5. On lance une piece 3 fois au hasard.
Determiner Ω avec la probabilité uniforme$P$.
(a) Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire définie par:
$\omega \in \Omega, X(\omega) =$ nombre de piles dans ω.
Trouver la loi de X et calculer son espérance.
(b) Méme question que (a) avec la variable:
$\omega \in \Omega, Y(\omega) =$ nombre de faces dans ω.

solution. On note pile par p et façe par f
$\Omega = \{ppp, fpp, pfp, ppf, ffp, fpf, pff, fff\}, \quad P(\omega) = \frac{1}{8}, \quad \forall\omega \in \Omega$
(a) On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$, la loi de X est definie par:
$P(X = 0) = P(fff) = \frac{1}{8}$, $P(X = 1) = P(ffp, fpf, pff) = \frac{3}{8}$
$P(X = 2) = P(fpp, pfp, ppf) = \frac{3}{8}$, $P(X = 3) = P(ppp) = \frac{1}{8}$
On verifie bien que $\sum_{k=0}^{3} P(X = k) = 1$
Calcul de l'esperance $E(X)$:
$E(X) = \sum_{k=0}^{3} k.P(X = k) =$
$0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 2.P(X = 2) + 3.P(X = 3) =$
$0.\frac{1}{8} + 1.\frac{3}{8} + 2.\frac{3}{8} + 3.\frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$
(b) On a $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$, la loi de Y est definie par:
$P(Y = 0) = P(ppp) = \frac{1}{8}$, $P(Y = 1) = P(fpp, pfp, ppf) = \frac{3}{8}$
$P(Y = 2) = P(ffp, fpf, pff) = \frac{3}{8}$, $P(Y = 3) = P(fff) = \frac{1}{8}$
On verifie bien que $\sum_{k=0}^{3} P(Y = k) = 1$ et on remarque que
X et Y ont la même loi. Donc l'esperance $E(Y) = E(X) = \frac{3}{2}$

6. On lance un dé 2 fois au hasard.
(a) Montrer que $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : 1 \le \omega_1 \le 6, \quad 1 \le \omega_2 \le 6\}$.
On munit Ω avec la probabilité uniforme P.
(b) Déterminer la loi des variables $Z, U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $Z(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$
$U(\omega_1, \omega_2) = \omega_1.\omega_2$
(c) Méme question que (b) avec les variables:
$(\omega_1, \omega_2) \in \Omega, \quad S(\omega_1, \omega_2) = \sup(\omega_1, \omega_2)$
$(\omega_1, \omega_2) \in \Omega, \quad T(\omega_1, \omega_2) = \inf(\omega_1, \omega_2)$

solution.
(a) Un résultat de l'experience est un couple (ω_1, ω_2) avec:
ω_1: apparition du premier lancer et ω_2 : apparition du second
donc $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : 1 \le \omega_1 \le 6, \quad 1 \le \omega_2 \le 6\}$.
Il est clair que $|\Omega| = 36$ et la probabilité uniforme est donnée par

$P(\omega_1, \omega_2) = \dfrac{1}{36}$ pour tout $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$.
(b) Valeurs de Z : $Z(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.9, 10, 11, 12\}$ avec:
$P(Z = x) = P\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \ \ \omega_1 + \omega_2 = x\}$, par exemple:
$P(Z = 8) = P\{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\} = \dfrac{5}{36}$.
$P(Z = 7) = P\{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4.3)\} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$
Valeurs de U : $U(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8.9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$
avec:$P(U = x) = P\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \ \ \omega_1.\omega_2 = x\}$, par exemple:
$P(U = 12) = P\{(2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3)\} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$
$P(U = 15) = P\{(3, 5), (5, 3)\} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.

(c) $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega, \ \ S(\omega_1, \omega_2) = \sup(\omega_1, \omega_2)$
Valeurs de S : $S(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec par exemple
$P(S = 3) = P\{(1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} = \dfrac{5}{36}$

$(\omega_1, \omega_2) \in \Omega, \ \ T(\omega_1, \omega_2) = \inf(\omega_1, \omega_2)$
Valeurs de T : $T(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec par exemple
$P(T = 3) = P\{(3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5), (6, 3), (3, 6)\} = \dfrac{7}{36}$

7. Avec les données de l'exercice **6** montrer que:
$S + T = Z, \ \ S.T = U$

solution.
Si $S(\omega_1, \omega_2) = \sup(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$ alors $\omega_1 \geq \omega_2$
donc $T(\omega_1, \omega_2) = \inf(\omega_1, \omega_2) = \omega_2$
cela donne $S(\omega_1, \omega_2) + T(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 = Z(\omega_1, \omega_2)$
Si $S(\omega_1, \omega_2) = \sup(\omega_1, \omega_2) = \omega_2$ alors $\omega_2 \geq \omega_1$
donc $T(\omega_1, \omega_2) = \inf(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$
cela donne $S(\omega_1, \omega_2) + T(\omega_1, \omega_2) = \omega_2 + \omega_1 = Z(\omega_1, \omega_2)$
On fait le même raisonnement pour obtenir la relation $S.T = U$.

8. Rappeller la définition d'une variable X de Bernoulli
de parametre $0 < p < 1$ Calculer son esperance $E(X)$.
Donner un exemple d'experience gérée par X

solution. Soit Ω, P un espace probabilisé et soit $0 < p < 1$
Une variable X de Bernoulli est definit par $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec pour loi:
$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$. Son esperance est égale à:
$E(X) = 1.P(X = 1) + 0.P(X = 0) = 1.p + 0.(1 - p) \Longrightarrow E(X) = p$.
exemple d'experience gérée par X :
1. lancer une piece de monnaie $\Omega = \{pile, face\}$
avec $P(pile) = p, P(face) = 1 - p$ et $X(pile) = 1 \quad X(face) = 0$
2. tirer une boule dans une urne contenant des boules blanches
et des boules noires.