Soit Ω un ensemble non vide

1. Rappeler la définition d'une probabilité P sur Ω,
(a) $\forall A, B \subset \Omega$ si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$
(b) $\forall A, B \subset \Omega$ montrer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(c) On note $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
la probabilité conditionnelle avec $P(B) > 0$.
Soient A, B deux evenements indépendants c'est à dire que l'on a:

$P(A|B) = P(A)$ ce qui est equivalent à $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

Montrer que $[A, B^c], [A^c, B], [A^c, B^c]$, sont indépendants.

2. Montrer que $P(A) = P(A|B) P(B) + P(A|B^c) P(B^c)$

Solution:
1. Une probabilité P sur Ω est une fonction P definie sur l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω à valeurs dans l'interval $[0, 1]$ satisfaisant :
(1) $P(\Omega) = 1$
(2) Pour toute suite (A_n) finie ou infinie de parties de Ω 2 à 2 disjointes on a:
$P\left(\underset{n}{\cup} A_n\right) = \sum\limits_n P(A_n)$ $\quad$ ($\sigma-$additivité de P)
On convient d'appeler le couple Ω, P espace probabilisé.
C'est un modèle mathematique simple qui sert à mesurer le caractère incertain d'evenements relatifs à des phénomènes aléatoires. Dans les applications Ω est l'ensemble des résultats d'une experience et chaque partie $A \subset \Omega$ s'appelle evenement. Les éléments $\omega \in \Omega$ sont les evenements élémentaires. $P(A)$ est la probabilité de réalisation de A c'est à dire le degré de certitude de l'apparition de A.

(a) si $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \cap A^c)$ et $A \cap (B \cap A^c) = \phi$
on déduit par l'additivié de P :
$P(B) = P(A) + P(B \cap A^c) \geq P(A)$, puisque P est une fonction positive.
cela implique aussi $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A)$, pour $A \subset B$.
On peut utiliser cette propriété de façon générale:
$\forall E, F$, si $E \subset F$ alors $P(F \cap E^c) = P(F) - P(E) \qquad (*)$

(b) On peut écrire $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$
$= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup (B \cap (A \cap B)^c)$
on déduit $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap (A \cap B)^c)$ et comme $A \cap B \subset B$
on applique la formule $(*)$ avec $E = A \cap B$ et $F = B$ ce qui donne
$P(B \cap (A \cap B)^c) = P(B) - P(A \cap B)$ et finalement:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(c) Soient A, B deux evenements indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$
montrons que A, B^c sont indépendants:
on a $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ et donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$
mais $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$ donc $P(A) - P(A) . P(B) = P(A \cap B^c)$

c'est à dire $P(A \cap B^c) = P(A).(1 - P(B)) = P(A).P(B^c)$
la preuve est semblable pour les evenements A^c, B

montrons que A^c, B^c sont indépendants, on a:
$P(B^c) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c) = P(A).P(B^c) + P(A^c \cap B^c)$
donc $P(B^c) - P(A).P(B^c) = P(A^c \cap B^c)$ on en deduit que:
$P(B^c)(1 - P(A)) = P(B^c).P(A^c) = P(A^c \cap B^c)$.

2. On montrer que $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$
on décompose $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ et en appliquant P
on obtient $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$
mais par definition de la probabilité conditionnelle on a
$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ et $P(A \cap B^c) = P(A|B^c)P(B^c)$.

3. On lance un dé 2 fois, determiner $\Omega, |\Omega|$, ainsi que la probabilité uniforme.
Calculer la probabilité de l'evenement "somme des faces egal à 7"

solution. dé cubique avec 6 façes $\{1,2,3,4,5,6\}$
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$, donc $|\Omega| = 36$
la probabilité uniforme.est $P(i,j) = \frac{1}{36}, \forall (i,j) \in \Omega$
l'evenement "somme des faces egal à 7" est egal à:
$A = \{(1,6),(6,1),(5,2),(2,5),(4,3),(3,4)\}$ ce qui donne $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

4. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12.
On tire au hasard une boule dans l'urne. On note:
x la probabilité de tirer une boule de numéro pair
y la probabilité de tirer une boule de numéro impair
(a) Ecrire l'espace Ω, P de cette experience.
Montrer que $x + y = \frac{1}{6}$
(b) Soient A l'evenement "boule de numéro pair"
B l'evenement "boule de numéro multiple de 3"
Calculer $P(A), P(B), P(A \cap B)$. Déduire que A et B sont indépendants.

solution.
(a) On peut prendre $\Omega = \{1,2,3,....,12\}$, chaque boule est identifiée par son numéro
on a $x = P(i)$ pour $i = 2,4,6,8,10,12$ et $y = P(j)$ pour $j = 1,3,5,7,9,11$
$P(\Omega) = \sum_{k=1}^{12} P(k) = 6x + 6y = 1$, cela montre que $x + y = \frac{1}{6}$

on a $A = \{2,4,6,8,10,12\}$ et $B = \{3,6,9,12\}$, par consequent
$P(A) = 6x$, $P(B) = 2x + 2y = 2\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
d'autre part $A \cap B = \{6,12\}$, donc $P(A \cap B) = P(6) + P(12) = 2x$
mais $P(A).P(B) = 6x.\frac{1}{3} = 2x = P(A \cap B)$ cela montre
que A et B sont indépendants.