Calcul d’erreur

- Introduction
- Présentation d’un résultat
- Variation absolue et Variation relative
- Exemples
- Incertitude absolue et incertitude relative
- Exemples

Introduction:

- En science expérimentales. Il n’existe pas de mesure exacte. Les mesures sont entachées d’erreur plus ou moins importantes en fonction de la qualité des instruments, de l’habilité du manipulateur…..
- Il existe un écart entre la valeur obtenues et la valeur exacte, qui reste toujours inconnue.
- Cet écart est appelé « erreur de mesure »
- La valeur vraie restant inconnue
- L’erreur de mesure restera indéterminés.

Présentation d'un résultat:

- $M = m \pm \Delta m$
- M :grandeur mesurée (vitesse, température,..)
- m: mesure
- Δm : incertitude de la mesure
- $m - \Delta m \leq M \leq m + \Delta m$
- **Ex:** V = (153 ±2)km/h ; C =(0,15 ±0,05)mol/L

L'erreur absolue et l'erreur relative:

- En pratique, l'erreur ne peut être qu'estimée.
- On deux types d'erreur:
- L'erreur absolue : Δm qui est la même unité que la grandeur mesurée.
- L'erreur relative: $\Delta m/m$ qui s'exprime en %
- **Ex:** $V = (153 \pm 2)$km/h alors: $\Delta V/V = 2/153 = 0{,}013 = 13\%$
- $C = (0{,}15 \pm 0{,}05)$mol/L alors : $\Delta C/C = 0{,}15/0{,}05 = 0{,}33 = 33\%$

Valeur et incertitudes sur une série de mesures:

- **Ex:** On mesure la largeur d'un bureau à 4 endroits différentes:
- $X_1 = 57{,}3 \pm 0{,}4$ cm
- $X_2 = 58{,}1 \pm 0{,}4$ cm
- $X_3 = 56{,}7 \pm 0{,}4$ cm
- $X_4 = 56{,}9 \pm 0{,}4$ cm
- La valeur est donnée par : $X = (X_{max} + X_{min})/2 = (58{,}1+56{,}7)/2 = 57{,}4$ cm
- L'incertitude est donnée par : $\Delta X = (X_{max} - X_{min})/2 = (58{,}1-56{,}7)/2 = 0{,}7$ cm
- $X \pm \Delta X = 57{,}4 \pm 0{,}7$ cm

Différentielle totale

- *f(x,y,z)* une fonction de trois variables
- La différentielle totale est donnée par :

$$\mathbf{df} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\,\mathbf{dx} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\,\mathbf{dy} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\,\mathbf{dz}$$

- <u>Ex:</u> $f(x,y,z) = xyz$

$$df = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Exemple :

Donner une approximation de la variation de volume d'un cylindre droit de rayon r=10 cm et de hauteur h=50 cm quand r augmente de 1 cm et h diminue de 2 cm.

- Calcul exact de la variation ΔV ?
- Calcul approché de la variation ΔV par la différentielle dV ?

- Volume du cylindre droit $V = \pi r^2 h = V(r,h)$
- Calcul exact de la variation ΔV

V_1 valeur initiale avec $r_1 = 10$ cm et $h_1 = 50$ cm

$$V_1 = \pi r_1^2 h_1 = \pi.10^2.50 = 15708 \text{ cm}^3$$

V_2 valeur finale avec $r_2 = (10+1)$ cm et $h_2 = (50-2)$ cm

$$V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi.11^2.48 = 18246 \ cm^3$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 18246 - 15708 = 2538 \text{ cm}^3.$$

- Calcul approché de la variation ΔV par la différentielle dV

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh \quad \text{avec} \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \pi (2r)\, h \ \text{ et } \ \frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

$$dV = 2\pi rh\, dr + \pi r^2\, dh = 2\pi.10.50.(1) + \pi.10^2.(-2) = 3141 - 628 = 2513 \text{ cm}^3$$

$$\boxed{\Delta V \approx 2500 \text{ cm}^3}$$

Différentielle logarithmique

C'est la différentielle du logarithme de la valeur absolue de la fonction.

