 2 personnes qui vont devant, on peut ensuite permuter ces 2 personnes de 2 ! façons pour distingue le chauffeur de l'autre , donc : $A_5^2=2!C_5^2$ on aura : $C_5^2=((5!)/(2!(5-2)!))$

Propriétés :

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$

2) Si $\forall n \geq 1 : C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

3) Si $\forall n \geq 2 : C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

4) Si $0 \leq p \leq n : C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^p$

Formule du binôme de NEWTON :

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)......(a+b) \qquad (n \text{ fois})$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Remarque:

La relation dite de PASCAL $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ permet une détermination de proche en proche des coefficients C_p^n du moyen de tableau ci-dessus appelé triangle de PASCAL :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Formule du binôme de NEWTON :

- $(a+b)^0=1$
- $(a+b)^1=a+b$
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
- $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

PARTITION D'UNE ENSEMBLE:

- Si l'on pose $a = b = 1$,on obtient alors, d'après la formule du binôme de Newton:

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p$$

- Or C_n^p étant le nombre de parties à p éléments de l'ensemble E contient n objets.

  $\sum_{p=0}^{n} C_n^p$ représente le nombre de partie ou partition de l'ensemble E que l'on note:

  Card(E) = n alors Card(P(E))= 2^n

- Le cardinal d'un ensemble (Card) correspond au nombre d'éléments constituant cet ensemble.

EXEMPLE:

$E = \{ 1,2,3\}$; Card E =3

$P(E)=\{ \phi, \{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\}, \{1,3\},\{2,3\},\{1,2, 3\}\}$

Card(P (E)) = 8

D'après la démonstration on a:

Card (P (E)) = 2^3 =8

Exemple:

Déterminer le nombre d'entiers positifs inférieurs à 10 000 qui

peuvent être formés avec les chiffres 1, 2, 3 et 4

a) Si les répétitions sont permises ?

b) Si elles ne sont pas permises ?

Solution:

a) $4^4 + 4^3 + 4^2 + 4 = 340$

b) $(4.3.2.1) + (4.3.2) + (4.3) + 4 = 64$

Exemple:

De combien de manières peut-on partager un groupe de dix personnes

en deux groupes ; un groupe de 7 et un de 3 ?

Solution:

$$C_{10}^{7}.C_{3}^{3} = C_{10}^{3}.C_{7}^{7} = 120$$

Exemple:

1) De combien de manières différentes peut-on former un comité de trois personnes à partir d’une classe de 24 élèves ?

2) De combien de manières différentes peut-on former un comité qui contient un délégué; un suppliant et un secrétaire à partir d’une classe de 24 élèves?

Solution:

1) C_{24}^{3}

2) A_{24}^{3}

Exemple:

Un atelier comprend 15 ouvriers, 8 femmes et 7 hommes. On choisit dans cet atelier des groupes de 5 ouvriers :

a) combien de groupes différents peut-on former ?

b) combien de groupes comportant 3 hommes peut-on former ?

Solution:

a) C_{15}^{5}

b) $C_{7}^{3}.C_{8}^{2}$

EXEMPLE:

Dans certains pays, les plaques d'immatriculation des automobiles commencent par une lettre de l'alphabet, suivie de cinq chiffres.

Calculer combien de plaques d'immatriculation sont réalisables si :

a) le premier chiffre suivant la lettre ne peut pas être 0 .

b) la première lettre ne peut pas être O ou I et le premier chiffre ne peut pas être 0 ou 1.

Solution:

- 1) $26.9.10^4 = 2\ 340\ 000$
- 2) $24.8.10^4 = 1\ 920\ 000$