5. Inégalités

5.1.Définition. Soit A une partie de $\mathbf{R}$

(a) La fonction indicatrice de A est définie par:

$I_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $I_A(x) = 0$ si $x \in A^c$.

son esperance vaut $E(I_A) = P(A)$

(b) Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ on note la fonction définie par:

$(f.I_A)(x) = f(x)$ si $x \in A$

$(f.I_A)(x) = 0$ si $x \in A^c$

5.2.Définition. Soit X une V.A sur Ω, P, et $A \subset \Omega$

$(X.I_A)(\omega) = X$ si $\omega \in A$

$(X.I_A)(\omega) = 0$ si $\omega \in A^c$

5.3.Définition. (Integrale locale)

(a) Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et soit A une partie de $\mathbf{R}$, l'integrale locale de la fonction f sur A est définie par $\int\limits_A f(x).dx = \int\limits_{\mathbf{R}} (f.I_A)(x).dx$.

A titre d'exemple on peut prendre $A =]a, +\infty[$

on obtient $\int\limits_A f(x).dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x).dx$.

(b) Soit X une V.A sur Ω, P, et $A \subset \Omega$ l'esperance locale de la V.A X sur A est définie par $E_A(X) = E(X.I_A)$

A titre d'exemple on peut prendre $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\}$

L'application de l'esperance locale pour la V.A $|X|$ permet de prouver l'inegalite de Markov ci-dessous

Le but de la suite est de donner certaines inégalités utiles dans les applications. Les V.A considérées sont supposées avoir une esperance finie.

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire telle que $E(|X|) < \infty$ alors $\forall \lambda > 0$ on a:

$P(|X| > \lambda) \leq \dfrac{E(|X|)}{\lambda}$

solution.

on a $|X| \geq |X|.I_{(|X|>\lambda)} > \lambda.I_{(|X|>\lambda)}$

$\Longrightarrow E(|X|) \geq E\left(\lambda.I_{(|X|>\lambda)}\right) = \lambda.P(|X| > \lambda)$

par la croissance de l'esperance

comme on a $E\left(I_{(|X|>\lambda)}\right) = P(|X| > \lambda)$ (Definition **5.1** (a))

on deduit $P(|X| > \lambda) \leq \dfrac{E(|X|)}{\lambda}$

Inégalité de Jensen

$|E(X)| \leq E(|X|)$

Plus géneralement si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction convexe telle que $E(|f(X)|) < \infty$, alors: $f(E(X)) \leq E(f(X))$

solution.
Pour toute V.A X on définit les V.A:
$X^+ = \sup(X, 0)$ et $X^- = \inf(-X, 0)$
il n'est pas difficile de montrer que:
$X = X^+ - X^-, \quad |X| = X^+ + X^-$, d'où par linéarité de l'esperance:
$E(X) = E(X^+) - E(X^-), \quad E(|X|) = E(X^+) + E(X^-)$, on obtient:
$|E(X)| = |E(X^+) - E(X^-)| \leq |E(X^+)| + |E(X^-)| = E(|X|)$

Pour le cas general avec une fonction convexe f
voir cours de théorie de la mesure.

Inégalité de Tchebychev

Soit $\lambda > 0$ et soit X une V.A de variance finie alors
$P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \dfrac{V(X)}{\lambda^2}$

solution.
On utilise la même technique que celle appliquée dans l'inégalité de Markov:

$|X - E(X)|^2 \geq |X - E(X)|^2 .I_{(|X-E(X)| \geq \lambda)} \geq \lambda^2 .I_{(|X-E(X)| \geq \lambda)}$
$\Longrightarrow E|X - E(X)|^2 \geq \lambda^2 .E\left(I_{(|X-E(X)| \geq \lambda)}\right)$

mais $E|X - E(X)|^2 = V(X)$, et $E\left(I_{(|X-E(X)| \geq \lambda)}\right) = P(|X - E(X)| \geq \lambda)$
finalement on obtient l'inégalité recherchée:
$P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \dfrac{V(X)}{\lambda^2}$.