Pour f(x,y,z) fonction de 3 variables, la différentielle s'écrit:

$$\boxed{d\left[\ln\left|f(x,y,z)\right|\right] = \frac{df}{f} = \frac{1}{f}\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right]}$$

C'est donc le quotient de la différentielle totale par la fonction

c. Intérêt de la différentielle logarithmique

La différentielle logarithmique ***df/f*** d'une fonction de plusieurs variables réalise une approximation de la variation relative :

$\Delta f/f$ de la fonction pour les variations Δx, Δy, Δz de ses variables, à condition que **Δx, Δy, Δz** soient suffisamment **petits** (approximation au premier ordre)

Exemple :

Donner une approximation de la variation relative du volume **$\Delta V/V$** d'un parallélépipède rectangle de côtés x=20 cm, y=40 cm et z = 25 cm quand x et y augmentent de 0,2 cm et que z diminue de 1 cm.

Correction :

- Volume d'un parallélépipède rectangle: $V(x,y,z) = x.y.z$
- Calcul exact de la variation relative

Volume initial $V_1 = 20.40.25 = 20000 \text{ cm}^3$

Volume final $V_2 = (20,2).(40,2).24 = 19489 \text{ cm}^3$.

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{19489 - 20000}{20000} = \frac{-511}{20000} = \mathbf{-0,0256 = -2,56\ \%}$$

- Calcul approché par la différentielle logarithmique:

$$\ln V = \ln x + \ln y + \ln z \Rightarrow d[\ln V] = d[\ln x] + d[\ln y] + d[\ln z]$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$$ avec $dx=dy=+0,2$ cm et $dz=-1$ cm

$$\frac{dV}{V} = \frac{0,2}{20} + \frac{0,2}{40} - \frac{1}{25} = 0,01 + 0,005 - 0,04$$

$$\frac{dV}{V} = -\,0,025 = -\,2,5\ \%$$

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} \approx -\,2,5\ \%}$$

Application au calcul d'incertitudes

Soit la grandeur g dépendant des variables indépendantes x, y, z

selon l'expression: **g=g(x,y,z)** .

Calcul des **incertitudes absolue Δg** et **relative Δg/g** connaissant

les incertitudes absolues Δx, Δy, Δz sur les mesures x,y z.

Δx, Δy, Δz ***petits*** *par rapport aux mesures* ***x,y,z****,*

⇒ on peut appliquer les règles du ***calcul différentiel****.*

- la **différentielle dg** va conduire à **l'incertitude absolue Δg**.
  On en déduira ensuite l'incertitude relative Δg/g.

- Si g(x,y,z) se présente sous la forme de **produits et quotients**,
  on simplifie les calculs avec la **différentielle logarithmique dg/g**.
  On en déduit **l'incertitude relative Δg/g** qui conduira ensuite au
  calcul de l'incertitude absolu Δg.

Application au calcul d’incertitudes

Passage différentielles - incertitudes

On parle de **majoration physique** : on se place dans le cas le plus défavorable où toutes les erreurs commises sur les différentes **grandeurs indépendantes** se cumulent.

On cherche la limite supérieur de l’erreur commise sur g en déterminant **la limite supérieur de la valeur absolue** de **dg** ou de **dg/g.**

- **Incertitude absolue** $\boxed{\Delta g = \sup|dg|}$

* $dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz$

* $|dg| = \left|\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right| \leq \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right||dx| + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right||dy| + \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right||dz|$

Théorème : *La valeur absolue d'une somme algébrique est inférieur ou égale à la somme des valeurs absolues des différents termes.*

$$\boxed{\sup|dg| = \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right||dx| + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right||dy| + \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right||dz| = \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right|\Delta z}$$

- **Incertitude relative ou précision** $\boxed{\frac{\Delta g}{g} = \sup\left|\frac{dg}{g}\right|}$

* $d\left[\ln\left|g(x,y,z)\right|\right] = \frac{dg}{g} = \frac{1}{g}\left[\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right]$

* $\left|\frac{dg}{g}\right| = \left|\frac{1}{g}\left[\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right]\right|$

$$\boxed{\sup\left|\frac{dg}{g}\right| = \frac{1}{|g|}\left[\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right|\Delta z\right]}$$

- **En pratique**, cela revient à remplacer tous les **d** de différentielles en Δ d'incertitudes (valeurs

  positives) puis à affecter à chaque coefficient multiplicatif un signe positif.

