Variables alétoires absolument continues

Définition.

Soit X une $V.A$ définie sur l'espace Ω, P on dit que X est absolument continue si sa fonction de répartition $F(x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x)$ est de la forme $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x).dx$ avec f fonction réélle positive Riemann intégrable et $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = 1$. Pour simplifier nous supposerons la fonction f continue, de sorte que F soit dérivable et $F^{'}(x) = f(x)$, dans ce cas $F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x).dx = P(a \leq X \leq b) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in [a, b])$ et $P(X = x) = \int\limits_{x}^{x} f(x).dx = 0, \forall x$.

La fonction f s'appelle densité de la variable aléatoire X.

Exemples.

(a) **La loi uniforme $\mathcal{U}$ $[a, b]$ de densité donnée par:**

$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$

$f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$

Fonction de répartition donnée par:

$F(x) = 0$ si $x < a$

$F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ si $x \in [a, b]$

$F(x) = 1$ si $x > b$

(b) **La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, de densité donnée par:**

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, si $x \geq 0$

$f(x) = 0$, si $x < 0$

Fonction de répartition:

$F(x) = 0$, si $x < 0$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, si $x \geq 0$

(c) **Loi Normale ou Loi de Gauss $\mathcal{N}(m, \sigma)$, de densité donnée par:**

$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ avec $x \in \mathbf{R}$

Cas particulier: **Loi Normale centrée réduite avec $\sigma = 1, m = 0$:**

densité donnée par: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}$ avec $x \in \mathbf{R}$

Esperance et Variance de V.A. absolument continues

Soit X une V.A absolument continue de densité $f(x)$

(a) On définit l'esperance de X par:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx = \mu$$

(b) On définit la variance de X par:

$$V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 .f(x).dx$$

(Rappel: $V(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2$), écart type $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Calculs de $E(X), V(X)$ pour certaines variables absolument continues

1. Variable uniforme $\mathcal{U}\ [a,b]$ de densité donnée par:

$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a,b]$

$f(x) = 0$ si $x \notin [a,b]$

$$(a)\ E(X) = \int_a^b x.\frac{1}{b-a}.dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b .\frac{1}{b-a} = \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right).\frac{1}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

pour calculer la variance on utilise la relation:

$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$

$$E\left(X^2\right) = \int_a^b x^2.\frac{1}{b-a}.dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b .\frac{1}{b-a} = \left(\frac{b^3-a^3}{3}\right).\frac{1}{b-a}$$

mais on a $b^3 - a^3 = (b-a).\left(b^2+ab+a^2\right)$, on obtient:

$$E\left(X^2\right) = \frac{\left(b^2+ab+a^2\right)}{3}$$

$$V(X) = \frac{\left(b^2+ab+a^2\right)}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{\left(b^2+ab+a^2\right)}{3} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

$$V(X) = \frac{4.\left(b^2+ab+a^2\right) - 3.\left(a^2+b^2+2ab\right)}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(b) **loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, de densité donnée par:**

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, si $x \geq 0$

$f(x) = 0$, si $x < 0$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x.\lambda e^{-\lambda x}.dx = \lambda.\int_0^{\infty} x.e^{-\lambda x}.dx$$

on exprime $x.e^{-\lambda x}$ avec la dérivée de $e^{-\lambda x}$ par rapport à λ:

$x.e^{-\lambda x} = -\dfrac{de^{-\lambda x}}{d\lambda}$ on obtient

$$E\left(X\right) = \lambda.\int_0^\infty x.e^{-\lambda x}.dx = \lambda.\int_0^\infty -\frac{de^{-\lambda x}}{d\lambda}.dx$$

d'aprés une propriété de théorie de la mesure on peut écrire:

$$\int_0^\infty -\frac{de^{-\lambda x}}{d\lambda}.dx = -\frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}.dx = -\frac{d}{d\lambda} - \frac{1}{\lambda}.\left[e^{-\lambda.x}\right]_0^\infty = -\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

cela donne $E\left(X\right) = \lambda.\dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Pour calculer la variance on evalue $E\left(X^2\right) = \lambda.\displaystyle\int_0^\infty x^2.e^{-\lambda x}.dx$

en integrant par parties; on trouve $V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$.