9. Soit Y une variable binomiale de parametre $0 < p < 1$:
$P(Y = k) = C_n^k.p^k (1-p)^{n-k}, \;\; k = 0, 1, 2..., n.$
(a) Calculer son esperance $E(Y)$
(b) Donner un exemple d'experience gérée par Y.

Rappel: **Formule du Binome de Newton:**
$\forall a, b$ dans $\mathbb{R}$, $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k.a^k.b^{n-k}$

solution. (a) $E(Y) = \sum\limits_{k=0}^{n} k.P(Y=k) = \sum\limits_{k=1}^{n} k.C_n^k.p^k (1-p)^{n-k} \quad (*)$

on a $k.C_n^k = k.\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = k.\dfrac{n!}{k.\,(k-1)!\,(n-k)!} =$
$\dfrac{n.\,(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!}$puisque $n - k = (n-1) - (k-1)$ on obtient:
$k.C_n^k = n.C_{n-1}^{k-1}$, on remplace $k.C_n^k$ par $n.C_{n-1}^{k-1}$ dans la formule $(*)$, donc:
$E(Y) = \sum\limits_{k=1}^{n} k.C_n^k.p^k (1-p)^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} n.C_{n-1}^{k-1}.p^k (1-p)^{n-k} =$
$n.p.\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}.p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$, mais d'aprés

la **Formule du Binome de Newton**
on a $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}.p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = (p + (1-p))^n = 1$

par consequent on obtient $E(Y) = n.p.$

(b) Exemple d'experience gérée par Y :
Le pourcentage de pièces défecteuses d'un procédé de fabrication industrielle vaut $0 < p < 1$. Cela signifie que la probabilité qu'une piece fabriquée soit défecteuse vaut p Si on considère au hazard un ensemble de n pièces fabriquées par ce procédé le nombre Y de pièces défecteuses contenues dans cet ensemble suit une loi binomiale de paramètres n et p.

10. Probabilité Produit
Soient Ω_1, P_1 et Ω_2, P_2 deux espaces probabilisés.On définit sur l'ensemble $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ la probabilité produit P de P_1 et P_2 par:
si $A \subset \Omega$ et $A = A_1 \times A_2$, avec $A_1 \subset \Omega_1, A_2 \subset \Omega_2$, $P(A) = P_1(A_1).P_2(A_2)$.
On note $P = P_1 \otimes P_2$
Pour une piece donnée on suppose: $P(pile) = \alpha$.
On lance 2 fois cette piece. Si l'experience est gérée par la probabilité produit $\pi = P \otimes P$, déterminer la probabilité des evenements $(p,p), (p,f), (f,p), (f,f)$.

solution.
$\pi(p,p) = \pi(p).\pi(p) = \alpha^2, \;\; \pi(p,f) = \pi(p).\pi(f) = \alpha.(1-\alpha)$
$\pi(f,p) = \pi(f).\pi(p) = (1-\alpha).\alpha, \;\; \pi(f,f) = \pi(f).\pi(f) = (1-\alpha)^2$

on verifie bien que:
$\pi(p,p)+\pi(p,f)+\pi(f,p)+\pi(f,f)=\alpha^2+2\alpha.(1-\alpha)+(1-\alpha)^2=1$

11. (a) On lance un dé 2 fois au hasard. Si chaque jet est géré par la probabilité uniforme π, déterminer la probabilité produit $P(\omega_1,\omega_2)=\pi\otimes\pi(\omega_1,\omega_2)$ de chaque résultat (ω_1,ω_2).
(b) Soit S la somme des résultats obtenus:
calculer $P(S=7)$, $P(S=8)$, $P(S=9)$

solution.
(a) On a $\Omega=\{(\omega_1,\omega_2):1\leq\omega_1\leq 6,\quad 1\leq\omega_2\leq 6\}$
$\pi(\omega_1)=\pi(\omega_2)=\dfrac{1}{6}$, $\forall\omega_1,\omega_2$ compris entre 1 et 6 puisque chaque jet est géré par la probabilité uniforme π.
Donc $P(\omega_1,\omega_2)=\pi\otimes\pi(\omega_1,\omega_2)=\pi(\omega_1)\times\pi(\omega_2)=\dfrac{1}{36}$.
Par consequent P est la probabilité uniforme sur Ω.
(b) $S(\omega_1,\omega_2)=\omega_1+\omega_2$
$(S=7)=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4.3)\}$
$P(S=7)=P\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4.3)\}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$
on calcule $P(S=8)$, $P(S=9)$ de façon analogue.

12. Soient X,Y 2 $V.A$ de Ω dans $\mathbf{R}$ definies sur Ω,P et de méme loi
Montrer que $E(X)=E(Y)$ et $V(X)=V(Y)$ (considérer le cas discret et le cas absolument continu et remarquer que $X(\Omega)=Y(\Omega)$).

solution. X,Y ont la méme loi:
(1) Cas discret: $X(\Omega)=Y(\Omega)=\{v_1,v_2,...\}$ et $P(X=v_n)=P(Y=v_n)$
$E(X)=\sum\limits_{v_n}v_n.P(X=v_n)=\sum\limits_{v_n}v_n.P(Y=v_n)=E(Y)$

Pour l'égalité des variance on utilise la relation établie en cours:
$V(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2,\qquad V(Y)=E\left(Y^2\right)-(E(Y))^2$
avec $E\left(X^2\right)=\sum\limits_{v_n}v_n^2.P(X=v_n)$ et $E\left(Y^2\right)=\sum\limits_{v_n}v_n^2.P(Y=v_n)$
on déduit que $V(X)=V(Y)$

(2) Cas absolument continu: $X(\Omega)=Y(\Omega)=I$ interval de $\mathbb{R}$
X,Y ont la méme loi, c'est à dire la même densité $\varphi(t)$, $t\in I$

$$E(X)=E(Y)=\int_I t.\varphi(t).dt,\qquad E\left(X^2\right)=E\left(Y^2\right)=\int_I t^2.\varphi(t).dt$$

$$V(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2,\qquad V(Y)=E\left(Y^2\right)-(E(Y))^2$$

$$=\int_I t^2.\varphi(t).dt-\left(\int_I t.\varphi(t).dt\right)^2.$$