Présentation du résultat final :

On ne garde que les chiffres significatifs; pour cela, on ne conserve **qu'un seul chiffre incertain** :

- on **arrondit** la valeur de **g**, à la valeur la plus proche

- on **majore** la valeur de Δ**g** à la valeur immédiatement supérieure (on ne doit jamais minorer une erreur)

Règles particulières:

- Somme:

$$f(x,y) = x + y \Rightarrow \Delta f = \Delta x + \Delta y \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$$

- Différence:

$$f(x,y) = x - y \Rightarrow \Delta f = \Delta x + \Delta y \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x - y}$$

- Produit:

$$f(x,y) = x.y \Rightarrow \Delta f = y.\Delta x + x.\Delta y \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

- Quotient:

$$f(x,y) = \frac{x}{y} \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{y}.\Delta x + \frac{x}{y^2}.\Delta y \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Exemple:

- **Soit la fonction** $g(x,y,z) = \dfrac{1}{x^3 y^4 z^2}$

Quelle est l’erreur relative de g lorsque l’erreur relative sur les variables x; y et z est de 10%?

$$\ln g = -3\ln x - 4\ln y - 2\ln z$$

$$\frac{dg}{g} = -3\frac{dx}{x} - 4\frac{dy}{y} - 2\frac{dz}{z}$$

$$\left|\frac{\Delta g}{g}\right| = 3\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + 4\left|\frac{\Delta y}{y}\right| + 2\left|\frac{\Delta z}{z}\right|$$

$$\left|\frac{\Delta g}{g}\right| = 3(0,1) + 4(0,1) + 2(0,1) = 0,9 = 90\%$$

Exemple:

- Pour un médicament, la relation entre l'effet et la dose pour un intervalle donné est: $E = A \ln(d) + B$
- En admettant que A et B sont connus sans erreur, calculer l'erreur absolue et l'erreur relative sur E sachant que $A = 4$
- $B = 3$; $d = 10$ et $\Delta d = 0,1$
- Correction:
- $E = 4.\ln(10) + 3 = 12,21034$
- $dE = A\ (d(d)/d)$ soit $\Delta E = A(\Delta d/d) = 4.(0,1/10) = 0,04$
- et $\Delta E/E = 0,04/\ 12,21034 = 0,003 = 0,3\%$

$$E = 12,21 \pm 0,04$$

Exemple:

