13. Calculer l'esperace et la variance de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$:

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3...\}$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, 3, ...$

$E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} .k.e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

solution. Rappel $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$, for any x real number $(*)$

$E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k.e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

on a $E(X) = \lambda.e^{-\lambda}.\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.e^{-\lambda}.e^{\lambda}$

puisque d'aprés le rappel $(*)$ on a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$.

Finalement $E(X) = \lambda$.

Calcul de la variance $V(X)$:
il suffit de calculer $E\left(X^2\right)$ et d'utiliser la relation:
$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = E\left(X^2\right) - \lambda^2$

on a $E\left(X^2\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2.e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

$E\left(X^2\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2.e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = \lambda.e^{-\lambda}.\sum\limits_{k=1}^{\infty} k.\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.e^{-\lambda}.\sum\limits_{k=1}^{\infty} ((k-1)+1).\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$

$\lambda.e^{-\lambda}.\sum\limits_{k=1}^{\infty} (k-1).\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda.e^{-\lambda}.\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$

$\lambda^2.e^{-\lambda}.\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda.e^{-\lambda}.\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2.e^{-\lambda}.e^{\lambda} + \lambda.e^{-\lambda}.e^{\lambda}$

donc $E\left(X^2\right) = \lambda^2 + \lambda$ et finalement $V(X) = E\left(X^2\right) - \lambda^2 = \lambda$.

14. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire définie
sur un espace probabilisé Ω P par: $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$P(X = 1) = P(X = 3) = P(X = 5) = x$
$P(X = 2) = P(X = 4) = 2x$
(a) Calculer x
(b) Calculer $E(X)$

solution.
(a) On a $P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) +$
$P(X = 2) + P(X = 4) = 7x = 1$ ce qui donne $x = \dfrac{1}{7}$

(b) $E(X) = 1.\dfrac{1}{7} + 3.\dfrac{1}{7} + 5.\dfrac{1}{7} + 2.\dfrac{2}{7} + 4.\dfrac{2}{7} = \dfrac{21}{7} = 3$
Donc $E(X) = 3$.

15. Soit X la variable absolument continue de densité:
$f(x) = 2x$ pour $x \in [0,1]$
$f(x) = 0$ pour $x \notin [0,1]$
Calculer l'esperance et la variance de X.

solution.

On vérifie que $f(x)$ est une densité de probabilité c'est à dire $\int_0^1 .f(x).dx = 1$

en effet on a $\int_0^1 .2x.dx = 2.\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2.\frac{1}{2} = 1$

$E(X) = \int_0^1 x.f(x).dx = \int_0^1 2x^2.dx = 2.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

on sait que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

on a $E(X^2) = \int_0^1 x^2.f(x).dx = \int_0^1 2x^3.dx = 2.\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

on déduit $V(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$.

16. Calculer l'esperace et la variance de la loi géometrique $\mathcal{G}(p)$, $0 < p < 1$
$X(\Omega) = \{1, 2, 3...\}$, $P(X = k) = p.(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, ...$

solution.

Rappel: pour $0 < x < 1$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

de plus $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

(voir cours sur les series entières)

on vérifie que $\sum_{n=1}^{\infty} P(X = k) = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p.(1-p)^{k-1} = p.\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p.\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

ensuite remarquons que $k.(1-p)^{k-1} = -\frac{d}{dp}(1-p)^k$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} k.P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} .k.p.(1-p)^{k-1} = p.\sum_{k=1}^{\infty} .k.(1-p)^{k-1} =$$
$$p.\left(\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{d}{dp}(1-p)^k\right) = -p.\frac{d}{dp}\sum_{k=1}^{\infty} .(1-p)^k = -p.\frac{d}{dp}\frac{1}{1-(1-p)} =$$
$$-p.\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = -p.\left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p} \text{ donc } E(X) = \frac{1}{p}.$$

Par un calcul analogue on trouve $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$