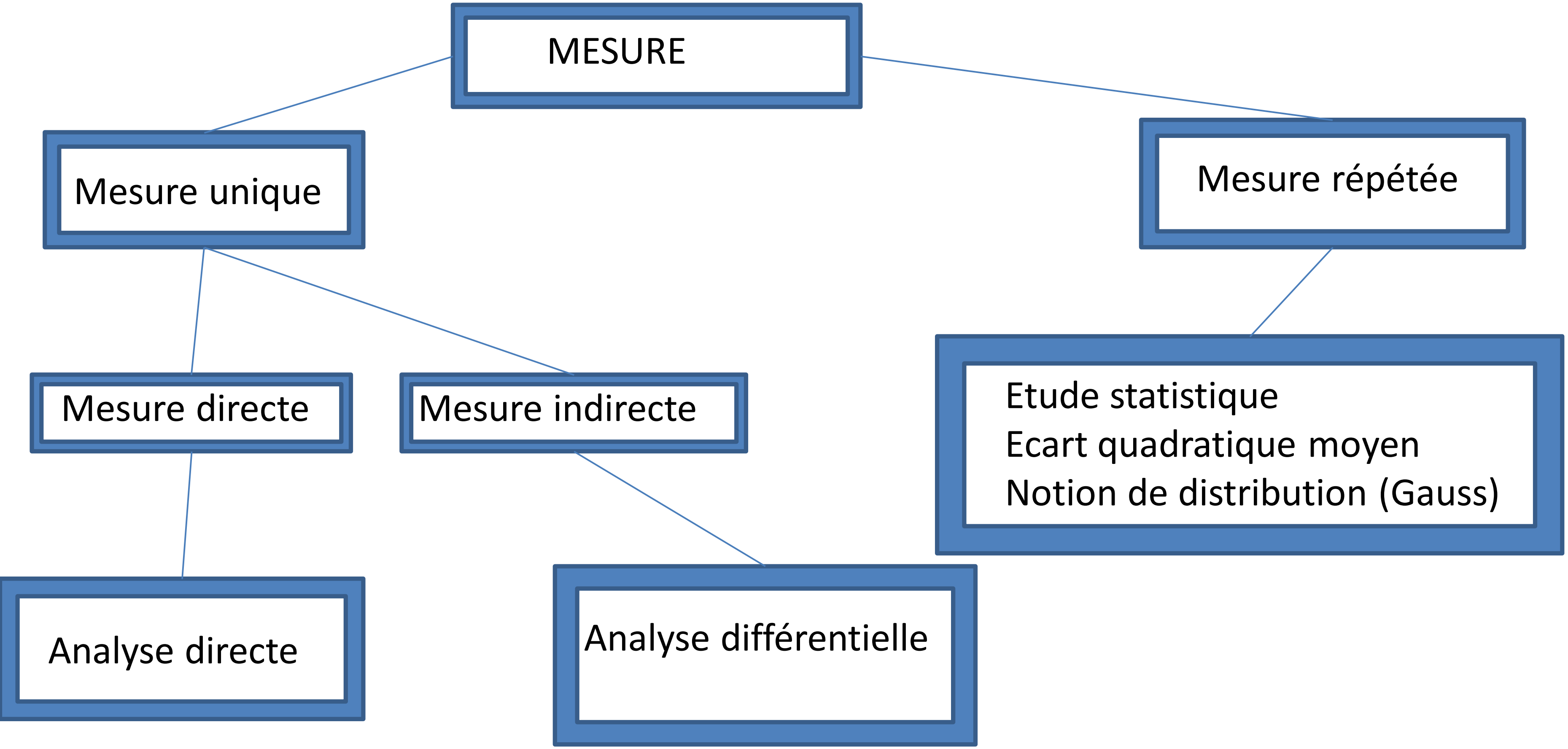
- Soit une fonction de trois variable: $f(C,k,x) = Ce^{-kx}$
- 1) Ecrire la différentielle logarithmique de *f.*
- Pour la valeur x =10, obtenue avec précision relative de 0,5%,
- Une expérience donne f = 3± 0,05 et C = 12± 0,1
- Calculer la valeur de k et son erreur Δk.
- <u>Correction:</u>
- 1) $f(C,k,x) = Ce^{-kx} \Rightarrow lnf = lnC - kx$
- $$dln(f) = \frac{df}{f} = \frac{dC}{C} - x.dk - k.dx$$
- 2) $$f(C,k,x) = Ce^{-kx} \Rightarrow k = \frac{-1}{x} ln\frac{f}{C} = \frac{-1}{10} ln\frac{3}{12} = 0,139$$

$$dk = \frac{-dy}{xy} + \frac{dC}{xC} - \; k\frac{dx}{x}$$

$$\Delta k = \frac{1}{x}\left(\frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta C}{C}\right) + k\frac{\Delta x}{x}$$

$$\Delta k = \frac{1}{10}\left(\frac{0,05}{3} + \frac{0,1}{12}\right) + (0,1386294).(0,05) = 0,0032$$

$$\Delta k = 0,139 \pm 0,003$$


MESURE
Mesure unique
Mesure répétée
Mesure directe
Mesure indirecte
Etude statistique
Ecart quadratique moyen
Notion de distribution (Gauss)
Analyse directe
Analyse différentielle